



Логарифм: как число превратить
в показатель степени.

Логарифмическая функция: определение, свойства и график

Зачем нужны логарифмы в алгебре

Логарифмы помогают работать с большими числами, описывать процессы роста и убывания и изучать обратную связь с показательной функцией. В 11 классе они встречаются в уравнениях, неравенствах, графиках и прикладных задачах науки и техники, где важны порядки величин и удобное сравнение данных.



Определение логарифма и логарифмической функции

01 Смысл записи

Логарифм числа x по основанию a записывают как $\log_a x$. Он показывает, в какую степень нужно возвести a , чтобы получить x , поэтому $y = \log_a x$ равносильно $a^y = x$.

02 Условия существования

Логарифм определён только при $a > 0$, $a \neq 1$ и $x > 0$. Эти ограничения обязательны: основание должно быть положительным, не равным единице, а аргумент — строго положительным.

03 Логарифмическая функция

Функция $y = \log_a x$ задана лишь для $x > 0$, но принимает любые действительные значения. Именно поэтому её график не пересекает ось Oy и имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

04 Частные случаи

Десятичный логарифм $\log_{10} x$ широко используется в вычислениях, натуральный $\log_e x$ — в математике и физике, а $\log_2 x$ часто встречается в информатике и теории информации.

Связь логарифмической и показательной функций



Взаимная обратимость

Функции $y=a^x$ и $y=\log_a x$ взаимно обратны при $a>0$, $a\neq 1$. Это означает, что одна восстанавливает значение, которое другая скрывает в показателе степени.

Симметрия графиков

Графики обратных функций симметричны относительно прямой $y=x$. Поэтому по одному графику можно мысленно построить другой, поменяв местами координаты точек.

Опорная точка

Точка $(1; 0)$ всегда принадлежит графику логарифмической функции, потому что $\log_a 1 = 0$. Она служит удобной отправной точкой при построении и проверке графика.

Практический вывод

Если известно поведение показательной функции, то логарифмическая читается как её зеркальное отражение. Это помогает быстрее понимать форму кривой и избежать ошибок при анализе.

Основные свойства функции $y=\log_a x$

Свойство	$a>1$	$0<a<1$
Область определения	$x>0$	$x>0$
Множество значений	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Монотонность	возрастает	убывает
Знак	>0 при $x>1$	>0 при $0<x<1$

Сравнение поведения логарифмической функции при разных основаниях.

Главное различие между случаями определяется основанием: при $a>1$ функция возрастает, а при $0<a<1$ — убывает, при одинаковых области определения и множестве значений.

Тождественные равенства и правила логарифмов



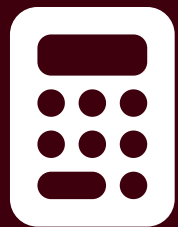
Базовые тождества

Равенства $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$ помогают мгновенно получать опорные значения. Они отражают сам смысл логарифма как показателя степени и используются в самых первых преобразованиях.



Переход между формами

Записи $\log_a(a^x) = x$ и $a^{\log_a x} = x$ показывают обратимость логарифмической и показательной форм. Эти равенства позволяют переводить уравнения в более удобный вид.



Произведение и частное

Формулы $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ и $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$ позволяют раскрывать произведения и дроби, если аргументы положительны. Они особенно полезны при упрощении выражений.



