

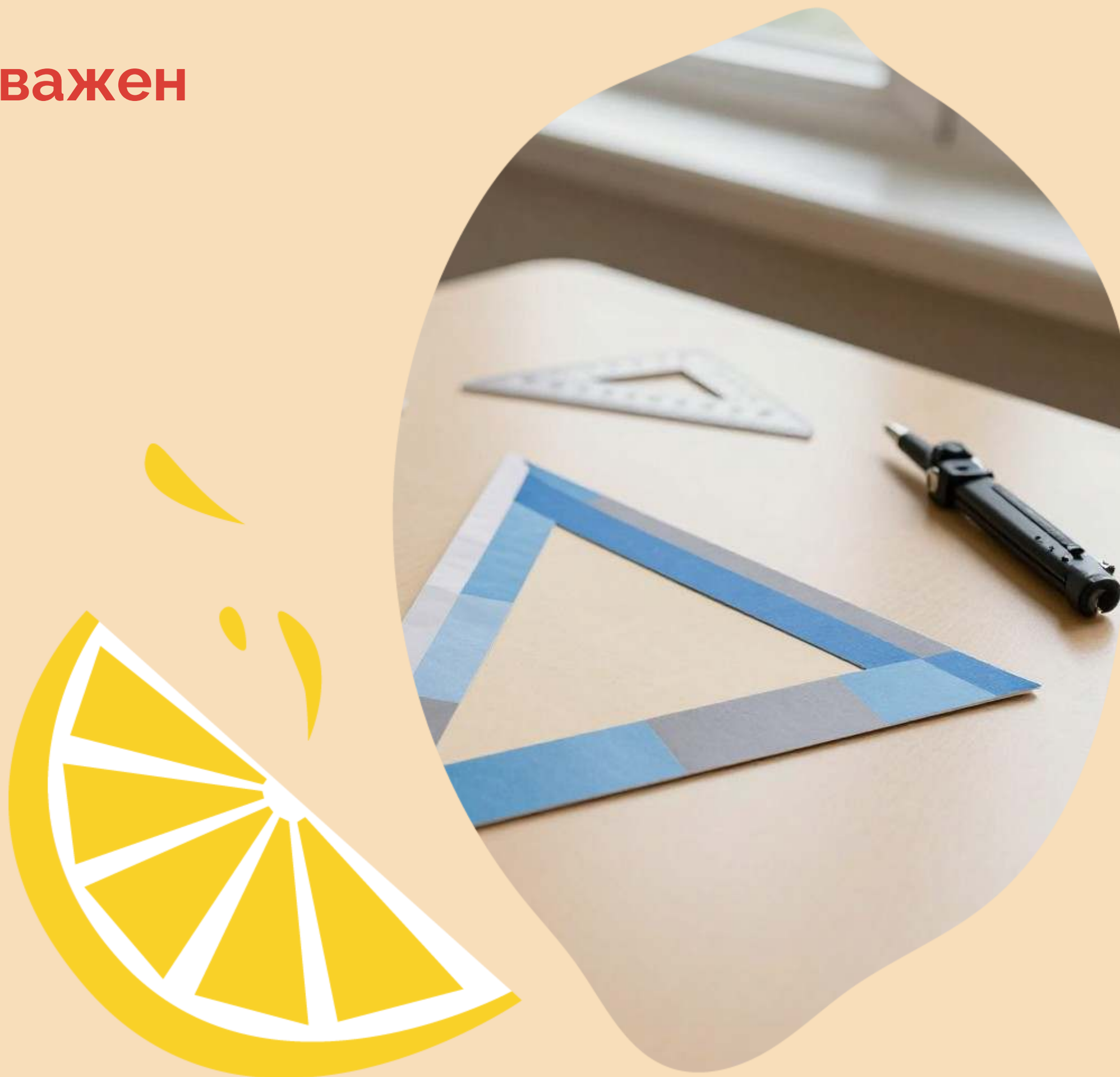
Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника

Две теоремы раскрывают связь сторон и углов и помогают решать треугольники.



Почему треугольник так важен

Треугольник — основа многих задач в геометрии. Чтобы найти неизвестный элемент, важно использовать точные связи между сторонами и углами, а не только рисунок. Для этого служат две основные теоремы.



Где это используется

Измерение расстояний

При измерении моста не всегда можно добраться до всех точек. Если известны часть сторон и углов, недостающую длину удобно вычислить по формуле.

Непрямые измерения

Высоту дерева или здания часто находят без подъёма наверх. Достаточно измерить базовую линию и несколько углов, чтобы восстановить искомую величину.

Карта и навигация

На карте и в навигации треугольники помогают связать направления и расстояния. Это делает расчёты точнее, чем оценка «на глаз».



