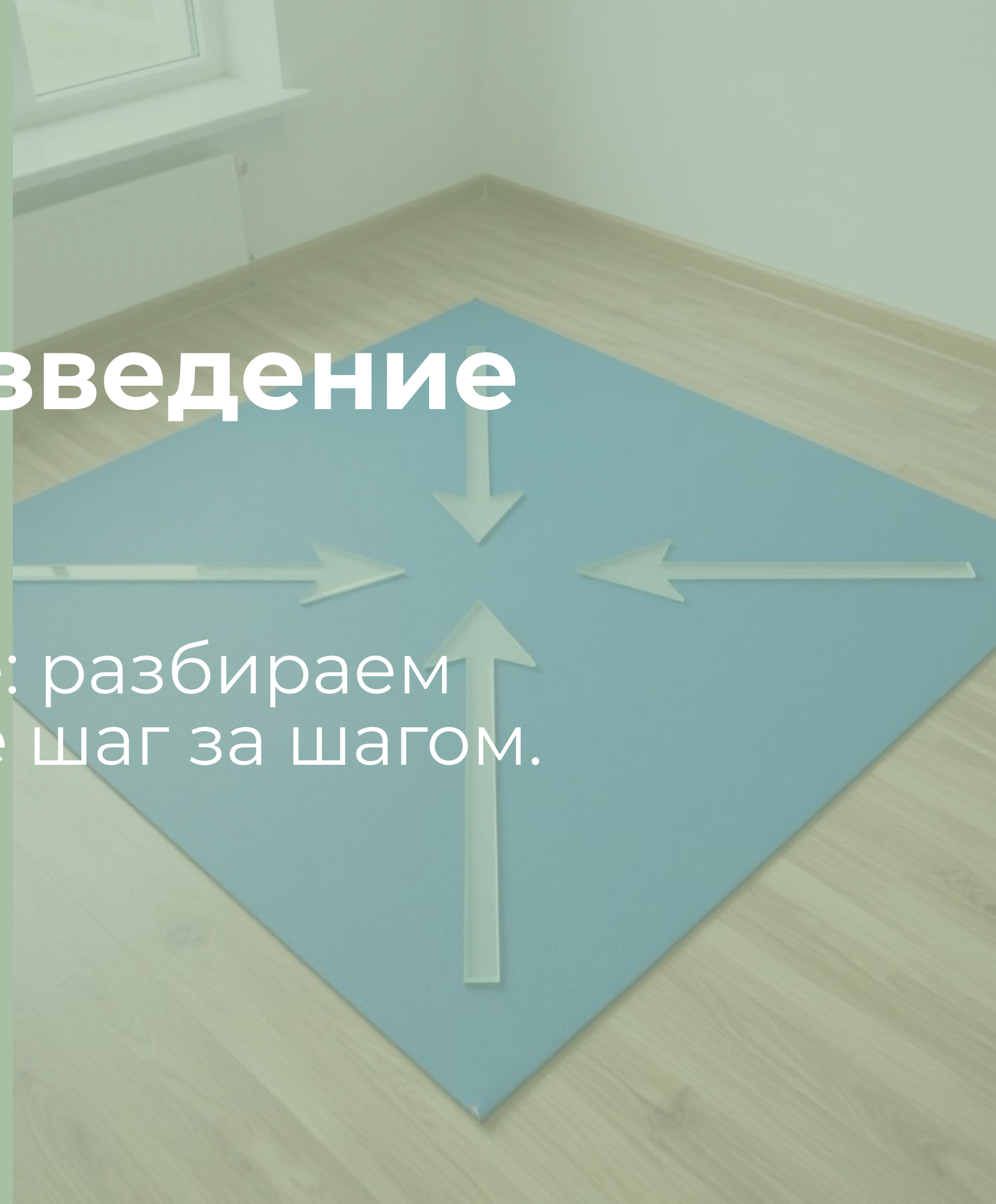


Скалярное произведение векторов

Число, угол, направление: разбираем скалярное произведение шаг за шагом.





