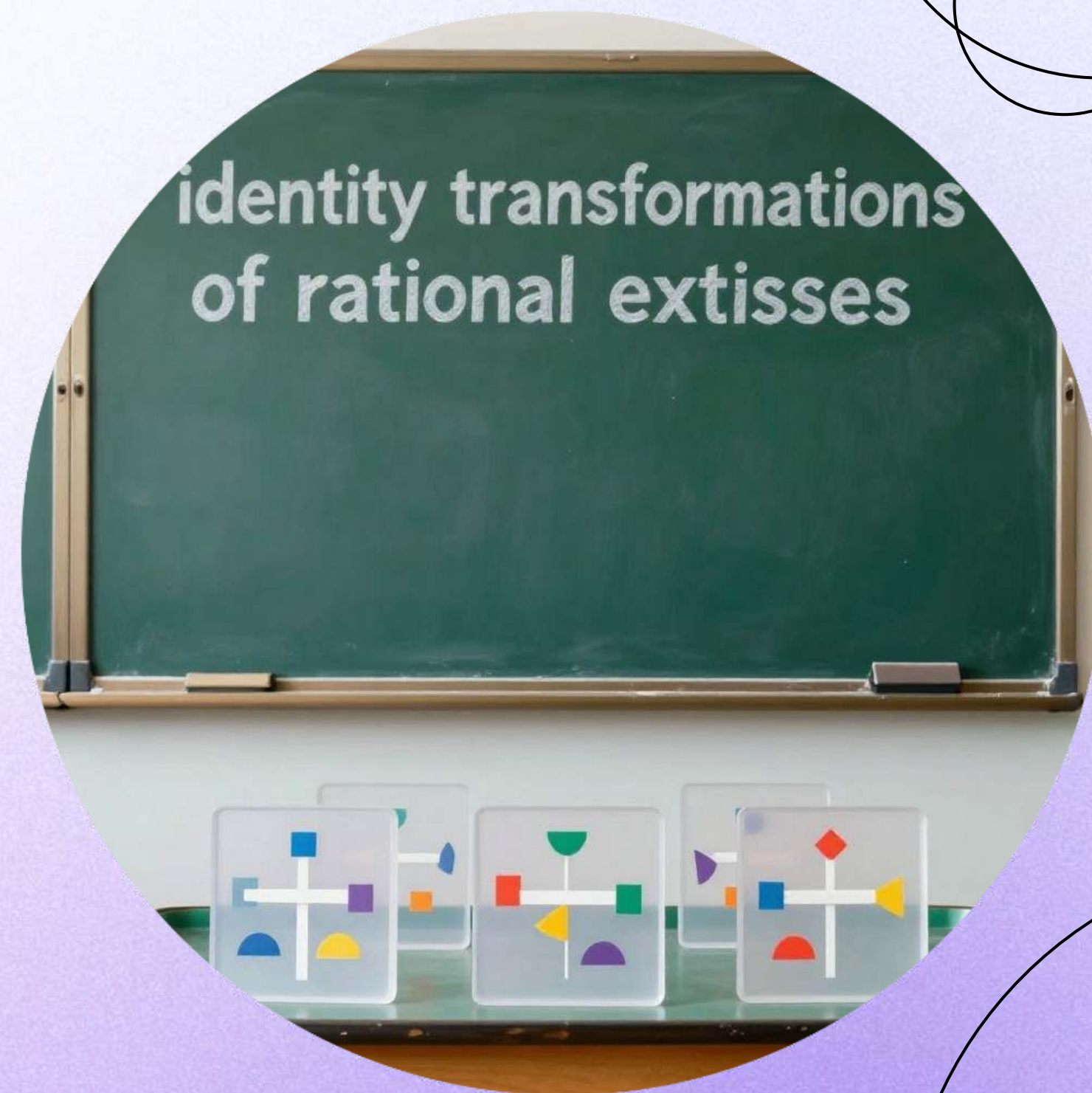


Тождественные преобразования рациональных выражений

Преобразуем дроби с буквами без изменения их значения.



Рациональные выражения в 7 классе

Эта тема опирается на умение работать с многочленами, скобками и формулами сокращённого умножения. Здесь важно научиться менять вид дробного выражения, сохраняя его значение для всех допустимых значений переменной.



Что называют тождественным преобразованием

1

Меняется форма

Тождественное преобразование изменяет запись выражения, но не его значение. После такого преобразования получаем более удобный вид для вычислений, упрощения или дальнейших алгебраических действий.

2

Работа со скобками

К тождественным преобразованиям относят раскрытие скобок и приведение подобных слагаемых. Эти действия помогают упростить выражение, не нарушая равенства между исходной и полученной записью.

3

Разложение и сокращение

Если многочлен можно разложить на множители, это используют для сокращения дробей. Такой приём особенно полезен, когда в числителе и знаменателе есть одинаковые множители.

