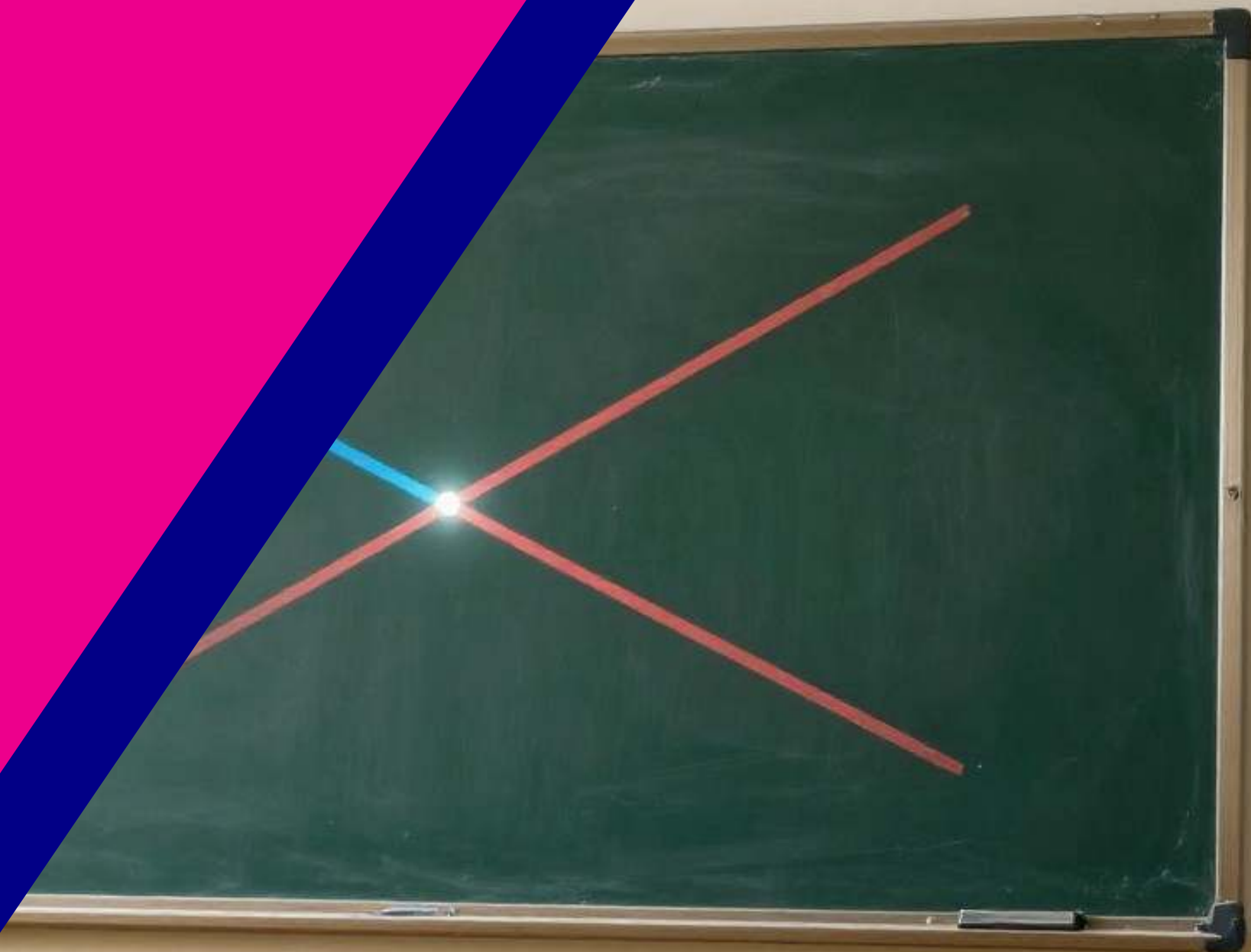
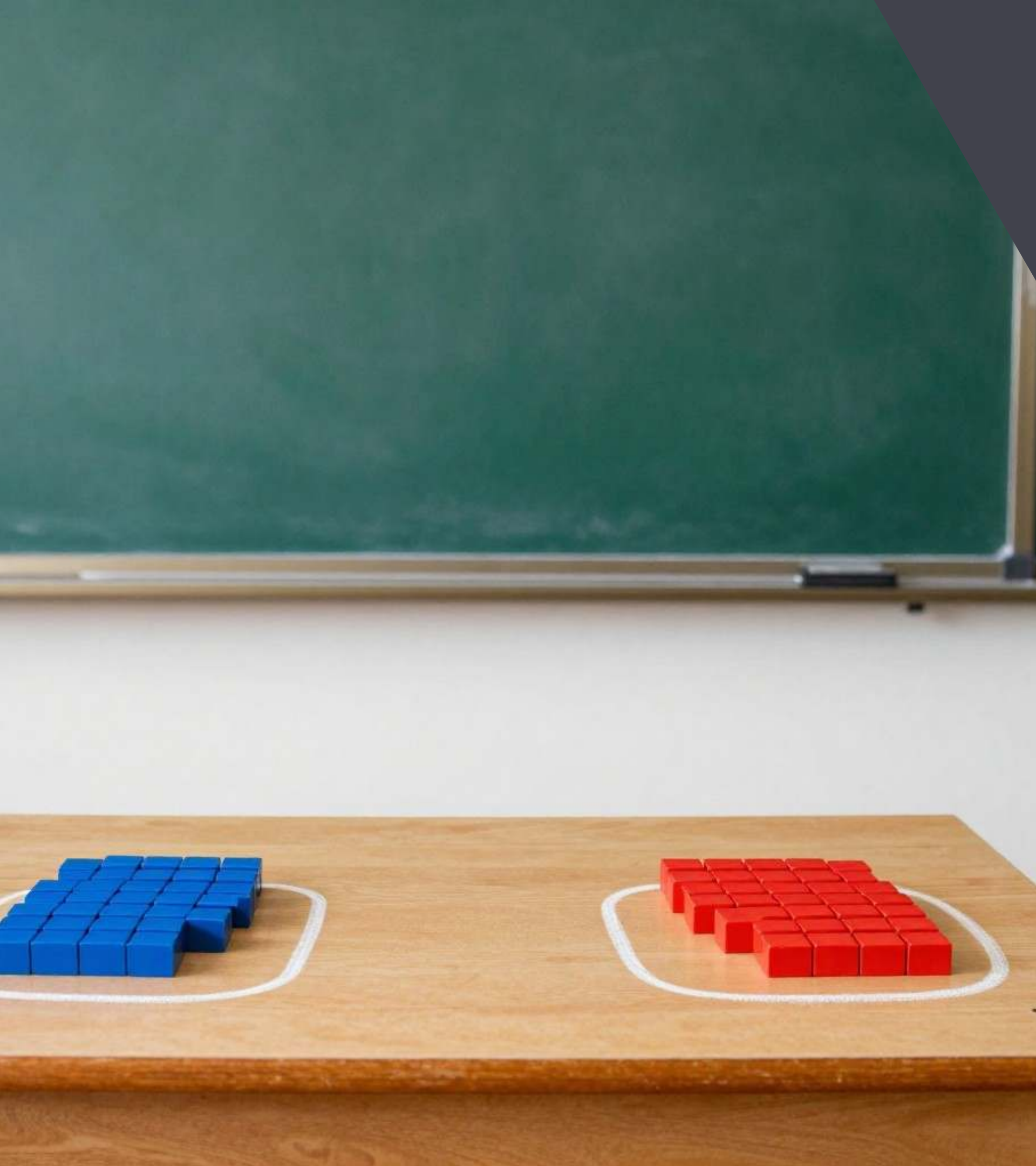