Где появляется скалярное произведение

Скалярное произведение встречается в геометрии, координатах и физике. Здесь важно понять три вещи: это число, оно связано с углом и удобно считается по координатам.

Зачем измерять согласованность направлений

■ Мера согласованности

Скалярное произведение даёт численную оценку того, насколько два вектора направлены похоже. Оно позволяет сравнивать не только длины, но и взаимное расположение направлений.

■ Подсказка про угол

По знаку результата можно понять, острый угол между векторами или тупой, а также заметить перпендикулярность. Это особенно полезно в геометрических задачах.

■ Удобный расчёт

Когда векторы задаются координатами, вычисление становится простым и точным. Достаточно перемножить соответствующие координаты и сложить результаты.

Коротко о векторах и координатах

01 Что описывает вектор

Вектор задаёт направление и длину, поэтому его удобно изображать стрелкой. Для работы со скалярным произведением важно помнить, что у вектора есть обе эти характеристики.

02 Как записывают координаты

В координатах вектор записывают как пару или тройку чисел: $(x; y)$ или $(x; y; z)$. По ним можно быстро находить длину и сравнивать векторы.

03 Особый случай

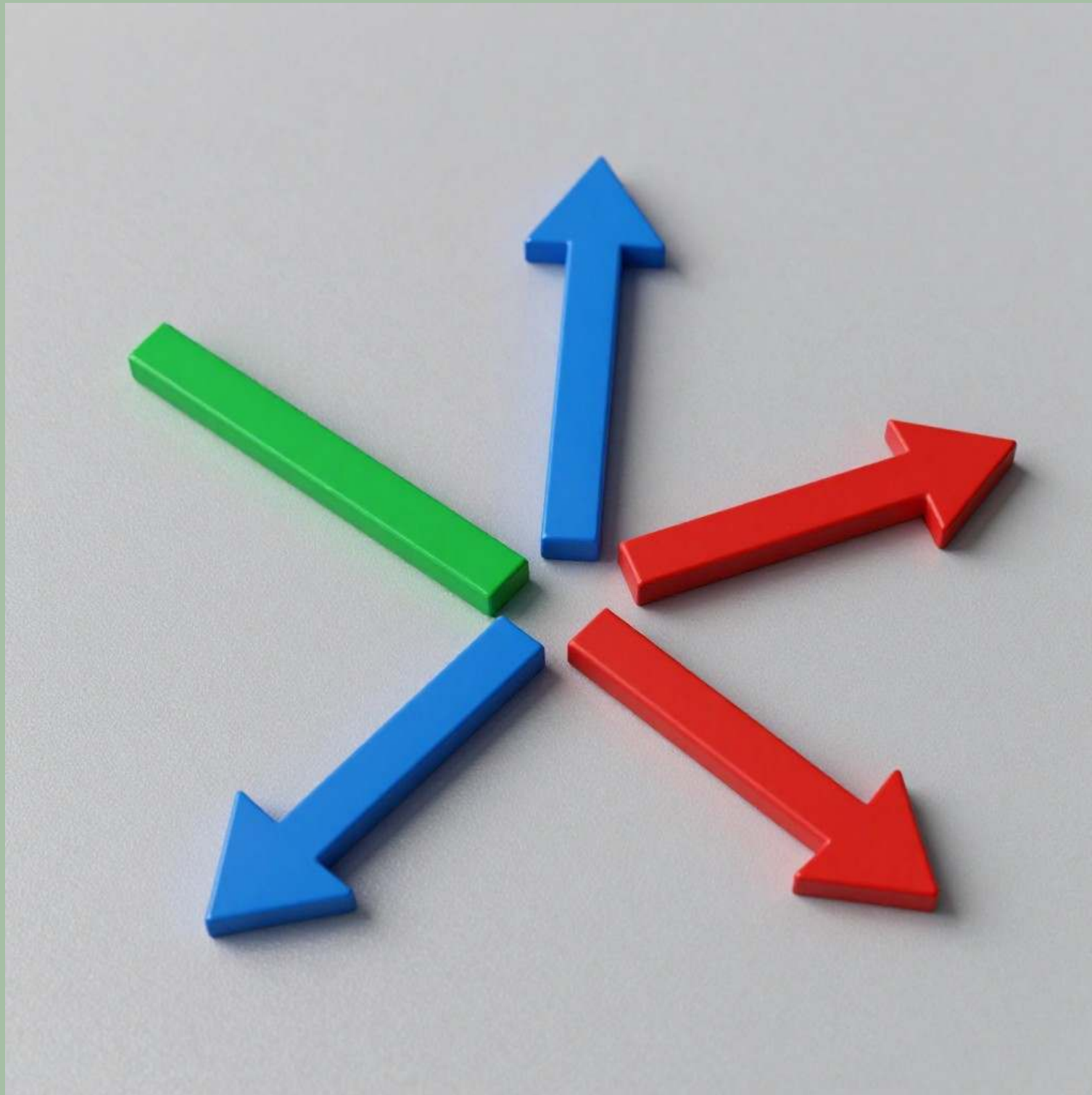
Нулевой вектор не имеет направления, поэтому с ним нужно быть осторожным. Он полезен как особый случай, но угол с ним не рассматривают.