4

Сложные дроби

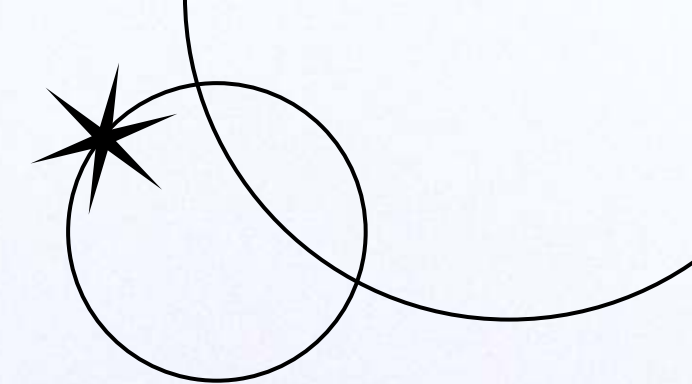
Преобразование сложных дробей тоже относится к этой теме. Здесь одну дробь заменяют более удобной записью, обычно через умножение на обратную дробь, сохраняя значение выражения.

5

Тождественно равные выражения

Если два выражения совпадают по значению при всех допустимых значениях переменных, их называют тождественно равными. Это означает, что после преобразований смысл выражения не меняется.

Область допустимых значений выражения



Смысл выражения

ОДЗ показывает, при каких значениях переменной выражение имеет смысл. Для дробей особенно важно проверить знаменатель: он не должен обращаться в ноль, иначе значение не определено.



Запрещённые значения

Все значения, при которых знаменатель равен нулю, исключают из ОДЗ. Например, в дроби $(x+1)/(x-3)$ значение $x=3$ недопустимо, потому что знаменатель станет нулевым.



Проверка до упрощения

ОДЗ нужно находить до сокращений и других преобразований. Если сначала упростить выражение, можно случайно потерять важное ограничение и получить неверный ответ.

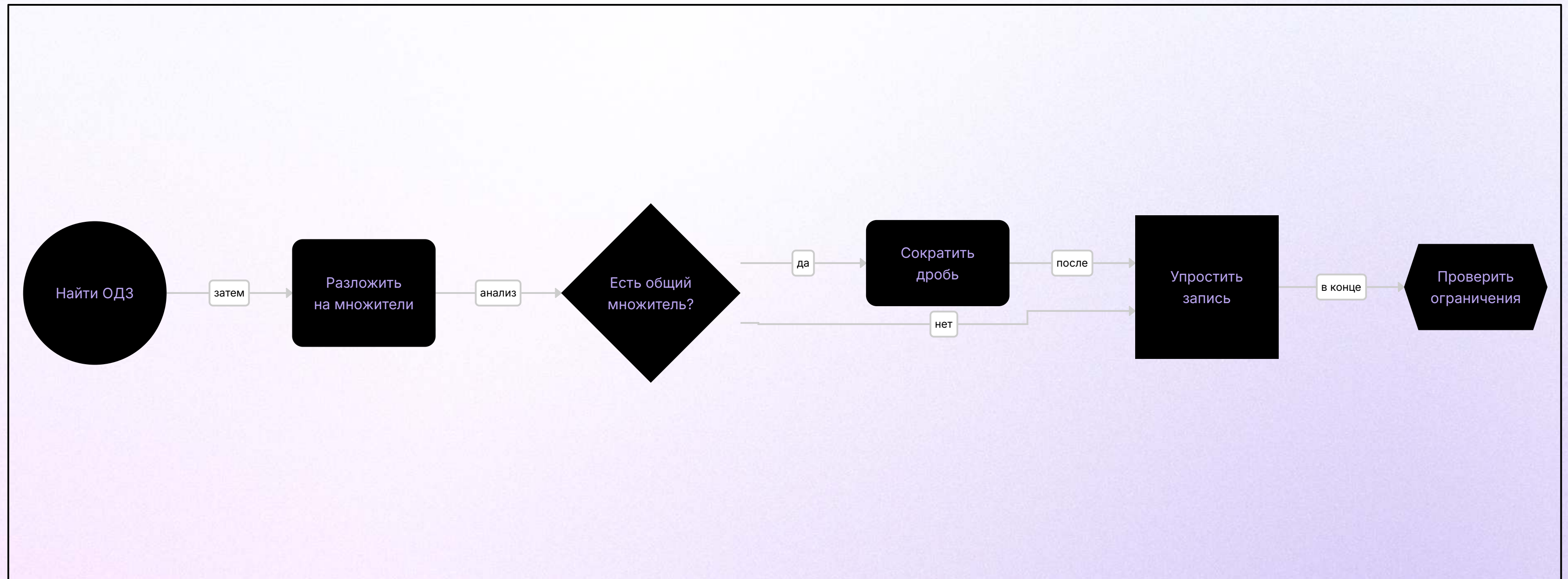


Почему это важно

Проверка области допустимых значений защищает от ошибок в уравнениях и тождественных преобразованиях. Она помогает отличить правильное упрощение от записи, которая уже не равносильна исходной.

Порядок преобразования рационального выражения

Последовательность действий при упрощении и проверке выражения



Сокращение дробей на общий множитель

- **Что сокращают**

Сокращать можно только общий множитель, который полностью входит и в числитель, и в знаменатель. Если множитель записан в виде произведения, его допускается убрать, не меняя значение дроби.