Степень аргумента

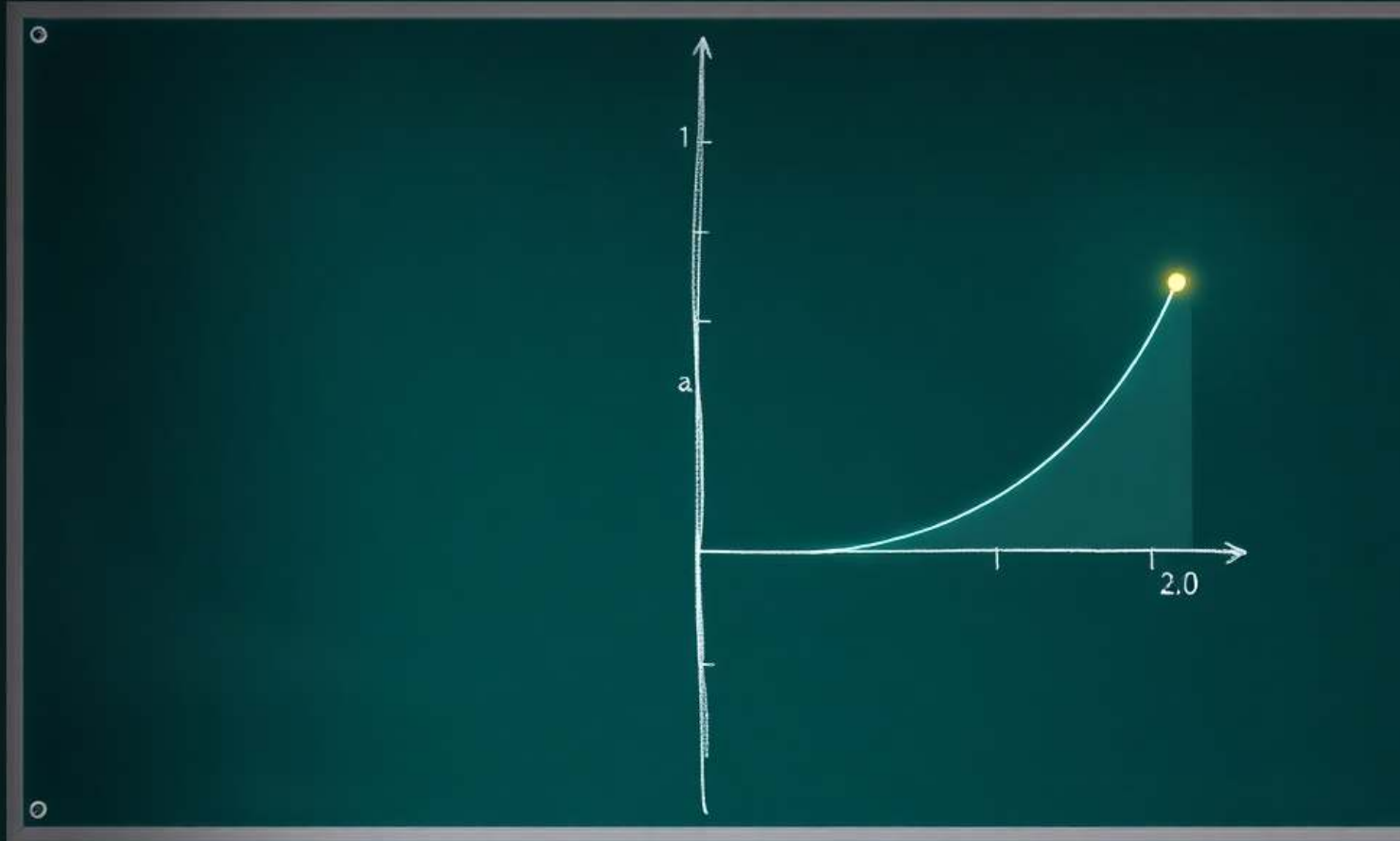
Правило $\log_a(x^k) = k \cdot \log_a x$ работает только при $x > 0$. Оно сокращает громоздкие выражения и помогает аккуратно преобразовывать логарифмические части уравнений и неравенств.

Как меняется график при разных основаниях



На одинаковых аргументах видна разница в скорости изменения: основание определяет не только направление, но и «крутизну» графика.

Чем больше основание при $a > 1$, тем медленнее рост; при $0 < a < 1$ график убывает. Все кривые проходят через $(1; 0)$.



Опорные точки и внешний вид графика

• Три ключевые точки

Для построения удобно использовать точки $(1; 0)$, $(a; 1)$ и $(1/a; -1)$. Они сразу показывают, где проходит кривая и как меняется её направление при выбранном основании.