0

это самый важный
признак взаимной
перпендикулярности
ненулевых векторов

Когда скалярное произведение
равно нулю, векторы
перпендикулярны и образуют
прямой угол.

Геометрический смысл: знак и величина



Острый угол

При остром угле скалярное произведение положительно. Чем меньше угол между векторами, тем больше его значение при одинаковых длинах, потому что направления согласованы сильнее.

Прямой угол

При прямом угле результат равен нулю. Это означает, что векторы не имеют общего направления и образуют точную перпендикулярность.

Тупой угол

При тупом угле скалярное произведение отрицательно. Векторы в этом случае в целом направлены в разные стороны, поэтому их согласованность уменьшается.

Формула через длины и угол

01 Основная формула

Формула $a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$ связывает число, длины и угол. Она показывает, что скалярное произведение зависит не только от размеров векторов, но и от их направления.

02 Роль косинуса

Косинус угла показывает, какая часть одного направления совпадает с другим. Если $\cos \varphi$ близок к 1, векторы почти сонаправлены; если к 0, они перпендикулярны.

03 Как использовать

Эта запись особенно полезна в задачах на угол. Зная длины и скалярное произведение, можно найти $\cos \varphi$ и затем определить сам угол.





Три важные ситуации

Три случая помогают быстро понять результат скалярного произведения без лишних вычислений.

Знак результата сразу подсказывает взаимное расположение векторов.

Ситуация	Результат	Смысл
Одинаковые	Положит.	Направления совпадают
Противоположные	Отрицат.	Направления расходятся
Перпендикулярные	0	Прямой угол

Геометрический смысл скалярного произведения

Формула через координаты

Пошаговый расчёт для векторов на плоскости и в пространстве



11

получается в примере
с векторами $(2; 3)$ и $(4; 1)$

Если результат положительный,
угол между векторами острый,
значит направления частично
совпадают.