Обозначения сторон и углов

1

Стороны

Стороны треугольника принято обозначать строчными буквами a , b , c . Такие обозначения короткие и удобные для формул, поэтому их используют почти всегда.

3

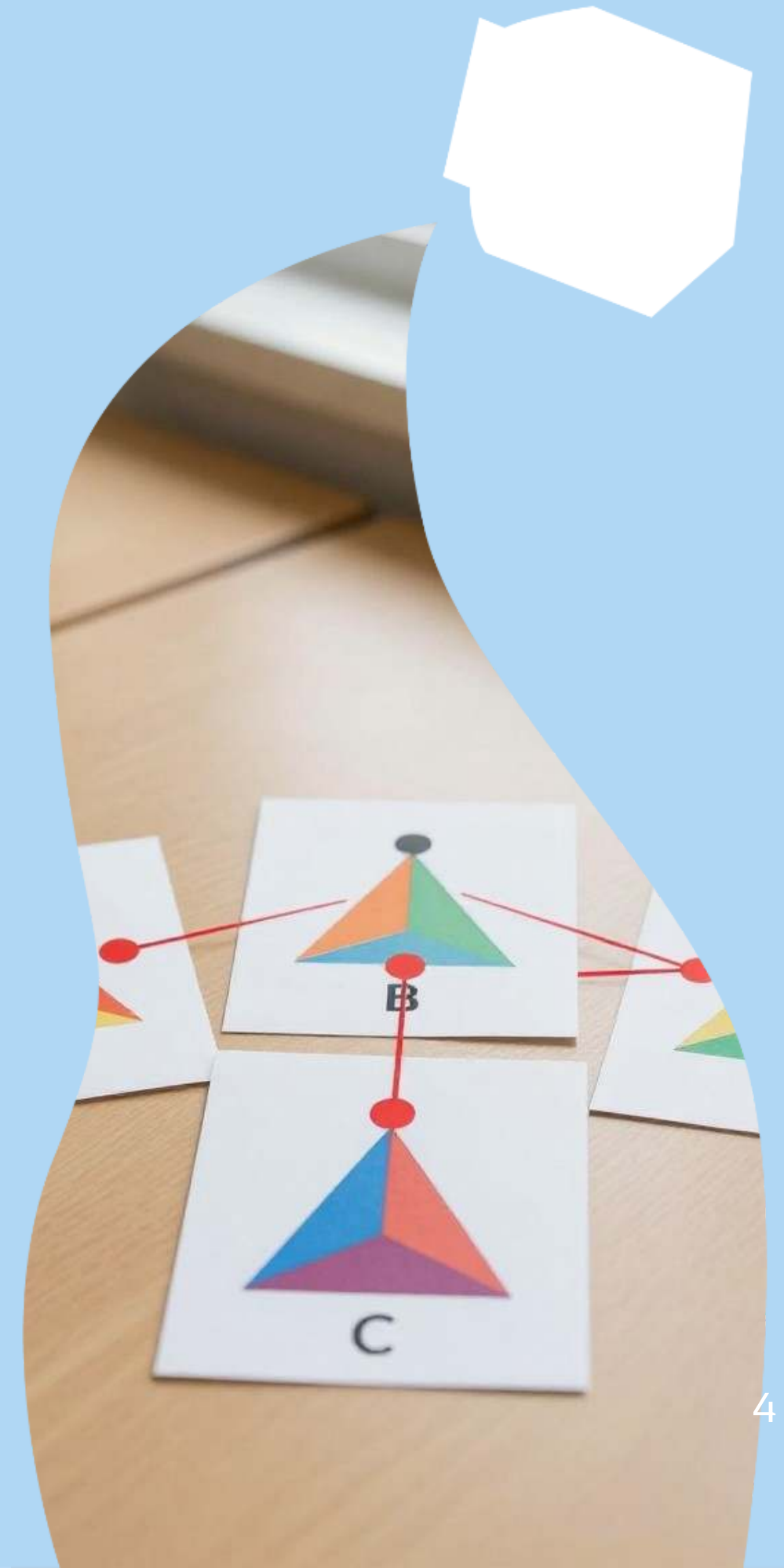
Правило соответствия

Главное правило: сторона a лежит напротив угла A , b — напротив B , c — напротив C . Эту связь нужно сохранять без исключений.

2

Углы

Углы обозначают заглавными буквами A , B , C . Это помогает сразу отличать их от сторон и не путать элементы в записи.



Это основа любого треугольника: без неё
нельзя восстановить неизвестный угол
по двум данным.

Свойство суммы углов треугольника
из школьной геометрии

180°

составляют сумму
внутренних углов
треугольника.