- **Пример сокращения**

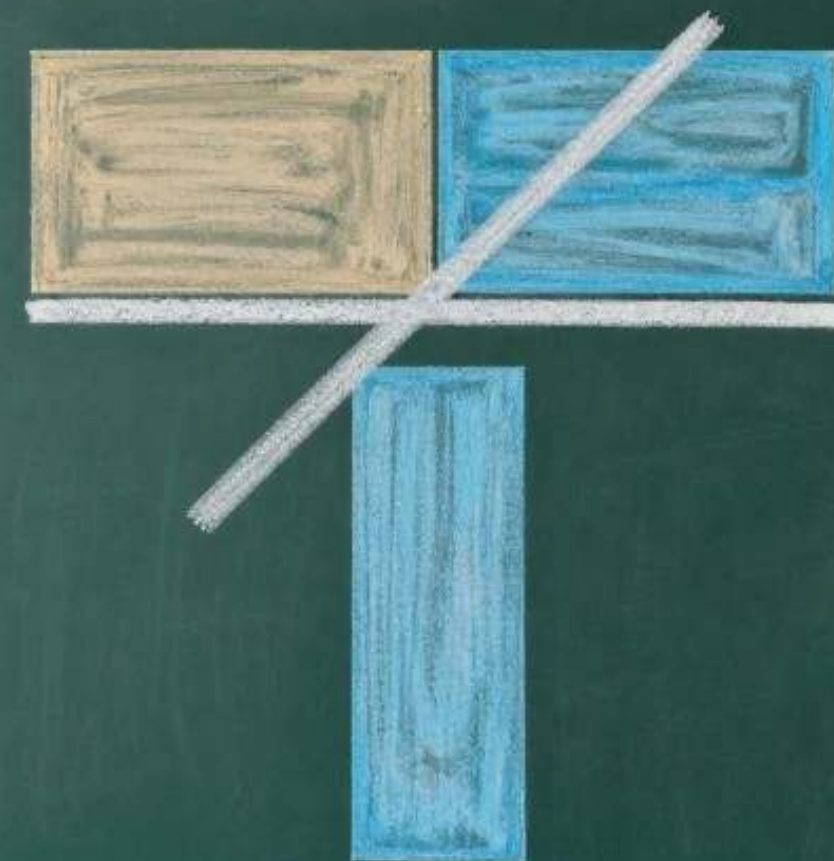
В выражении $(x+3)(x-2)/(x-2)$ общий множитель $x-2$ сокращается, и остаётся $x+3$. Но это верно только при $x \neq 2$, потому что исходный знаменатель не должен быть равен нулю.

- **Где ошибка**

Нельзя сокращать часть суммы или разности, если она не является множителем. Например, выражение $x+2$ нельзя «сократить» по отдельным слагаемым, потому что это не произведение.

- **Когда помогает**

Такой приём особенно полезен после разложения многочлена на множители. Тогда становятся заметны одинаковые части в числителе и знаменателе, и дробь можно записать короче.



Основные тождественные преобразования

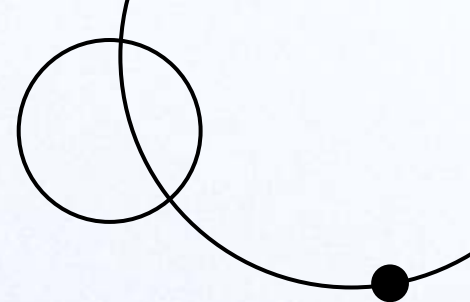


Таблица показывает, какие действия чаще всего используют при упрощении рациональных выражений.

Преобразование	Пример	Результат
Раскрытие скобок	$2(x+3)$	$2x+6$
Вынесение множителя	$x+xy$	$x(1+y)$
Разложение на множители	x^2-9	$(x-3)(x+3)$
Сокращение дроби	$(x-3)/(x-3)$	1
Общий знаменатель	$1/x$ и $1/(x+1)$	общая дробь
Подобные слагаемые	$3x+2x$	$5x$

Во всех случаях меняется лишь форма записи: выражение становится короче, нагляднее и удобнее для вычислений.

Разложение многочлена на множители

1

Зачем это нужно

Разложение на множители помогает увидеть общие части выражения и затем сокращать дроби. Без этого шага многие рациональные выражения остаются длинными и неудобными для работы.

2

Общий множитель

Самый частый приём в 7 классе — вынесение общего множителя за скобки. Сначала находят то, что повторяется в каждом слагаемом, а затем записывают выражение короче.

3

Разность квадратов

Формула $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ часто используется при упрощении. Она позволяет заменить разность квадратов произведением двух множителей, которые потом легко сократить или преобразовать.