-1

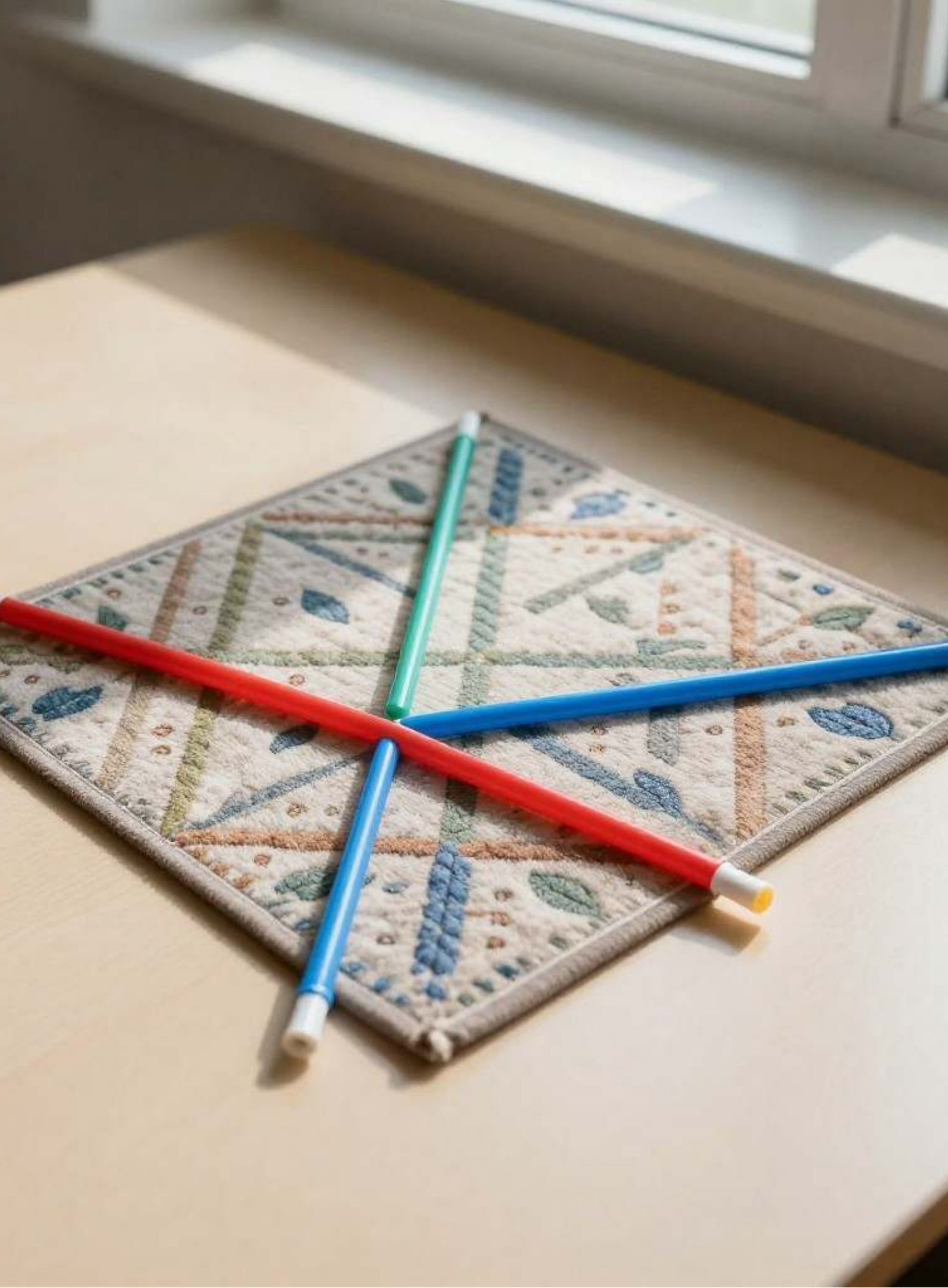
получается, когда угол
между векторами тупой.

Отрицательный результат
показывает, что векторы
направлены в целом в разные
стороны.

3

ОСНОВНЫХ СВОЙСТВА
ДЕЛАЮТ ВЫЧИСЛЕНИЯ
УДОБНЕЕ.

Три свойства помогают преобразовывать выражения и считать быстрее, не расписывая каждое действие отдельно.