Как подобие помогает в геометрии

Одинаковые углы

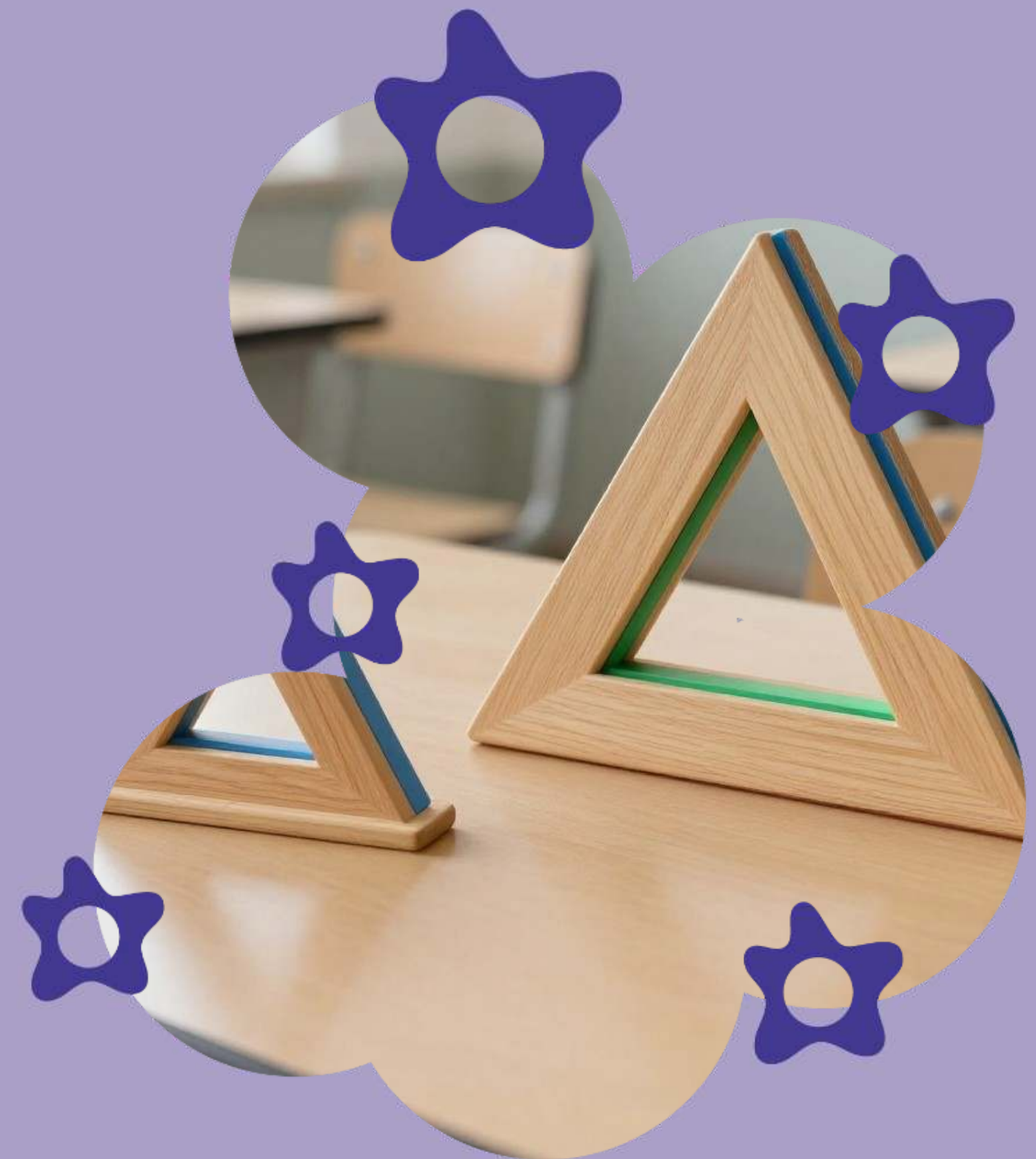
Если два треугольника имеют равные углы, их стороны оказываются пропорциональны. Поэтому отношения между соответствующими сторонами сохраняются и помогают переходить от одного размера к другому.

Связь через пропорции

Теорема синусов использует эту идею внутри одного рисунка. Она связывает стороны и противоположные им углы через одинаковую пропорцию.

Сохранение формы

В подобных треугольниках одна и та же форма повторяется при другом масштабе. Именно поэтому в геометрии появляются устойчивые отношения, а не только отдельные длины.



Идея через площадь треугольника

1

Одна площадь

Площадь треугольника можно найти через сторону и соответствующую высоту. Для одной фигуры эти записи равны между собой, значит их можно сравнивать.