4

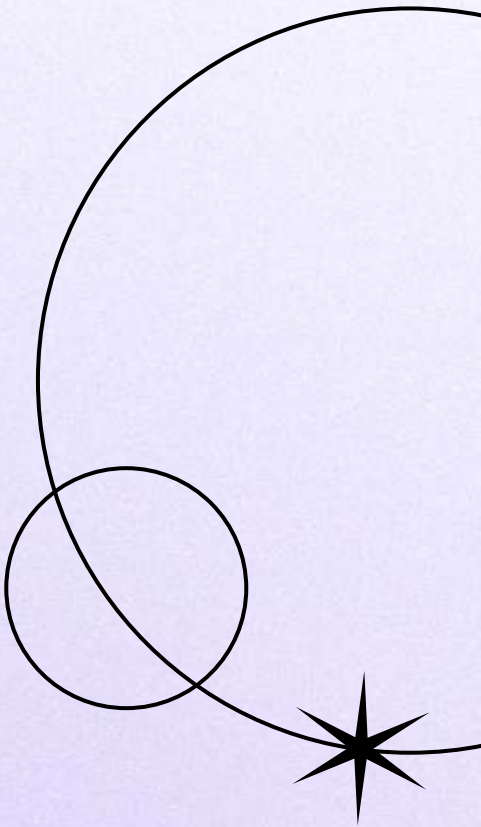
Квадрат суммы и разности

Формулы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ помогают распознавать многочлены, которые можно быстро записать в удобном виде без лишних вычислений.

5

Группировка слагаемых

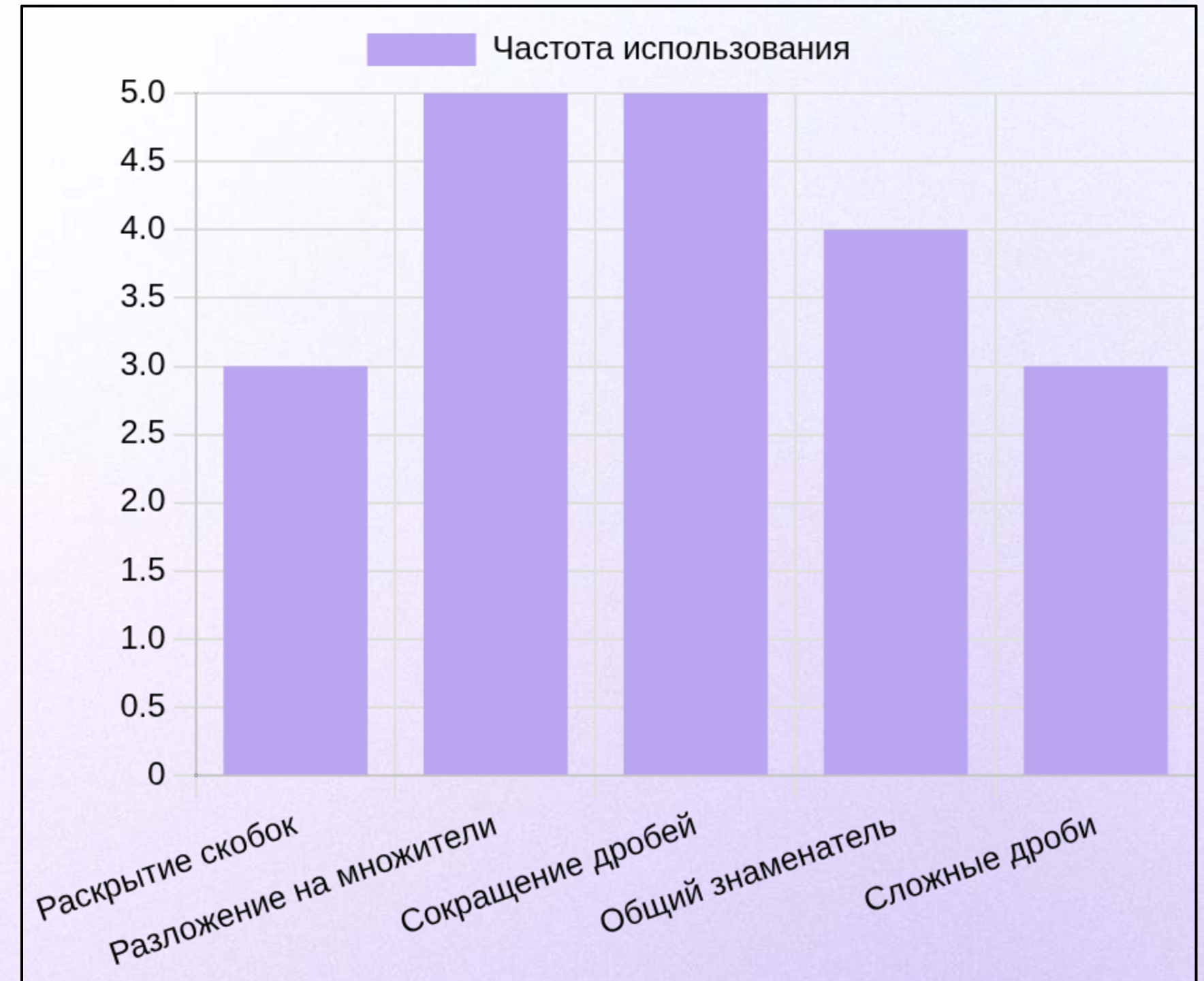
Если общий множитель сразу не виден, применяют группировку. Удобные слагаемые объединяют, затем в каждой группе выносят общий множитель и получают произведение.