Ноль означает перпендикулярность

■ Прямой угол

Если скалярное произведение равно нулю, а оба вектора ненулевые, значит между ними прямой угол. Это главный признак перпендикулярности, которым часто пользуются в геометрических задачах.

■ Быстрая проверка

Проверка через ноль особенно удобна в координатах: достаточно подставить числа в формулу $x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2$ и получить ответ. Так можно найти неизвестную координату или быстро убедиться в перпендикулярности.

Две задачи на перпендикулярность

01 Найти неизвестное

Для векторов $(2; k)$ и $(3; -4)$ записываем условие перпендикулярности: $2 \cdot 3 + k \cdot (-4) = 0$. Из этого уравнения находят k , которое делает угол между векторами прямым.

02 Проверить ответ

Для векторов $(-1; 5)$ и $(5; 1)$ считаем: $(-1) \cdot 5 + 5 \cdot 1 = -5 + 5 = 0$. Нулевой результат сразу показывает, что векторы перпендикулярны.

Связь со длиной вектора

01 Квадрат длины

Скалярное произведение вектора на самого себя всегда неотрицательно и равно квадрату его длины: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$. Это связывает координаты с привычным понятием расстояния.

02 Длина через корень

Если известны координаты вектора, можно сначала найти $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$, а затем извлечь квадратный корень. Так получают длину без отдельного чертежа и измерений.

03 Удобство в задачах

Эта связь особенно полезна в координатных задачах: вместо поиска длины по рисунку достаточно аккуратно посчитать по координатам. Геометрический смысл при этом сохраняется полностью.

Как по произведению находят длину и отношения

Длина по координатам

Когда известны координаты вектора, его длину удобно находить через произведение самого на себя. Такой способ особенно полезен, если рисунка нет или он дан схематично.

Сравнение направлений

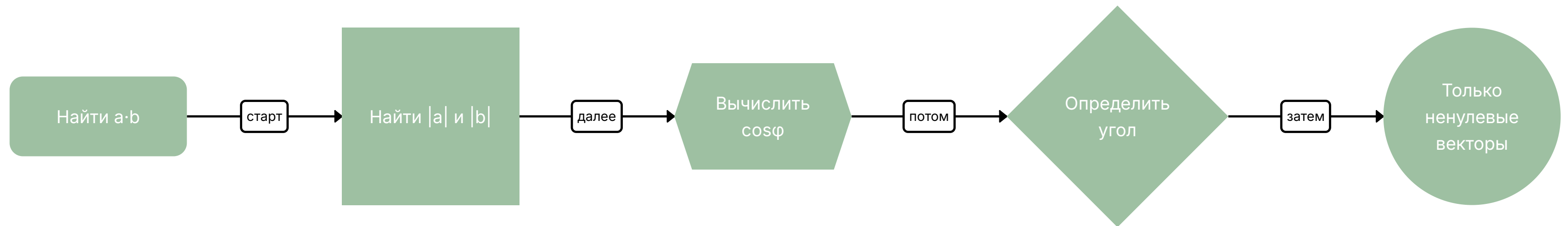
Если у двух векторов одинаковые длины, то большее скалярное произведение означает меньший угол между ними. Значит, направления согласованы сильнее, чем у пары с меньшим значением.

Геометрический вывод

По скалярному произведению можно не только считать, но и делать выводы о взаимном расположении векторов. Это помогает решать задачи быстрее и понимать ответ геометрически.