• Направление ветви

При $a > 1$ график поднимается вправо, а при $0 < a < 1$ — опускается вправо. Это наглядно отражает различие между возрастающей и убывающей функцией.

• Поведение у оси Oy

Кривая не пересекает ось Oy, потому что при $x \leq 0$ логарифм не определён. При приближении к нулю значение функции неограниченно меняется, образуя вертикальную асимптоту.

• Построение по точкам

Сначала отмечают опорные значения, затем проводят плавную линию, учитывая асимптоту и монотонность. Такой способ позволяет быстро получить правильный вид графика без лишних вычислений.

Монотонность, область определения и множество значений

Область определения

01

Логарифмическая функция существует только для положительных аргументов. Поэтому при анализе графика и решении задач первым шагом всегда проверяют условие $x > 0$.

Случай $a > 1$

02

Если основание больше единицы, функция возрастает на всём промежутке $x > 0$. Тогда большему аргументу соответствует большее значение логарифма, что удобно при сравнении чисел.

Случай $0 < a < 1$

03

Если основание лежит между нулём и единицей, функция убывает. В этом случае увеличение аргумента ведёт к уменьшению значения, и направление графика меняется на противоположное.

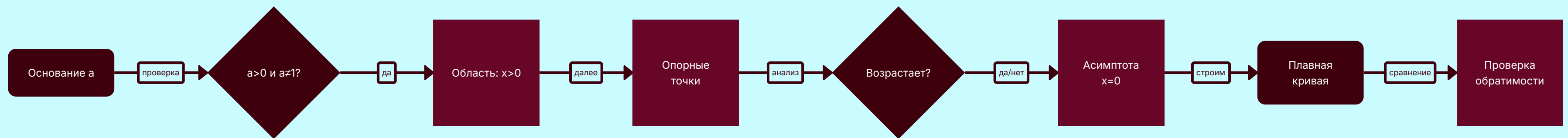
Множество значений

04

Значения логарифма не ограничены сверху или снизу: он может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Именно это делает функцию гибкой при моделировании широких диапазонов.

Алгоритм построения графика логарифмической функции

Последовательность шагов для проверки свойств и построения корректного графика.



Преобразования графика логарифмической функции



Сдвиг по оси Ox

Замена x на $x-b$ переносит график горизонтально: при $b>0$ он сдвигается вправо, при $b<0$ — влево. При этом важно заново проверить, где выражение в логарифме остаётся положительным.

Сдвиг по оси Oy

Слагаемое с добавляет к значениям функции постоянную величину и перемещает весь график вверх или вниз. Форма кривой не меняется, но точка пересечения с осью Oy исчезает, если она не определена.

Вертикальное растяжение

Множитель перед логарифмом усиливает или ослабляет изменения значений по вертикали. Если коэффициент больше 1, график становится круче; если он по модулю меньше 1, кривая выглядит более пологой.

Асимптота и ОДЗ

Любое преобразование требует отдельной проверки области определения: аргумент логарифма должен быть положительным. Вертикальная асимптота тоже может сместиться, если в выражении появляется горизонтальный сдвиг внутри скобок.

Сравнение скорости роста разных функций



На одном поле видно, насколько по-разному ведут себя три зависимости уже при небольших значениях аргумента. Особенно заметно, что логарифм долго остаётся малым, даже когда другие функции быстро увеличиваются.

Логарифмическая кривая растёт медленнее всех, поэтому удобна для описания больших диапазонов. Показательная функция наглядно демонстрирует быстрый рост и быстро обгоняет остальные.

Решение логарифмических уравнений в 11 классе



01 1. Проверить условия

Сначала находят область допустимых значений: аргументы логарифмов должны быть положительными, а основания — положительными и отличными от единицы. Без этого дальнейшие преобразования могут привести к неверному ответу.

02 2. Привести к удобной форме

Если в уравнении встречаются разные основания, их стараются свести к одному основанию или переписать выражение через степень. Это позволяет использовать свойства логарифмов и упростить сравнение частей уравнения.