Какие действия чаще всего встречаются при упрощении

На уроках алгебры эти приёмы обычно используются не по одному, а в связке: сначала раскладывают выражение, затем сокращают дробь.

Самыми важными оказываются разложение на множители и сокращение дробей: именно они чаще всего дают заметное упрощение.

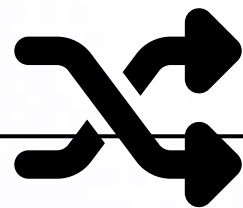


Приведение к общему знаменателю



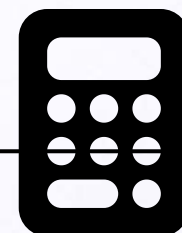
Единая основа

Чтобы сложить или сравнить дроби с буквами, их приводят к одному знаменателю. После этого можно работать только с числителями, не меняя смысл выражения.



Недостающий множитель

Каждую дробь дополняют нужным множителем, чтобы знаменатели совпали. При этом числитель и знаменатель умножают на одно и то же выражение, поэтому значение дроби сохраняется.



Сложение числителей

Когда знаменатель становится общим, числители уже можно складывать или сравнивать. Это делает выражение удобным, особенно если исходные дроби имеют вид $1/x$ и $1/(x+1)$.



Контроль результата

После приведения к общему знаменателю важно проверить, не появились ли новые ограничения и не забыто ли условие существования каждого исходного знаменателя.

Сложная дробь и её смысл

Что это такое

Сложная дробь — это дробь, в которой числитель, знаменатель или обе части содержат другие дроби. По сути, она выражает деление одной дроби на другую.

Как её читать

Запись вида $\frac{1/x}{2/x+1}$ нужно понимать как отношение двух выражений. Такая форма часто появляется при преобразовании алгебраических выражений и требует внимательной работы с ОДЗ.

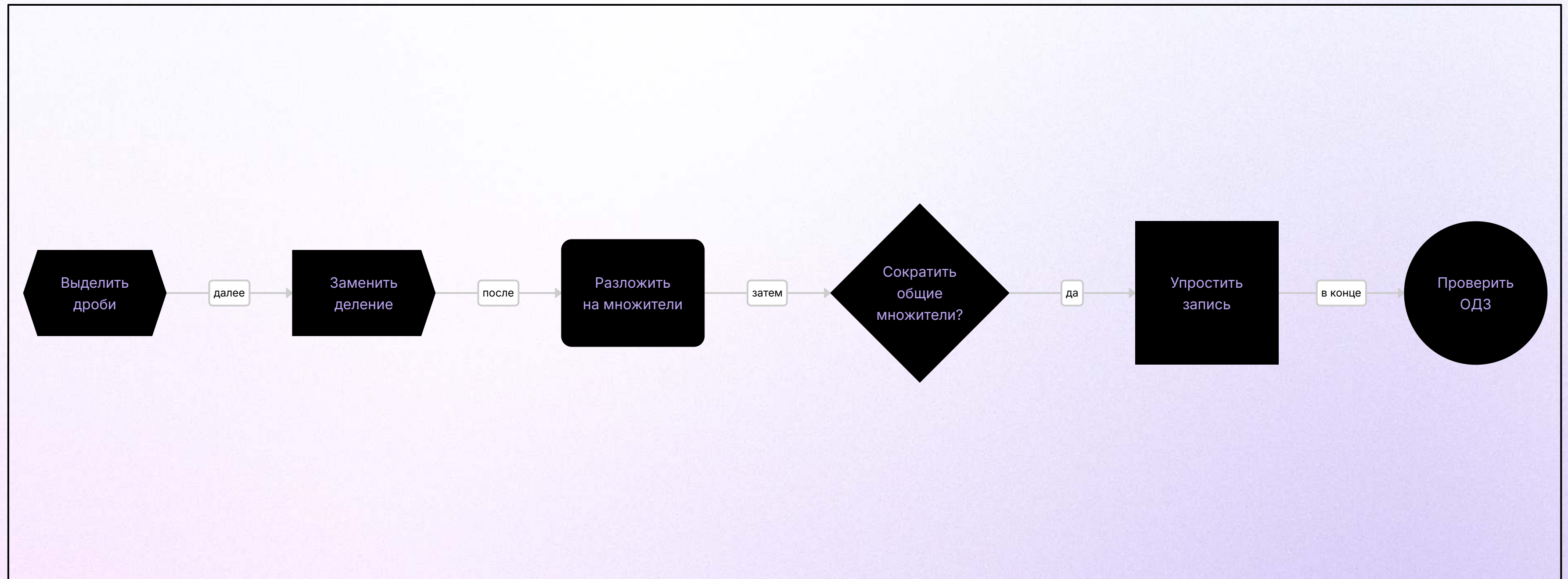
Зачем нужна схема

Удобнее всего представить сложную дробь как деление, которое затем заменяют умножением на обратную дробь. Иллюстрация помогает увидеть переход от исходной записи к более простой форме.