Уравнения первой степени с двумя неизвестными. Системы уравнений

Изучаем уравнения с двумя
неизвестными и их графики.



A green chalkboard is visible in the background. In the foreground, on a wooden desk, there are two groups of small blocks. On the left, there is a group of blue blocks arranged in a roughly rectangular shape. On the right, there is a group of red blocks arranged in a similar shape. Both groups of blocks are enclosed within a white chalk outline on the desk surface.

Зачем нужны уравнения с двумя неизвестными

Они описывают не одно число, а пары значений. Так удобно связывать две величины: цену и количество, скорость и время, стоимость и число предметов.

Общий вид линейного уравнения с двумя неизвестными

1

Запись уравнения

Линейное уравнение первой степени с двумя неизвестными записывают как $ax+by=c$. Буквы x и y обозначают переменные, а коэффициенты a и b показывают, как они входят в равенство.

2

Что такое коэффициенты

Числа a и b называют коэффициентами при неизвестных, а c — свободным членом. Обычно оба коэффициента не равны нулю одновременно, иначе уравнение перестаёт быть линейным в двух переменных.

3

Что считается решением

Решением является любая пара чисел, которая делает равенство верным после подстановки. Например, для $x+y=5$ подходят пары $(0; 5)$, $(1; 4)$, $(2; 3)$ и $(5; 0)$.

4

Проверка подстановкой

Чтобы убедиться в правильности ответа, нужно подставить найденные значения вместо x и y . Если после вычислений получается верное равенство, пара чисел действительно является решением.

5

Смысл записи

Такая запись помогает увидеть связь между алгеброй и координатами. Каждая подходящая пара чисел соответствует точке на плоскости, а все решения вместе образуют один график.