03 3. Перейти к показательной записи

Основное равносильное преобразование выглядит так: $\log_a x = b$, если и только если $x = a^b$. Такой переход часто превращает логарифмическое уравнение в более привычное алгебраическое.

04 4. Проверить ответ

После нахождения корней обязательно возвращаются к области определения и проверяют каждое значение. Это последний этап, который помогает исключить посторонние корни и сохранить равносильность решения.

Примеры типичных логарифмических значений

Эти примеры показывают, что логарифм выражает именно показатель степени, а не просто новое число в записи.

Во всех примерах логарифм восстанавливает степень, в которую нужно возвести основание. Это удобно для быстрой проверки вычислений и понимания структуры числа.

Выражение	Значение	Смысл
$\log_{10}100$	2	$10^2=100$
$\log_28$	3	$2^3=8$
$\log_31$	0	$3^0=1$
$\log_5(1/25)$	-2	$5^{-2}=1/25$

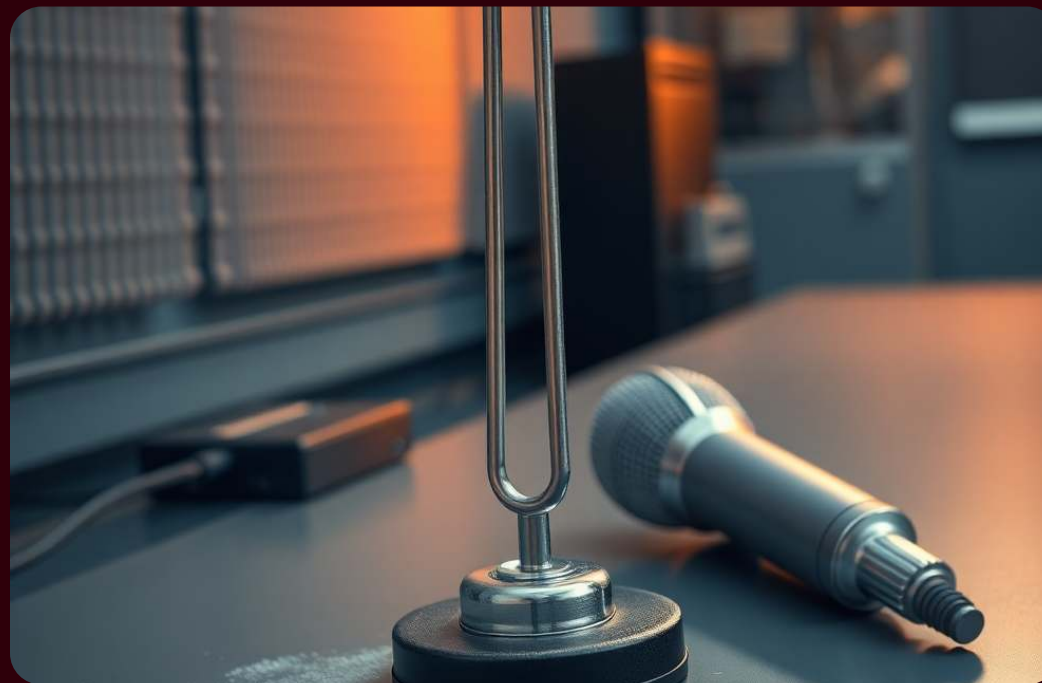
Стандартные тождества логарифмов

Логарифмы в измерениях и реальной жизни



Кислотность и pH

Шкала pH помогает сравнивать кислотность растворов не по прямой концентрации, а через логарифмическую зависимость. Благодаря этому очень маленькие и очень большие значения становятся удобными для чтения и анализа на одном числовом поле.



Звук и децибелы

Уровень звука измеряют в децибелах, потому что человеческое восприятие реагирует не на абсолютную разницу, а на отношение интенсивностей. Логарифмическая запись позволяет компактно описывать слабые и очень сильные сигналы.