Как находить угол между векторами

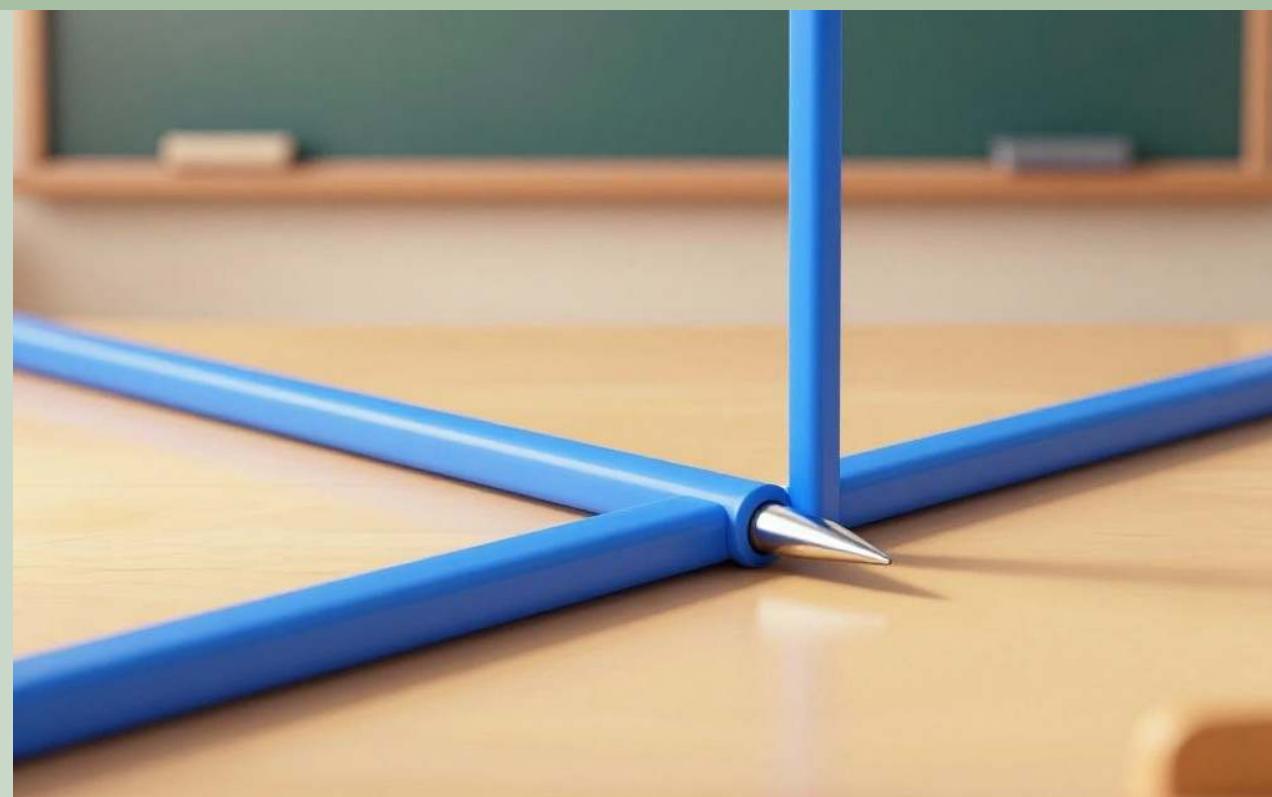
Последовательность действий: от произведения и длин к косинусу и углу.