График уравнения — прямая линия

Все решения на одной линии

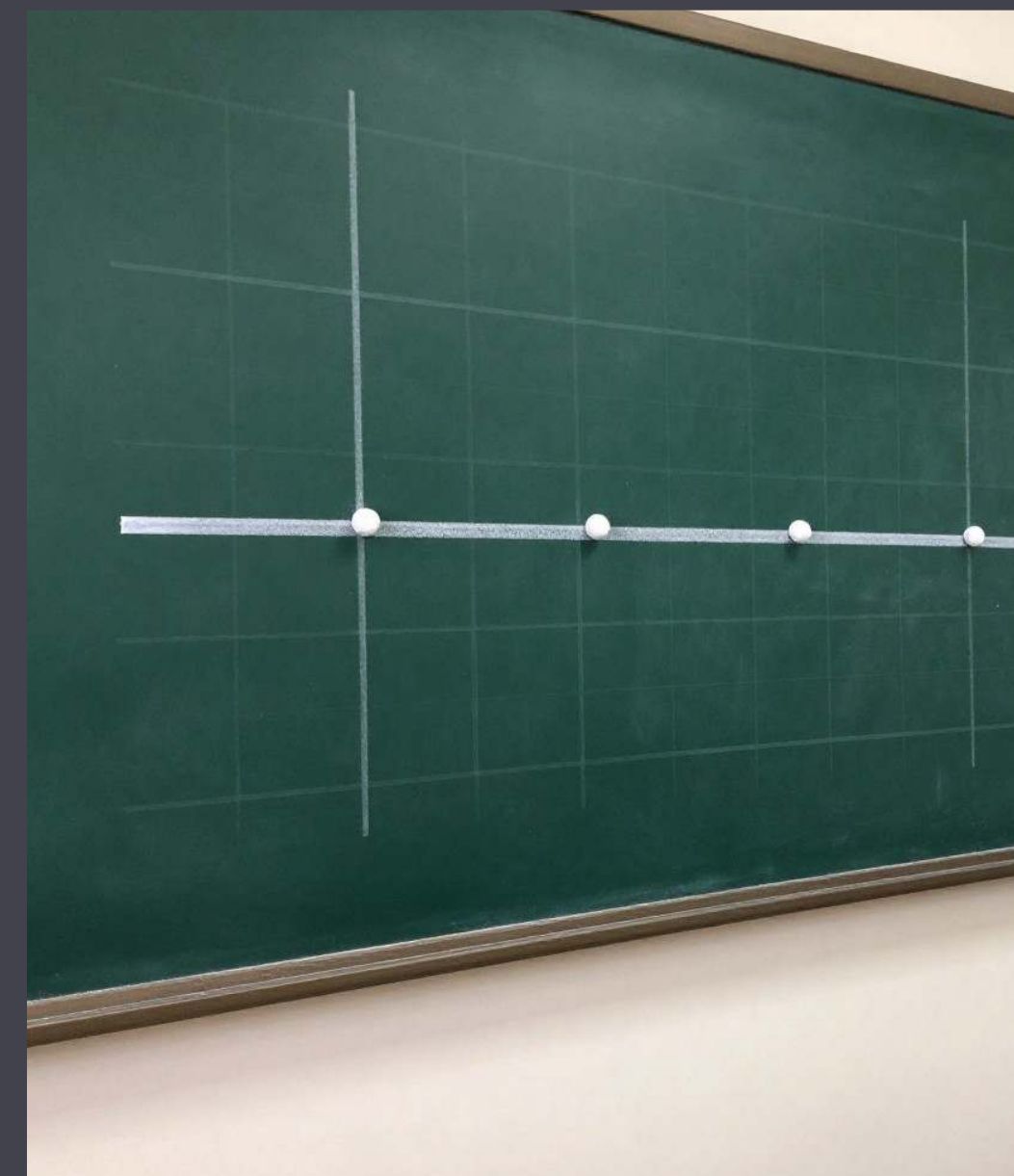
Каждое линейное уравнение с двумя неизвестными задаёт прямую на координатной плоскости. Любая точка этой прямой соответствует паре чисел, которая удовлетворяет уравнению.