Графики больших масштабов

В науке логарифмическая шкала часто используется для данных, которые меняются на несколько порядков. На таких графиках легче заметить закономерность, когда обычная шкала «сжимает» мелкие значения и перегружает крупные.

Логарифмическая шкала и равные интервалы

Логарифмическая запись переводит кратные изменения в равные шаги. Поэтому числа, различающиеся в десять раз, на такой шкале выглядят одинаково удалёнными друг от друга.

На логарифмической оси важнее отношение величин, чем разность между ними. Это делает графики нагляднее, когда диапазон значений очень велик.

Типичные ошибки при работе с логарифмами

01

1. Неверная область

Частая ошибка — подставлять в логарифм ноль или отрицательное число. В действительных числах такие выражения не определены, поэтому всегда нужно сначала проверять знак аргумента.

02

2. Ошибочное основание

Основание логарифма не может быть равно 1 и не может быть отрицательным. Если не учитывать это условие, легко получить запись, которая внешне похожа на формулу, но математически некорректна.

03

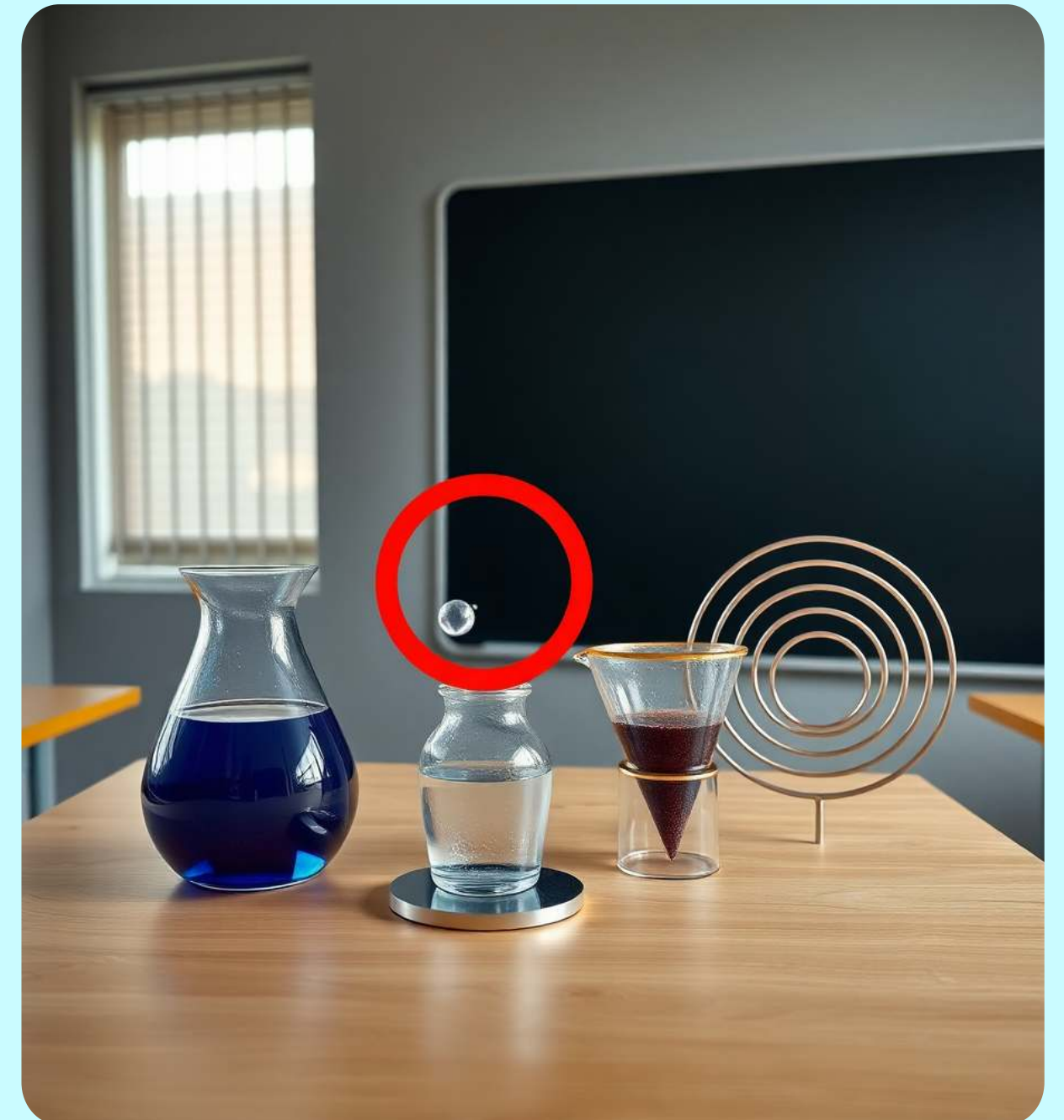
3. Путаница в обозначениях

Выражения $\log_a x$ и $\log_x a$ не одинаковы, хотя связаны между собой. Их нельзя взаимно заменять без проверки условий на оба числа, иначе результат теряет смысл.

04

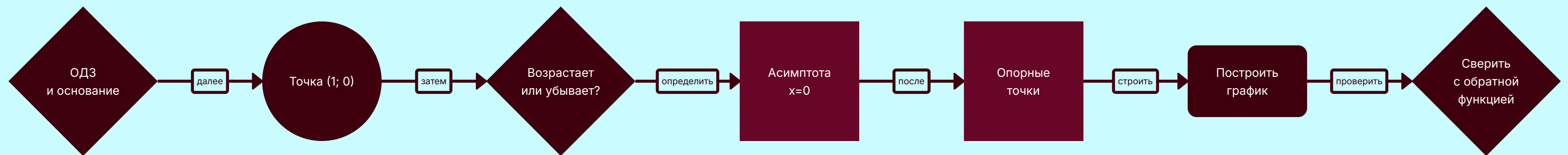
4. Неверное свойство суммы