Как преобразуют сложную дробь

Порядок действий при упрощении сложной дроби в школьной алгебре



Типичные ошибки при преобразованиях

- **Сокращение суммы**

Нельзя сокращать слагаемые внутри суммы или разности. Сокращение возможно только для общих множителей, поэтому выражение $x+2$ нельзя уменьшить, если оно не записано как произведение.

- **Забывают ОДЗ**

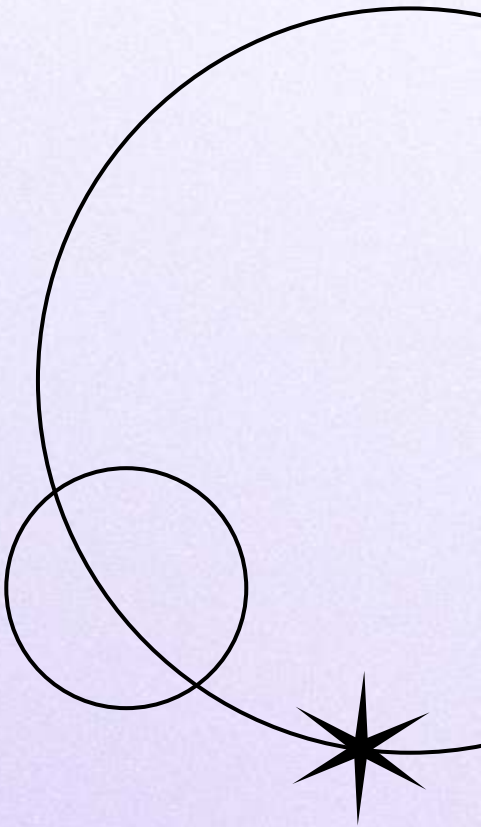
Многие сразу переходят к сокращению и теряют запрещённые значения. Если знаменатель может стать нулём, это значение нужно исключить ещё до любых преобразований.

- **Ошибки со скобками**

При раскрытии скобок часто забывают изменить знак у второго слагаемого или неверно применяют формулы. Даже одна неточность меняет всё выражение и приводит к неверному результату.

- **Преждевременное сокращение**

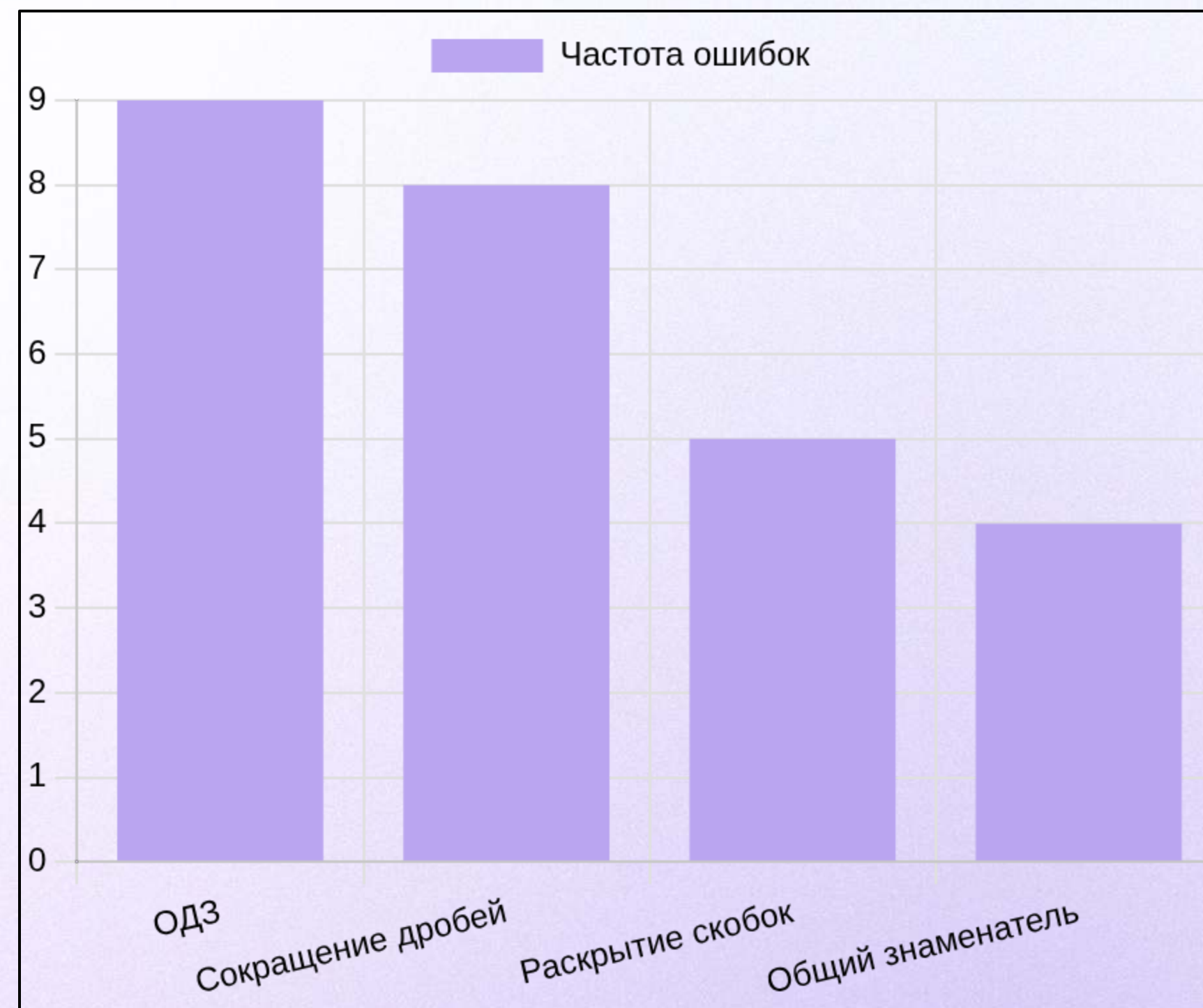
Сначала нужно разложить выражение на множители, а уже потом искать общий множитель. Если пропустить этот шаг, можно не увидеть удобную форму и сделать ошибочный вывод.