Пример для $x+y=5$

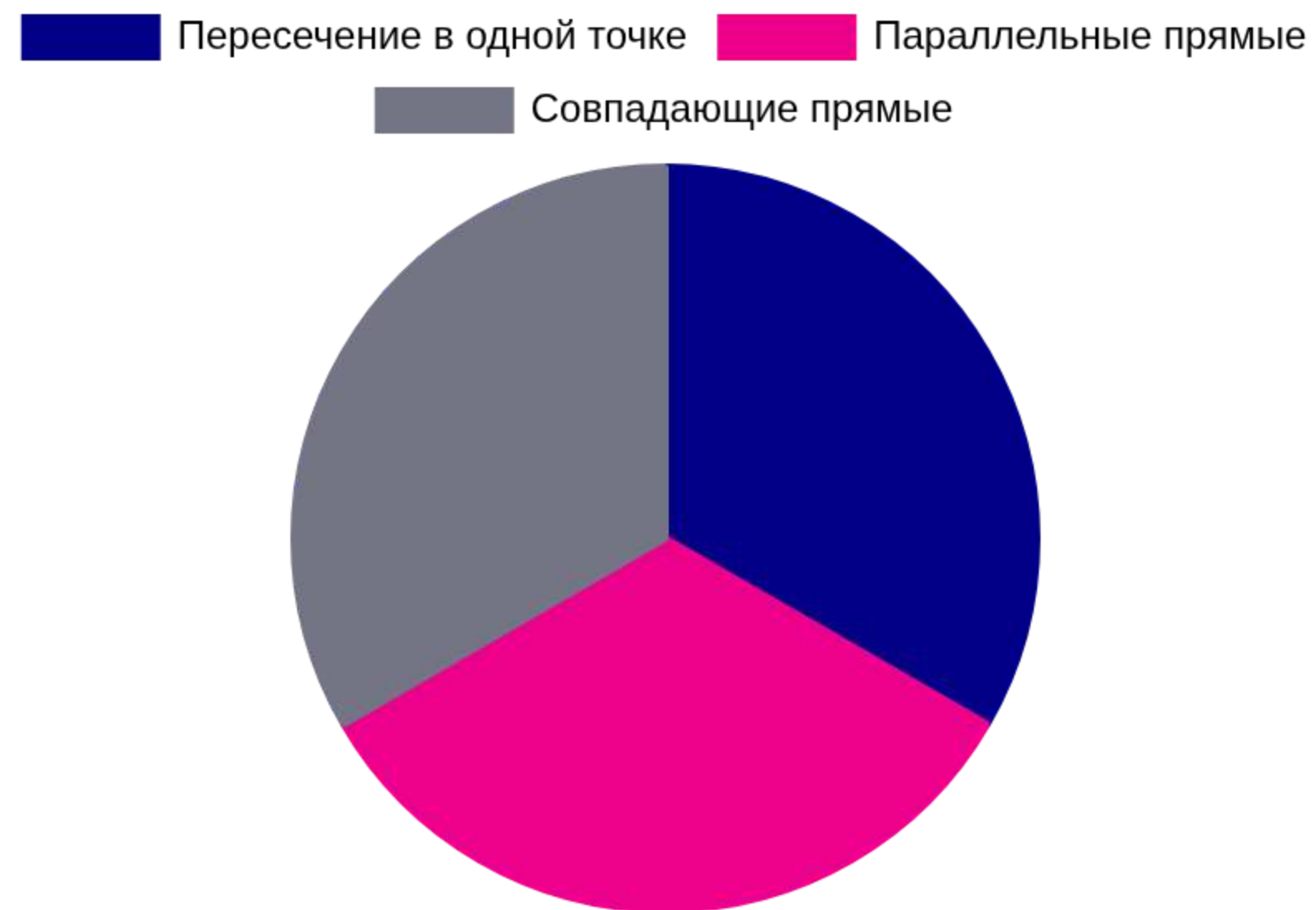
Для уравнения $x+y=5$ подойдут точки $(0; 5)$, $(1; 4)$, $(2; 3)$, $(3; 2)$ и $(5; 0)$. Все они лежат на одной прямой и дают верное равенство.

Почему это важно

По графику легко видеть, сколько решений имеет уравнение и как меняется положение прямой при изменении коэффициентов. Это помогает переходить от вычислений к наглядному пониманию.



Сколько решений может быть у системы



На схеме показаны только три возможных случая, которые определяются положением двух прямых относительно друг друга.

В системе линейных уравнений число решений зависит от взаимного расположения прямых: одна точка, ни одной точки или совпадение.

Учебная схема по теме «Системы линейных уравнений».

Три вида систем линейных уравнений

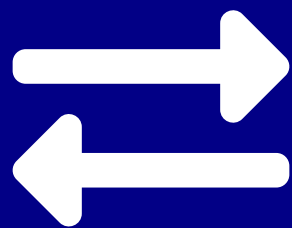
Вид системы	Геометрия	Решения
Пересекаются	Одна точка	Одно
Параллельны	Нет пересечения	Нет
Совпадают	Одна прямая	Бесконечно много

Сравним геометрический смысл системы и число её решений.

По виду прямых можно сразу определить результат: точка пересечения, отсутствие общего решения или полное совпадение.

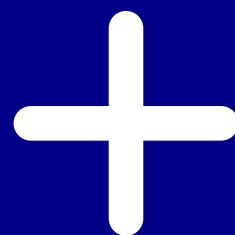
Учебная классификация систем линейных уравнений

Как решают системы уравнений



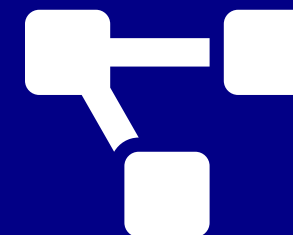
Подстановка

Сначала выражают одну переменную через другую, а затем подставляют найденное выражение во второе уравнение. Этот способ особенно удобен, когда одна из переменных уже почти изолирована.



Сложение

Уравнения преобразуют так, чтобы коэффициенты при одной переменной стали противоположными или равными. После сложения или вычитания эта переменная исчезает, и остаётся одно уравнение.