Логарифм суммы не раскладывается на сумму логарифмов. Формула $\log_a(x+y) = \log_a x + \log_a y$ неверна, потому что свойства логарифмов действуют только для произведения, частного и степени.

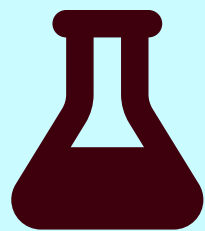


Пошаговый анализ логарифмической функции

Последовательность проверки свойств, опорных точек и формы графика

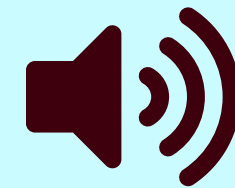


Практическая и теоретическая ценность логарифмов



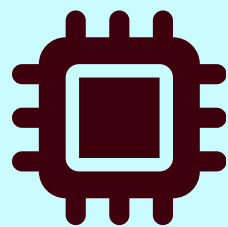
Химия и pH

Логарифмы позволяют выразить кислотность через компактную шкалу pH. Это делает сравнение растворов удобным даже тогда, когда различия в концентрации ионов очень велики.



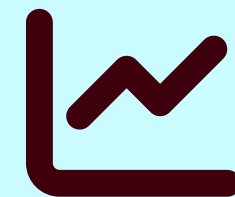
Звук и децибелы

В акустике децибелы помогают измерять интенсивность звука в форме, близкой к восприятию человека. Логарифмическая запись показывает не абсолютное значение, а отношение уровней.



Информатика и данные

В информатике логарифмы используются при оценке алгоритмов, поиске закономерностей и работе с большими массивами информации. Они помогают описывать, как быстро растут вычислительные затраты.



Школьная алгебра

В курсе 11 класса логарифмическая функция связана с уравнениями, неравенствами, графиками и преобразованиями. Умение работать с ней необходимо для уверенного решения экзаменационных задач.

Главное о логарифмической функции

Логарифм — это способ увидеть показатель степени и описать большой диапазон чисел с помощью удобной шкалы. Понимание его свойств делает графики, уравнения и прикладные задачи гораздо понятнее.