2

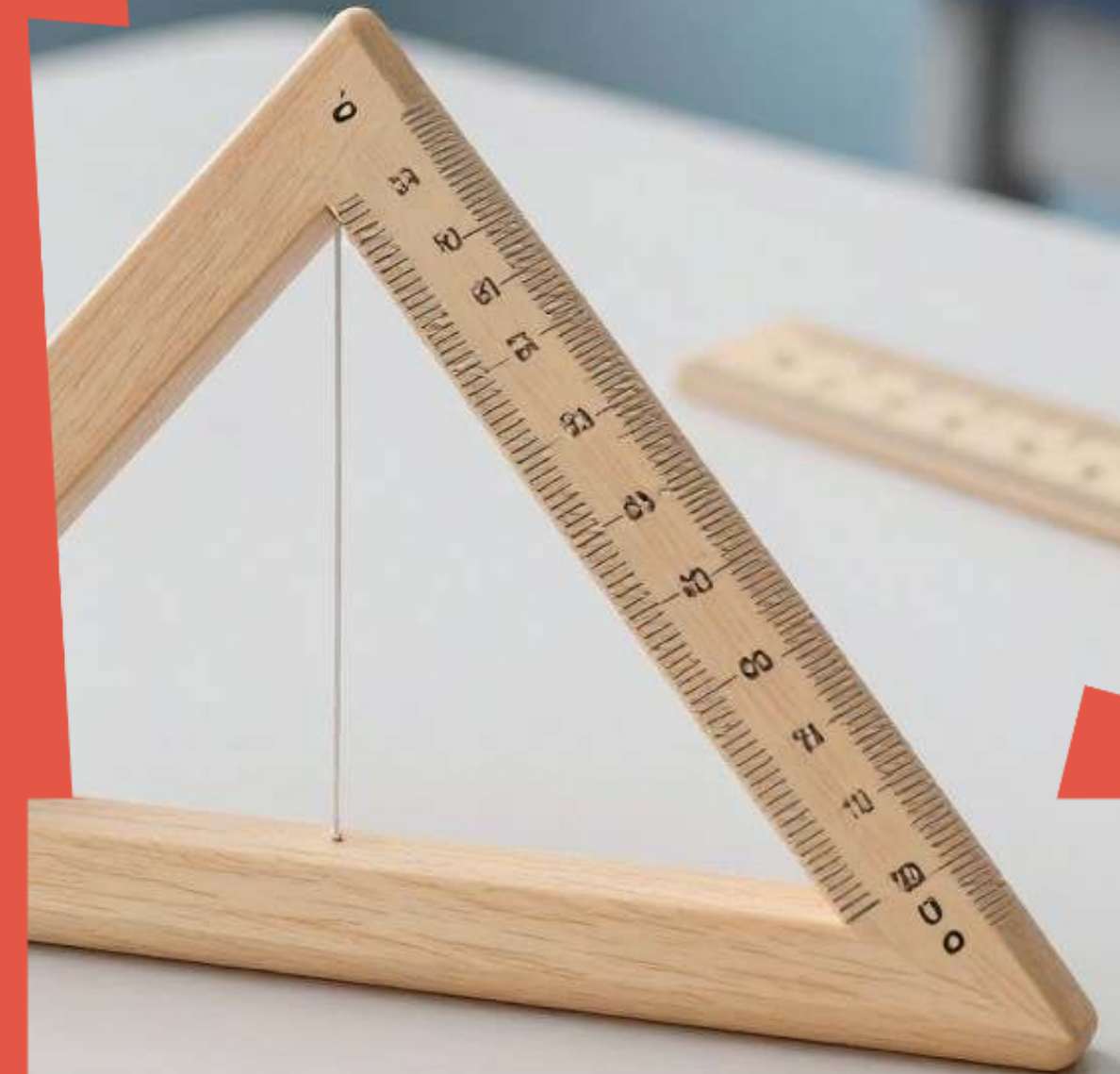
Высота через синус

Если высоту выразить через синус угла, в формуле появляются стороны и углы одновременно. Это подводит к нужным отношениям без лишних шагов.

3

Переход к формуле

Сравнение равных площадей приводит к равенству произведений вида $a \cdot \sin A$ и $b \cdot \sin B$. После деления возникает теорема синусов.