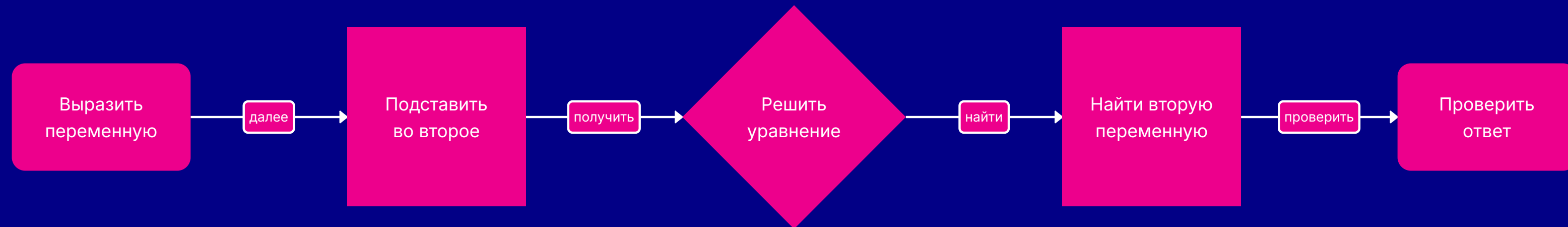


Графический способ

Каждое уравнение изображают прямой на координатной плоскости. Решением системы становится точка их пересечения, поэтому способ даёт наглядный ответ.

Алгоритм решения способом подстановки

Последовательность действий при решении системы подстановкой.



4

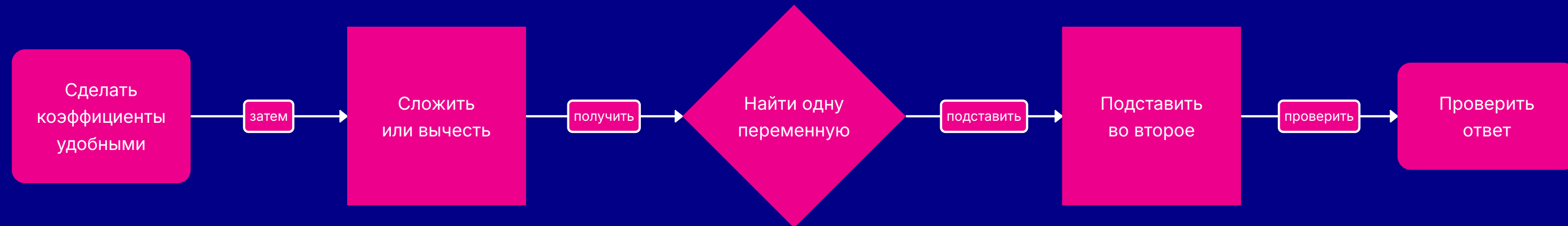
— значение x , из которого затем находят $y = 3$.

Число 4 показывает, как подстановка быстро приводит к решению системы: сначала находят x , затем получают вторую переменную и проверяют пару.

Составлено по примеру: $x+y=7$, $x-y=1$.

Алгоритм решения способом сложения

Последовательность действий при решении системы сложением или вычитанием.



Пример решения способом сложения

1

Запишем систему

Возьмём уравнения $2x+y=9$ и $2x-y=3$. Здесь коэффициенты при y противоположны, поэтому сложение сразу убирает неизвестную и делает вычисления короче.

2

Складываем уравнения

Сложим левые и правые части: $(2x+y)+(2x-y)=9+3$. Получаем $4x=12$, откуда $x=3$. Один шаг заменяет длинные преобразования и экономит время.

3

Находим вторую переменную

Подставим $x=3$ в первое уравнение: $2 \cdot 3 + y = 9$. Тогда $6 + y = 9$, значит $y=3$. Теперь известна вся пара значений, подходящая к обеим строкам.