Где ученики чаще всего ошибаются

Диаграмма показывает, что труднее всего школьникам даётся проверка знаменателя и правильное сокращение после разложения на множители.

Если сначала внимательно находить ОДЗ, а затем проверять множители, число ошибок заметно снижается.



★ Учебная иллюстративная диаграмма для урока

Проверка тождества

1

Сравнить вид выражений

Сначала левую и правую части приводят к удобному виду. Иногда достаточно раскрыть скобки и сократить дроби, чтобы увидеть одинаковые выражения.

2

Перенести в одну сторону

Если сравнение не получилось сразу, все члены переносят в одну часть. Тогда нужно проверить, обращается ли полученное выражение в ноль для допустимых значений.

3

Упростить до конца

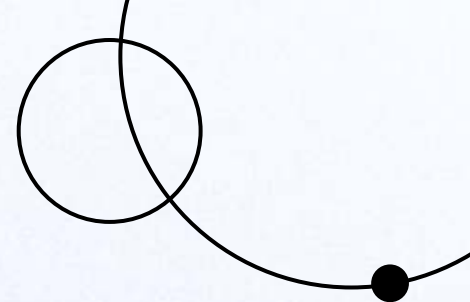
После преобразований должно остаться верное равенство или тождественно нулевое выражение. Это означает, что обе записи совпадают по значению при всех допустимых значениях переменной.

4

Сделать вывод

Если равенство сохраняется для всех допустимых значений, это тождество. Если же появляется хотя бы одно неподходящее значение, исходное равенство тождеством не является.

Формулы, полезные в теме

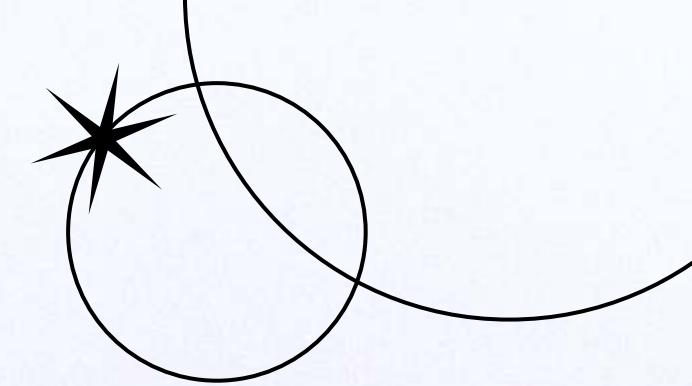


Формула	Вид	Зачем
a^2-b^2	$(a-b)(a+b)$	разность квадратов
$(a+b)^2, (a-b)^2$	полные квадраты	раскрытие скобок
a^3-b^3, a^3+b^3	формулы кубов	поиск множителей
общий множитель	вынос за скобки	сокращение дробей

Эти формулы помогают быстро раскладывать выражения на множители и упрощать дроби.

Чаще всего в теме используются разность квадратов, квадраты суммы и разности, а также вынесение общего множителя.

Рациональные выражения в задачах из жизни



Путь и время

Если нужно узнать скорость, используют формулу $v=s/t$. Здесь расстояние делят на время, поэтому значение меняется при изменении любой из величин. Такие записи удобно упрощать, когда известны числовые данные или нужно сравнить два случая.



Плотность вещества

Плотность находят по формуле $\rho=m/V$: масса делится на объём. Чем больше объём при той же массе, тем меньше плотность. Эта зависимость хорошо показывает, как дробь помогает описывать реальные величины.