Теорема синусов: формулировка

Главная формула

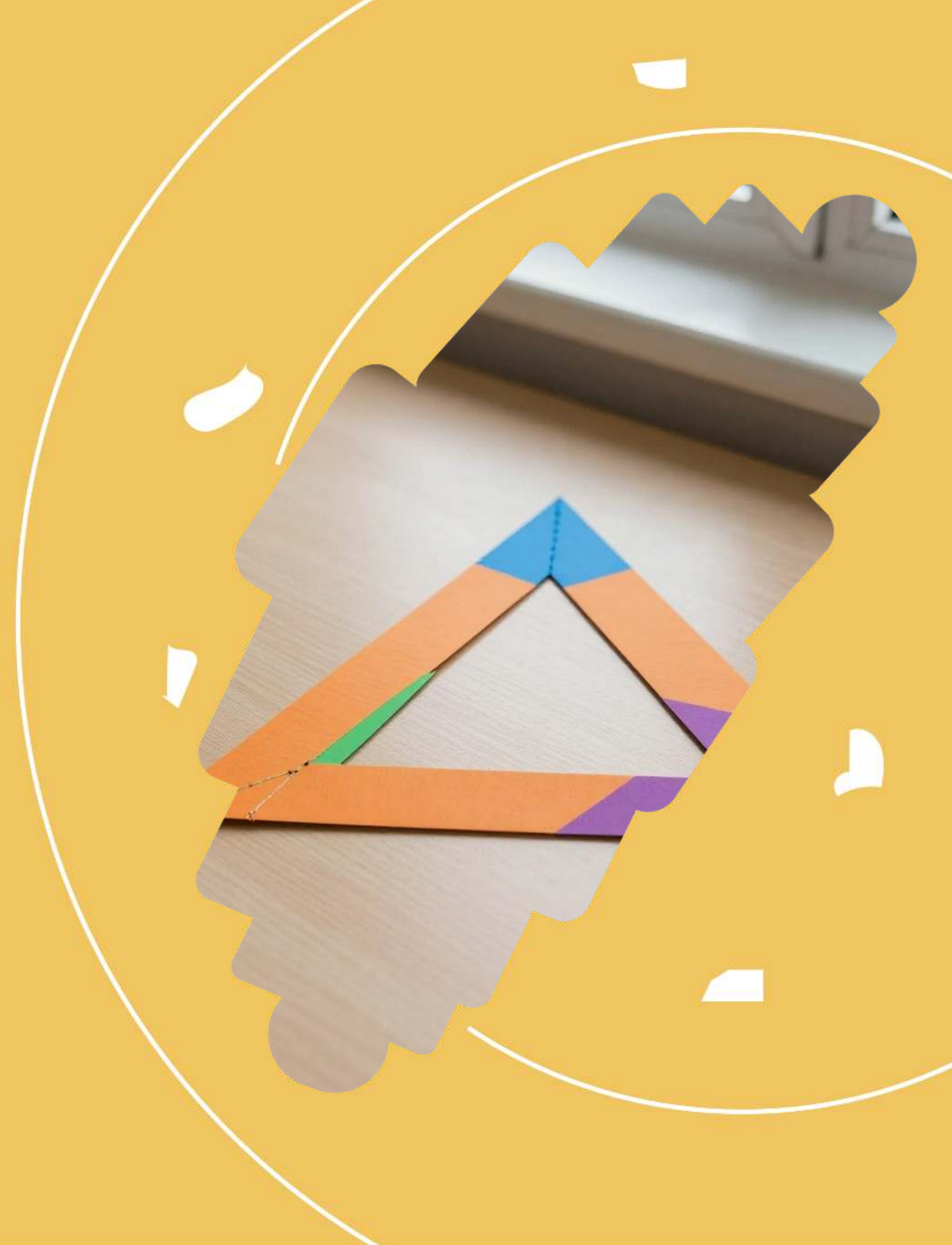
Для любого треугольника отношение стороны к синусу противолежащего угла остаётся одинаковым. Это и есть главная запись теоремы синусов.

Правильные пары

В дробях нельзя смешивать соседние элементы. Сначала находят пару «сторона — её угол», а потом подставляют её в равенство.

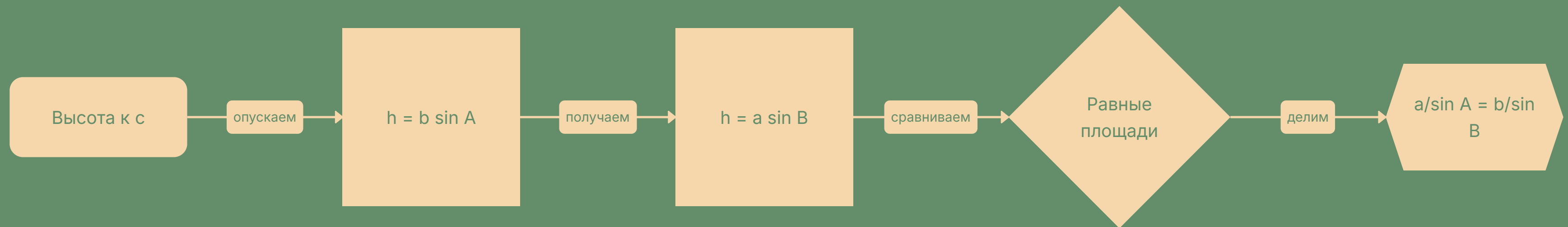
Когда применять

Теорема особенно полезна, когда известны одна сторона и два угла или когда дана пара сторона–угол напротив. Тогда остальные элементы находятся по пропорции.