4

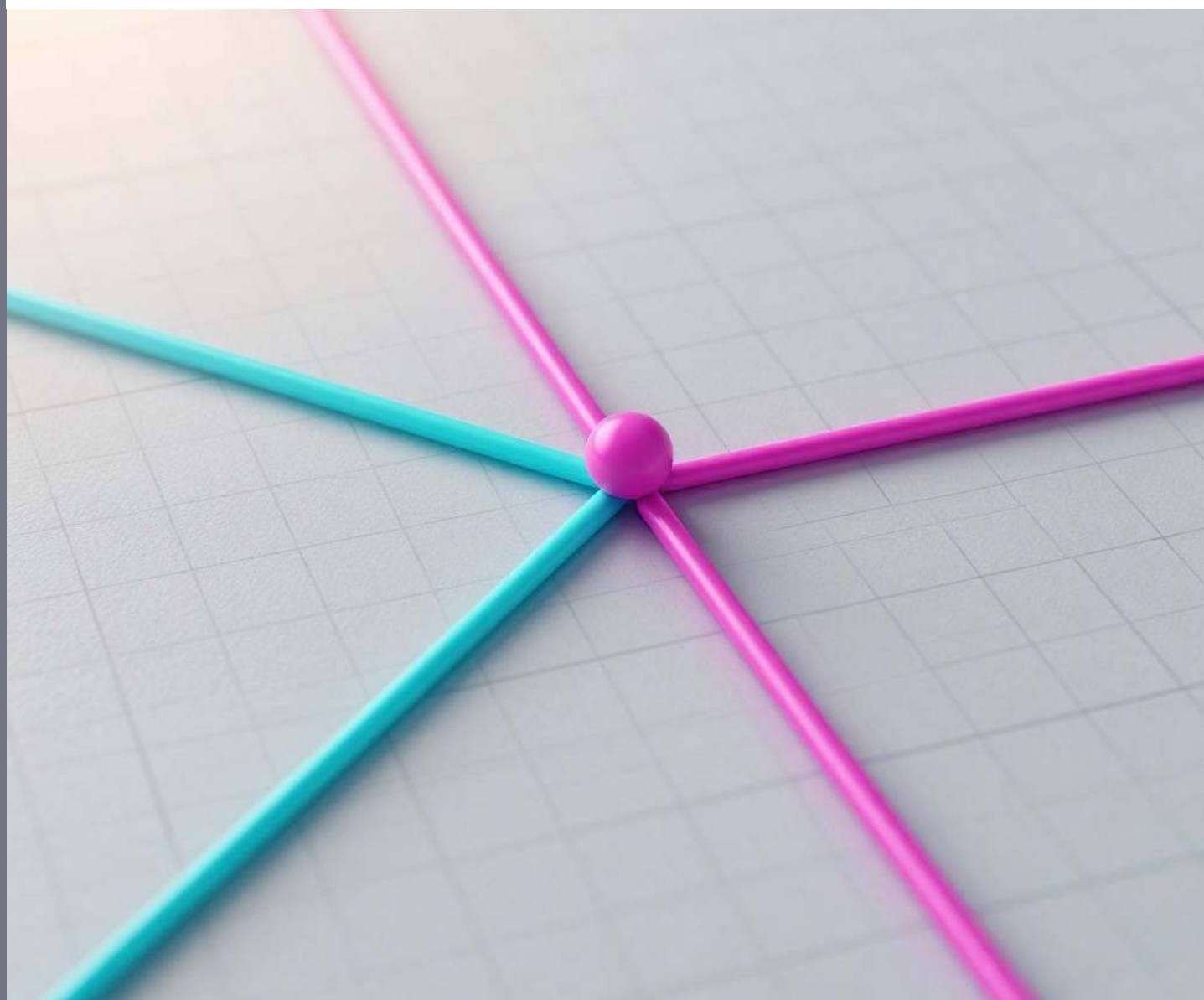
Проверяем ответ

Проверка подтверждает результат: $2 \cdot 3 + 3 = 9$ и $2 \cdot 3 - 3 = 3$. Ответ системы — $(3; 3)$. Такой способ особенно удобен, когда одну переменную легко устранить сложением.