Пример нахождения угла

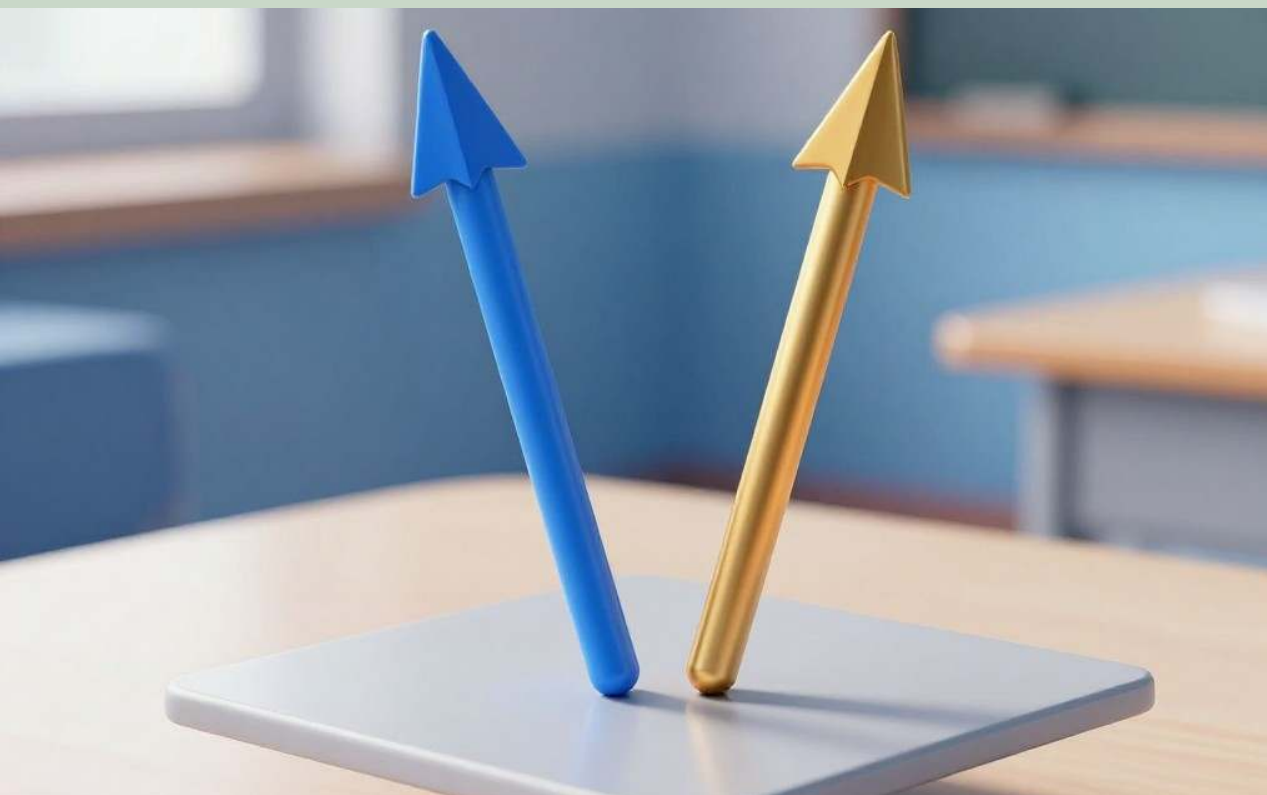
От координат к ответу

В первом шаге векторы уже даны в координатах, поэтому остаётся аккуратно подставить числа. Скалярное произведение сразу даёт значение 1, а длины — 1 и $\sqrt{2}$. После этого угол узнаётся по знакомому значению косинуса.



Формула работает на практике

Такой пример удобен для тренировки: он показывает весь путь от пары координат до геометрического вывода. Формула не просто считает, а переводит числовой результат в понятный угол на плоскости.



Увидеть угол в числах

Когда один вектор лежит вдоль оси, а второй наклонён вверх, формула показывает это без чертежа. Здесь получается $\cos\varphi = 1/\sqrt{2}$, а значит, угол между векторами равен 45° .



Типовые задачи в координатах

Проверка перпендикулярности

Чаще всего нужно проверить, образуют ли два вектора прямой угол. Для этого подставляют координаты в формулу и смотрят, получится ли ноль без лишних преобразований.



Поиск неизвестной координаты

В других задачах неизвестной бывает одна координата. Тогда записывают условие через скалярное произведение и решают простое уравнение, получая нужное значение.

Нахождение угла

Иногда требуется найти угол между векторами по их координатам. Здесь сначала вычисляют скалярное произведение, потом длины, а затем используют формулу для косинуса.

Скалярное произведение делает векторы понятными

Скалярное произведение объединяет длину, угол и направление в одном удобном инструменте. Оно помогает быстро проверять перпендикулярность, находить углы и решать задачи в координатах.