Как выводится теорема синусов

Последовательность основана на выражении площади одного треугольника через одну и ту же высоту.



Шпаргалка по теореме синусов

В таблице удобно видеть, какие элементы нужно сопоставлять в первой теореме синусов.

В дроби должны стоять только противолежащие элементы; это главный признак правильного применения теоремы.

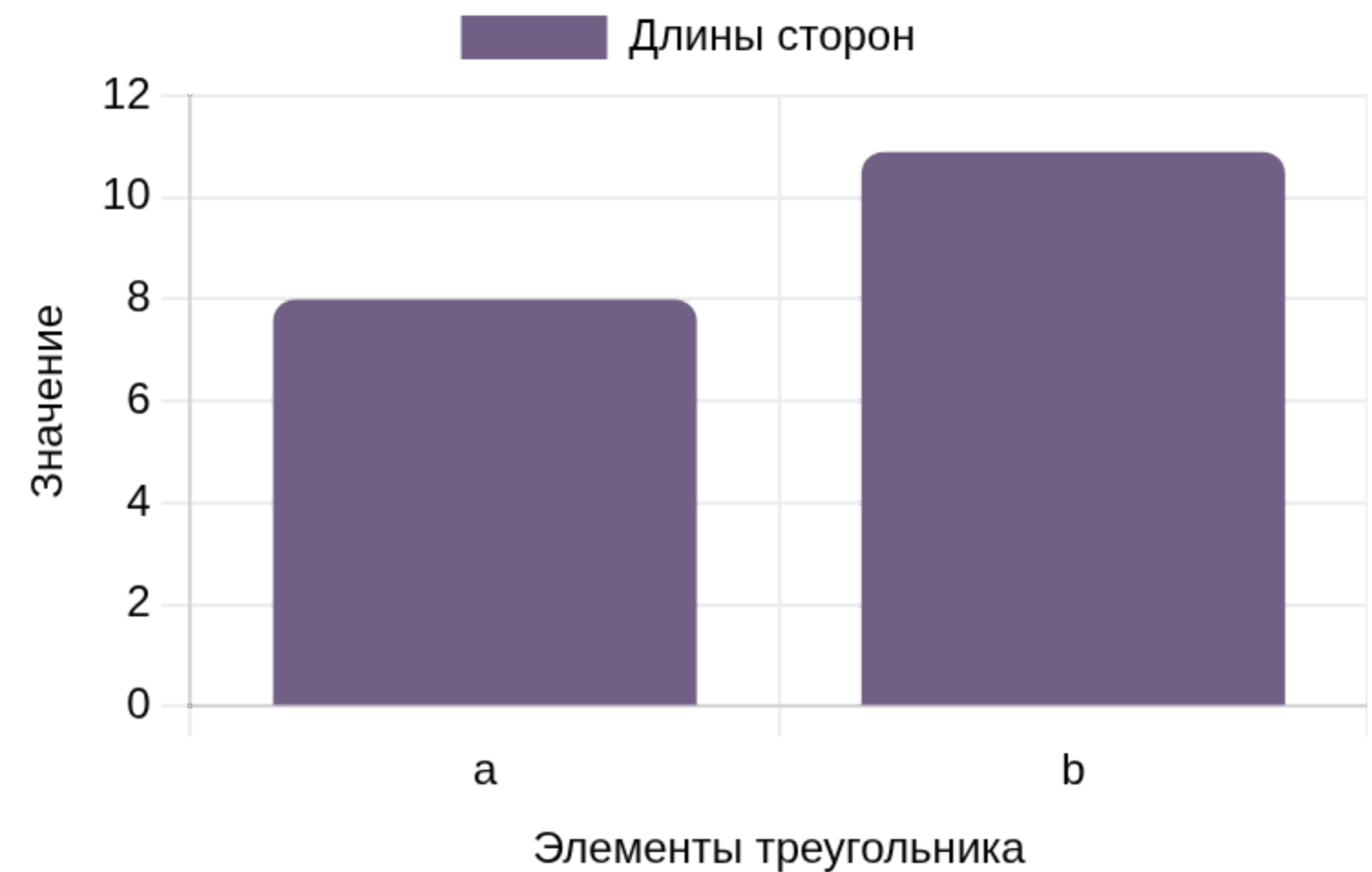
Формулировка теоремы синусов из школьного курса геометрии