Графический способ на координатной плоскости

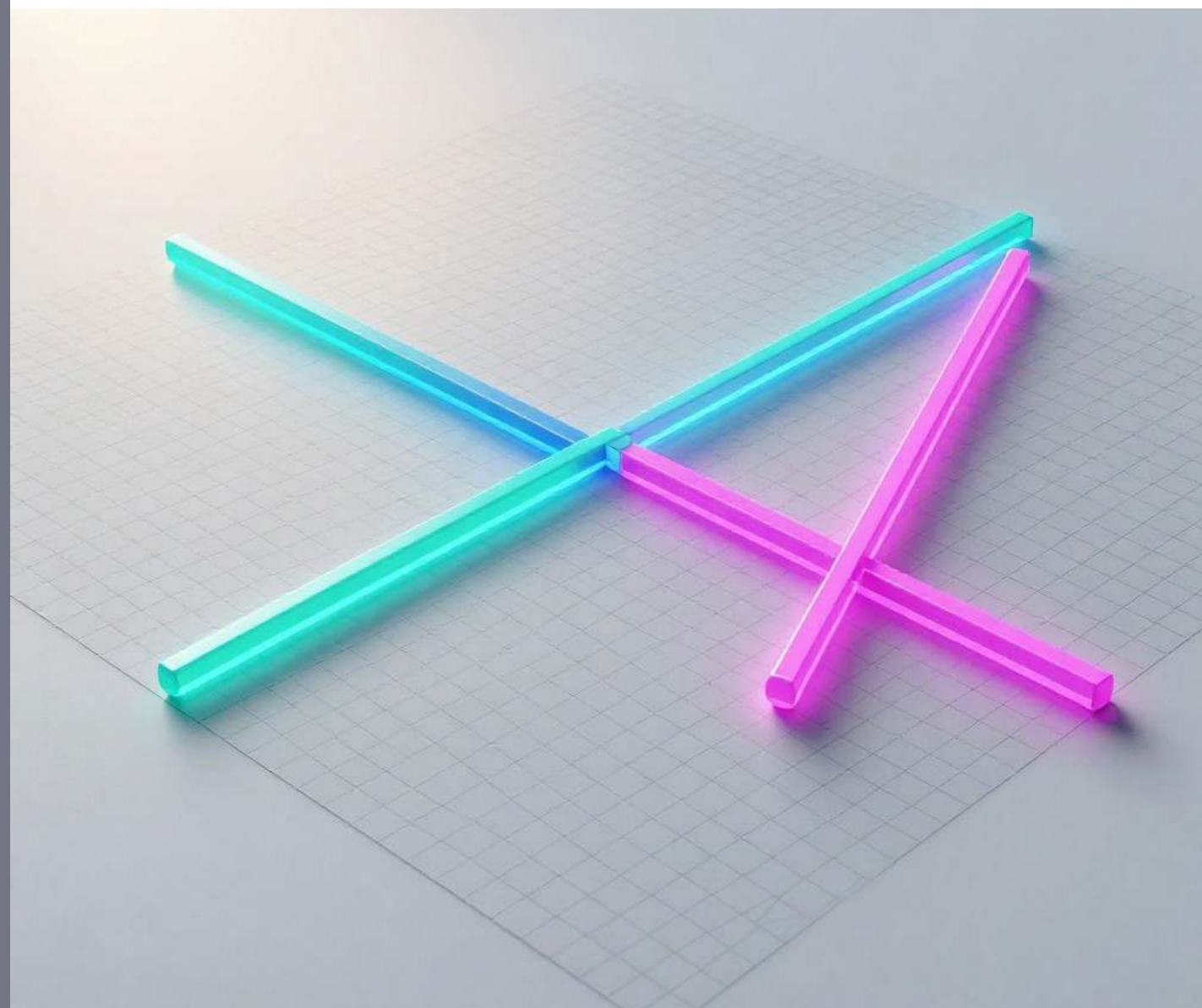
Две прямые — один ответ

Каждое уравнение системы можно изобразить как прямую, если построить её по двум точкам. Когда две прямые пересекаются, их общая точка и есть решение системы. На рисунке удобно подписать координаты этой точки и названия уравнений.



Что показывает чертёж

График помогает увидеть не только ответ, но и саму ситуацию целиком. Если прямые наклонены по-разному, они встретятся в одной точке; если идут параллельно, общей точки не будет. Именно это видно на координатной плоскости сразу.



Проверка и запись ответа



Запись пары

Ответ системы записывают как пару чисел в скобках: сначала x , затем y . Такой порядок важно не менять, иначе координаты точки окажутся неверными.



Подстановка

Чтобы убедиться в правильности решения, найденную пару подставляют в оба уравнения. Если равенства верны, ответ записан правильно и без ошибок.



Типичные ошибки

Часто путают x и y , теряют знак минуса при раскрытии скобок или ошибаются в вычислениях. Эти неточности легко исправить внимательной проверкой.



Точка на плоскости

Если решение найдено графически, его удобно сверить с координатами точки пересечения. Тогда запись ответа и положение точки совпадают, а результат становится наглядным.

Типичные ошибки и как они связаны с решением

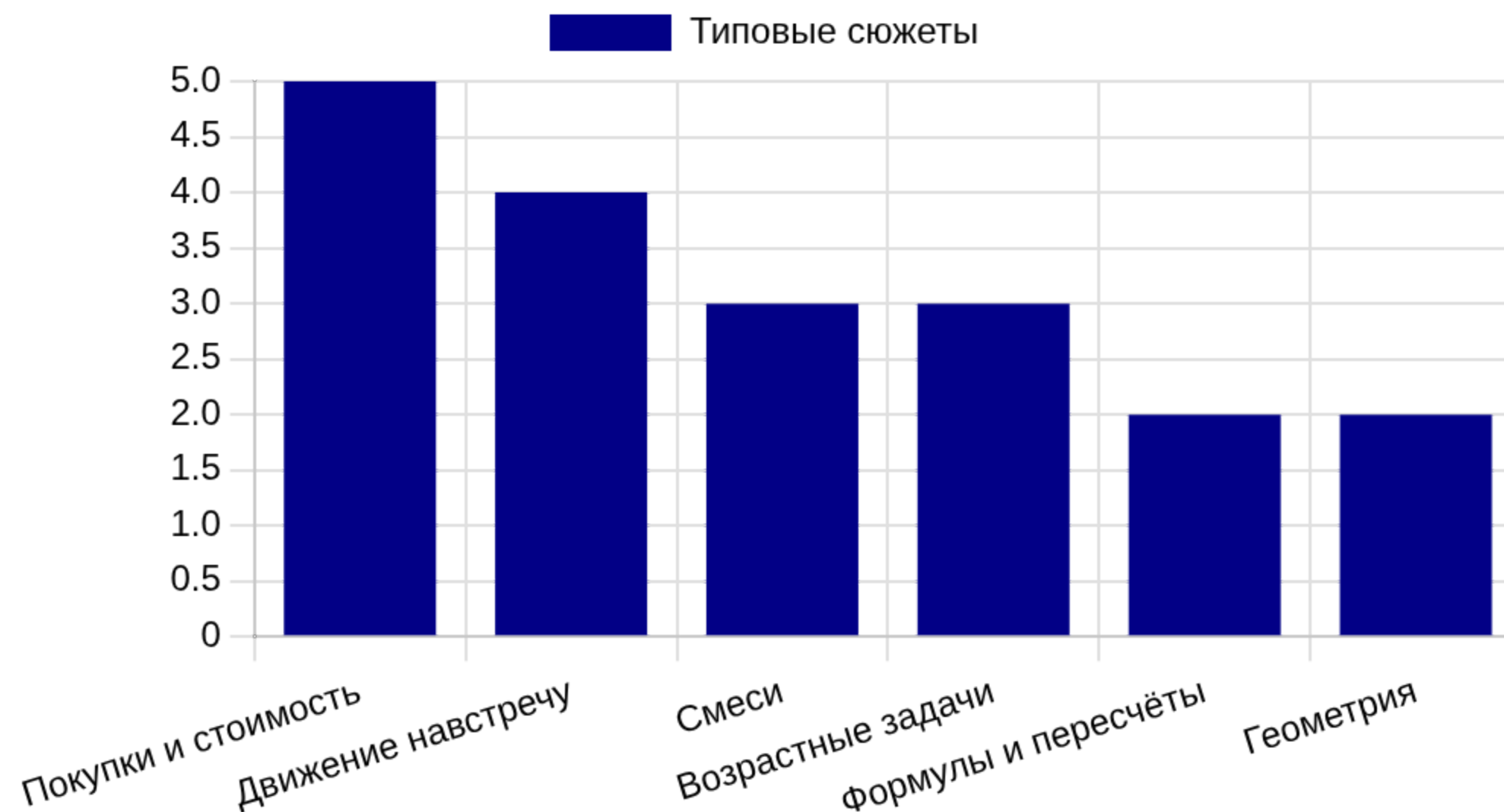
Ошибка	Причина	Верный приём
Порядок x и y	Перепутаны координаты	Сначала x , потом y
Знак при скобках	Пропущен минус	Раскрывать аккуратно
Преобразование коэффициентов	Ошибочное умножение	Проверять каждый шаг
Нет проверки	Спешка в конце	Подставить ответ