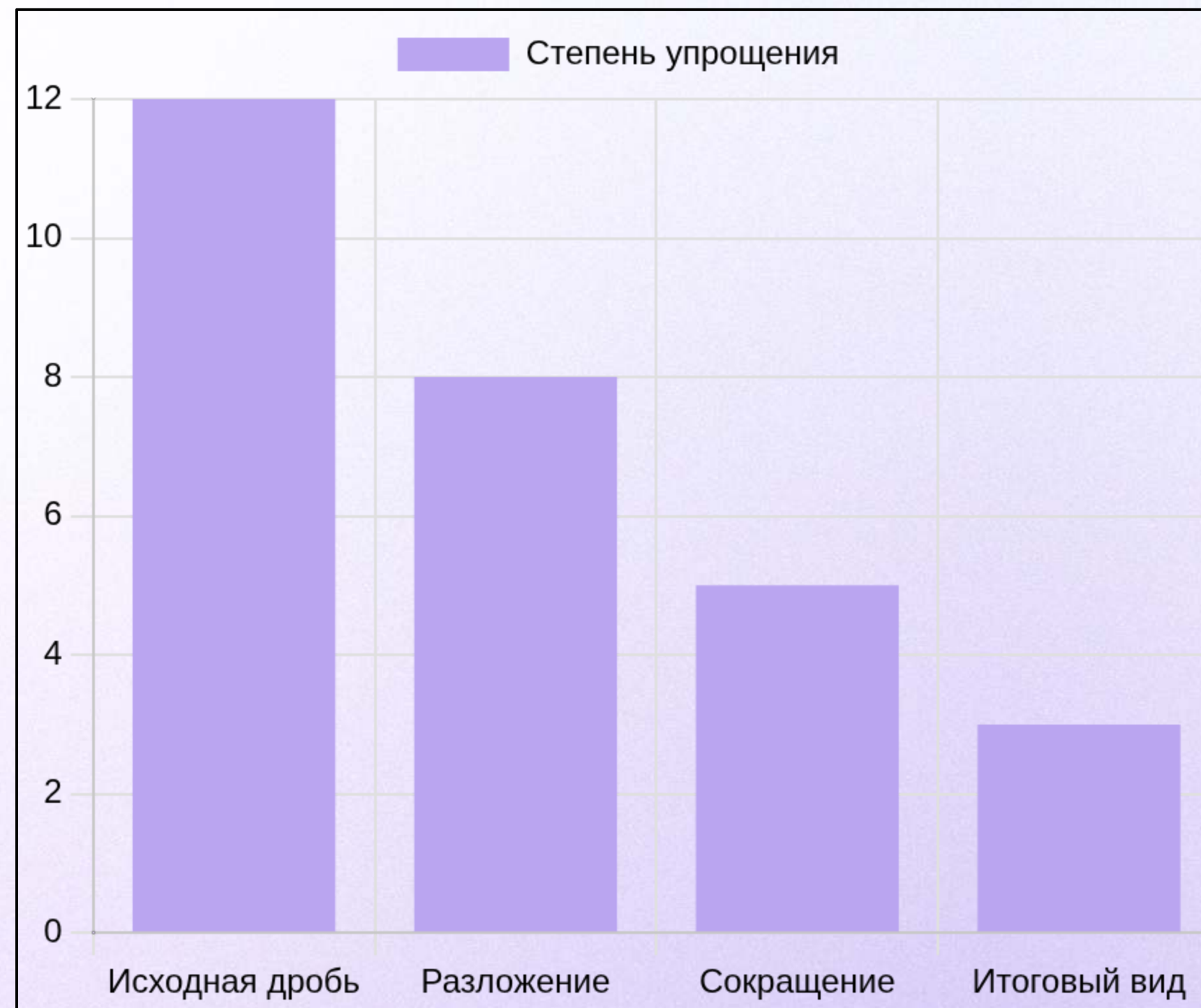
Работа и производительность

В задачах на работу часто встречается выражение, связанное с количеством выполненной работы и временем. Если одна бригада работает быстрее другой, это можно увидеть через дроби и сравнить их после преобразования.

Как меняется выражение после преобразования

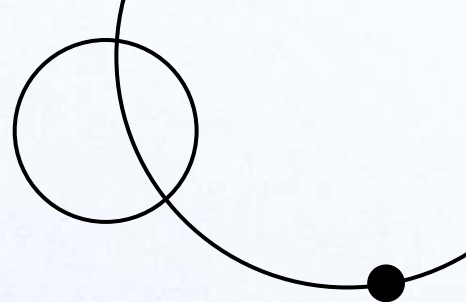
На схеме видно, как длинная запись постепенно превращается в короткую и удобную для вычислений форму.

Чем лучше выполнено разложение на множители, тем короче итоговая запись и тем проще дальнейшие действия.



★ Учебная иллюстративная схема для урока

Правила, которые помогают избежать ошибок



Эти правила помогают безопасно преобразовывать рациональные выражения.

Правило	Почему важно	Пример
Не делить на 0	выражение не имеет смысла	$x \neq 3$
Находить ОДЗ	сохраняет допустимые значения	$x - 2 \neq 0$
Сокращать множители	нельзя сокращать суммы	$(x - 2)$
Проверять ответ	замечает ошибку	подстановка

Главное — сначала проверить область допустимых значений, а затем выполнять сокращение и сверку результата.

Главный вывод по теме

Тождественные преобразования помогают сделать рациональные выражения короче, понятнее и удобнее для вычислений. Если помнить про ОДЗ, множители и проверку результата, ошибки становятся редкими, а решения — аккуратными.