Пара	Что сравниваем	Пример
$a \leftrightarrow A$	сторона и противолежащий угол	$a/\sin A$
$b \leftrightarrow B$	сторона и противолежащий угол	$b/\sin B$
$c \leftrightarrow C$	сторона и противолежащий угол	$c/\sin C$

Пример 1: сторона по углам и стороне

На этой задаче видно, как один найденный угол сразу запускает вычисление второй стороны.

После нахождения угла $C = 75^\circ$ остаётся одна пропорция; сторона b получается больше a , потому что лежит напротив большего угла.



Расчёт по теореме синусов для данных примера:
 $A=40^\circ$, $B=65^\circ$, $a=8$ см.

В таких задачах возможны два построения,
поэтому ответ проверяют по рисунку.

Свойство неоднозначного случая SSA
при применении теоремы синусов.

2

измерения нужно
учитывать
в неоднозначном случае
построения
треугольника.

Теорема косинусов: формулировка

1

Когда применять

Если известны две стороны и угол между ними, косинусная формула сразу связывает их с третьей стороной. Она особенно удобна, когда синусы ещё не дают прямого пути к ответу.

2

Что она даёт

Теорема работает симметрично: любую сторону можно выразить через две другие и противолежащий угол. Это делает её универсальным инструментом для вычисления сторон и последующей проверки результата.



Откуда берётся теорема косинусов

Последовательность показывает, как высота и прямоугольный треугольник приводят к нужной формуле.



Пример 3: найти сторону

Угол C входит в формулу напрямую, поэтому достаточно подставить его косинус и вычислить квадрат стороны.

При угле 60° косинус равен $0,5$, поэтому третья сторона получается немного меньше b и больше a .



Расчёт по теореме косинусов для данных примера: $a=7$ см, $b=9$ см, $C=60^\circ$.

Пример 4: найти угол по трём сторонам

1

Записать выражение

Сначала записывают формулу для нужного угла, например через сторону a . Затем все известные стороны подставляют в дробь и считают числитель и знаменатель отдельно.

3

Найти арккосинус

Далее находят $\arccos$ на калькуляторе и получают угол в градусах. Именно этот шаг переводит численное значение косинуса в привычный результат для чертежа.

2

Проверить ответ

После вычисления косинуса важно проверить, что значение лежит между -1 и 1 . Это помогает избежать ошибки в подстановке и заметить неверные данные.

4

Сверить с рисунком

Если угол получился тупым или острым, это должно совпасть с рисунком. Геометрическая проверка часто подтверждает, что формула применена верно.