В таблице показано, где чаще всего появляются ошибки и какой приём помогает их избежать.

Большинство ошибок связано не со способом решения, а с невнимательностью в записи и вычислениях. Проверка подстановкой помогает вовремя заметить неточность.

Обобщение типичных ошибок при решении систем линейных уравнений

Где встречаются системы уравнений



На уроках такие задачи чаще всего строятся вокруг двух величин, которые связаны одним условием: ценой, временем, количеством или расстоянием.

Самые узнаваемые сюжеты — покупки и задачи на движение. Во всех случаях текст удобно переводится в две связи между двумя неизвестными.

Схематическое распределение типовых школьных сюжетов; оценка по учебным примерам

Реальная задача: покупки в магазине

Условие задачи

Два тетради и три ручки стоят 39 рублей, а одна тетрадь и две ручки — 24 рубля. Нужно найти цену каждого товара, составив систему уравнений.

Решение по шагам

Дальше выбирают удобный способ и находят значения x и y . Система показывает, сколько стоит каждый предмет отдельно, хотя в условии даны только общие суммы.

Математическая модель

Если цену тетради обозначить через x , а цену ручки через y , то по условию получаем два равенства. Так текст задачи превращается в понятную запись.

Смысл ответа

Такие задачи учат связывать жизненную ситуацию с математикой. После решения становится ясно, как из общей стоимости выделить цену одного товара.

Как понять решение до вычислений

Параллельные прямые

Если коэффициенты при x и y одинаковые, а свободные члены разные, уравнения описывают параллельные прямые. У них нет общей точки, значит система не имеет решения.

Совпадающие прямые

Когда одно уравнение получается из другого умножением на число, обе прямые совпадают. Тогда любая точка одной прямой подходит и для второй, поэтому решений бесконечно много.

Сравнение способов решения систем

Способ	Когда удобен	Сильная сторона
Подстановка	Одна переменная выражена	Быстрое преобразование
Сложение	Коэффициенты можно уравнивать	Убирает переменную
Графический	Нужна наглядность	Показывает пересечение

Каждый способ удобен в своей ситуации. Таблица помогает выбрать тот, который быстрее приведёт к ответу.

В большинстве учебных задач быстрее всего работают подстановка и сложение. Графический способ особенно полезен, когда нужно увидеть смысл решения на плоскости.

Сравнение школьных способов решения систем линейных уравнений

Мини-памятка по решению систем

1

Выбери способ

Сначала посмотри на уравнения и реши, что удобнее: подстановка, сложение или построение графика. Правильный выбор экономит время и уменьшает риск ошибки.

2

Преобразуй аккуратно

Работай с уравнениями так, чтобы равенство сохранялось. Не пропускай знаки, особенно при раскрытии скобок и переносе слагаемых в другую часть.

3

Найди первую переменную

После преобразований получи уравнение с одной неизвестной и реши его. Это основной шаг, который открывает путь к полному ответу системы.

4

Найди вторую переменную

Подставь найденное значение в любое исходное уравнение. Так ты получишь вторую переменную и восстановишь всю пару чисел, подходящую системе.

5

Обязательно проверь

В конце подставь обе найденные величины в оба уравнения. Если равенства верны, значит ответ записан правильно и действительно подходит системе.

Уравнения и системы: один язык для двух неизвестных

Сегодня мы увидели, что уравнение с двумя неизвестными задаёт прямую, а система таких уравнений показывает, как две прямые связаны между собой. Это помогает решать задачи точно и понятно.