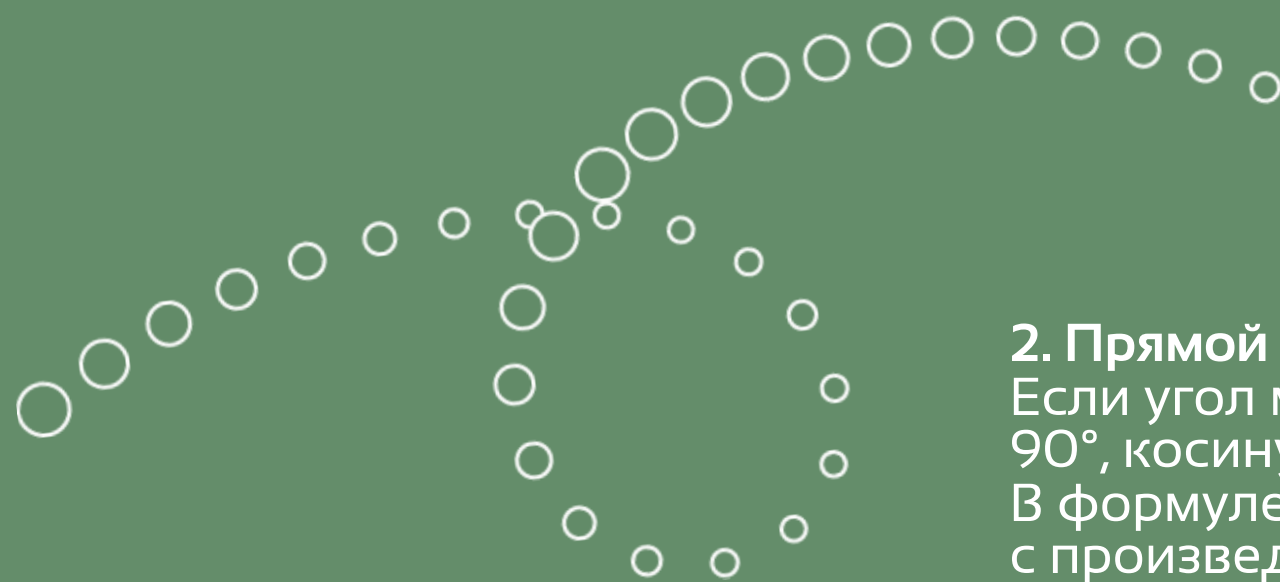


Удобные преобразования и частный случай



1. Выражаем сторону

Формулу косинусов можно перестроить так, чтобы искомая сторона стояла отдельно под корнем. Это удобно в вычислениях и сразу показывает, какие величины влияют на результат.



2. Прямой угол

Если угол между сторонами равен 90° , косинус становится нулём. В формуле исчезает вычитаемое с произведением сторон, и остаётся более простая запись.

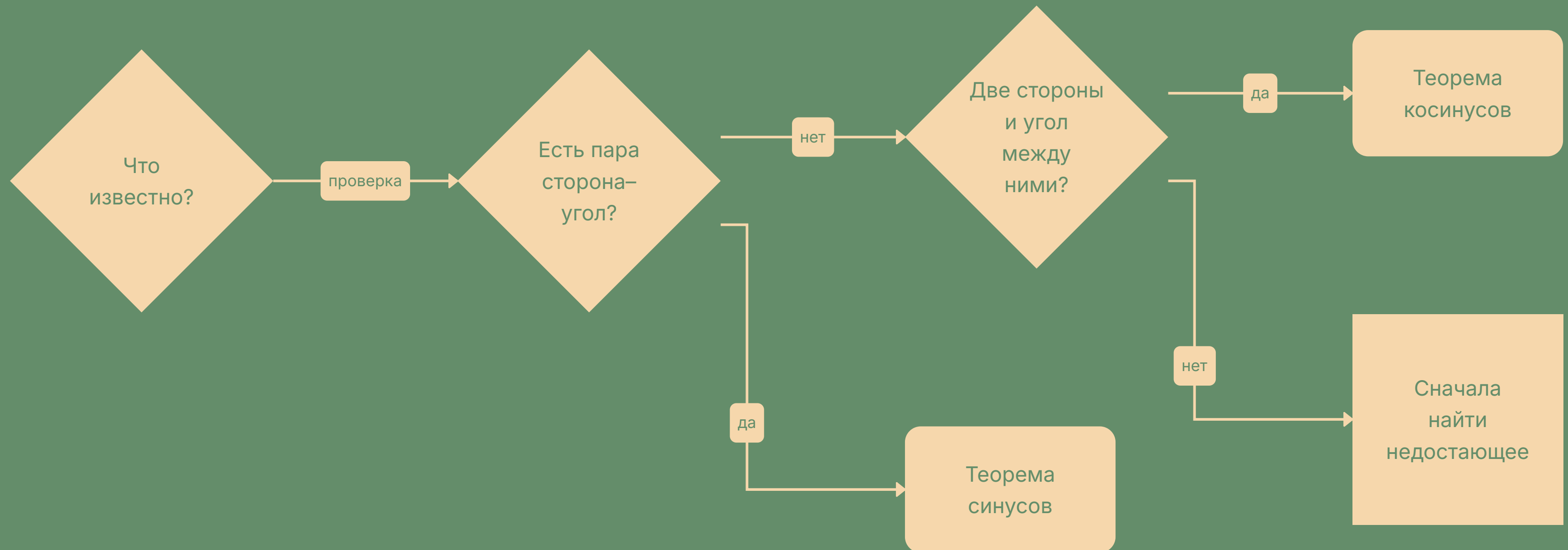


3. Частный случай

Получаем $c^2 = a^2 + b^2$ — знакомое правило для прямоугольного треугольника. Значит, теорема Пифагора является частным случаем теоремы косинусов.

Как выбрать теорему

Схема помогает выбрать формулу по типу известных данных в задаче.



Каких данных достаточно?



Сравните три ситуации и определите, какую формулу можно применить первой.



В первой задаче достаточно данных для синусов, во второй не хватает второй стороны или угла, а в третьей первыми нужны косинусы.



Учебные ситуации по теме теоремы синусов и косинусов.

Ситуация	Ответ
1	Да
2	Нет
3	Косинусы

Главный вывод

Треугольник перестаёт быть набором отдельных чисел: его элементы связаны законами. Если распознать, что известно, выбор между синусами и косинусами становится быстрым и уверенным.

