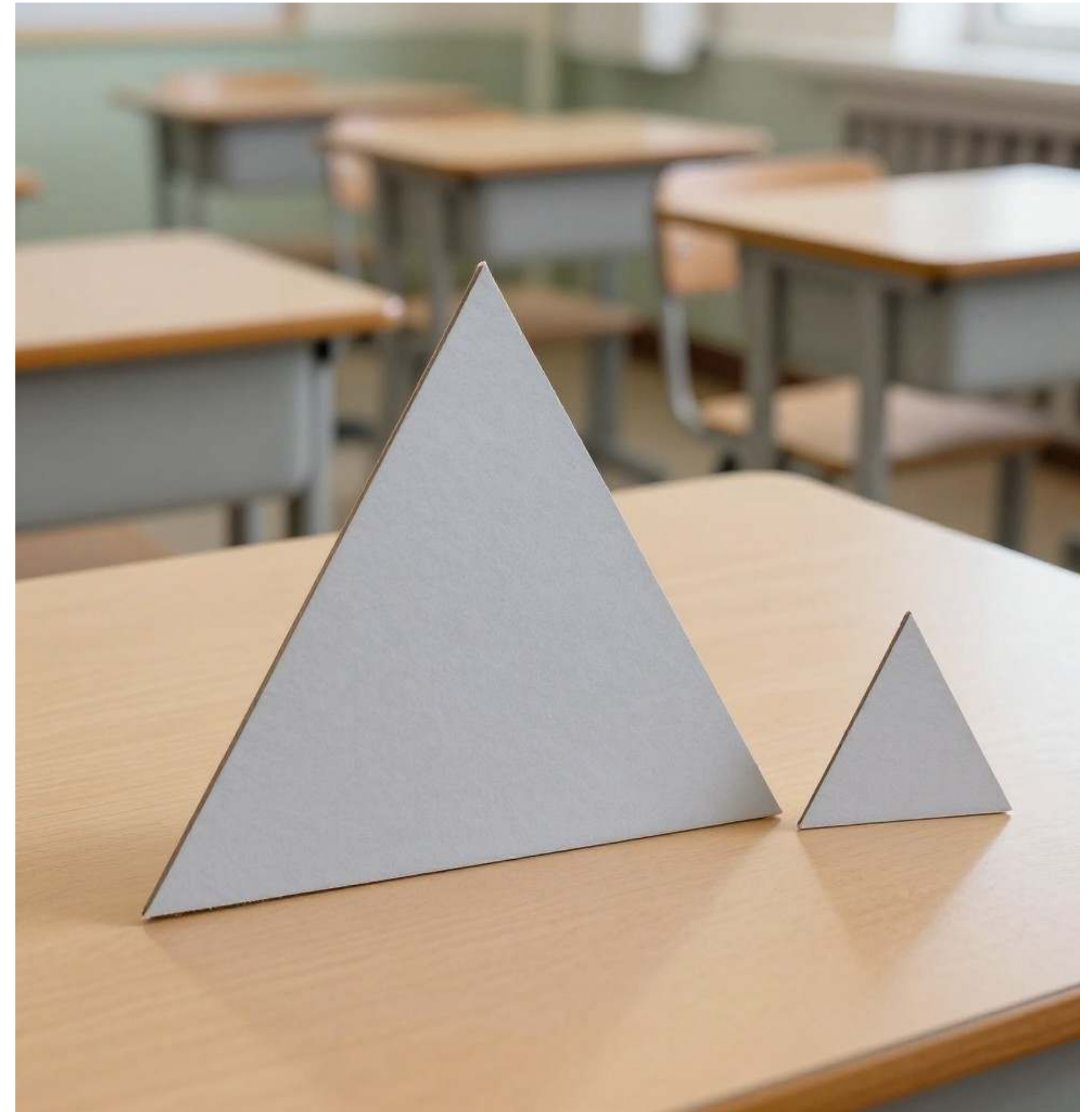


Гомотетия: увеличение и уменьшение фигур

Форма сохраняется, размер меняется:
это и есть гомотетия.



Зачем изучать гомотетию в 7 классе?



Гомотетия показывает, как одинаковые по форме фигуры могут отличаться размером. Она помогает понимать подобие, масштаб, построения на плоскости и быстро находить неизвестные длины, периметры и площади.

Определение гомотетии

I

Положение точек

При гомотетии точка A переходит в A' так, что точки O , A и A' лежат на одной прямой. Центр O остаётся неподвижным и задаёт направление преобразования.

2

Коэффициент k

Расстояние от центра до новой точки равно $|k| \cdot OA$. Именно коэффициент гомотетии показывает, во сколько раз меняются линейные размеры фигуры после преобразования.

3

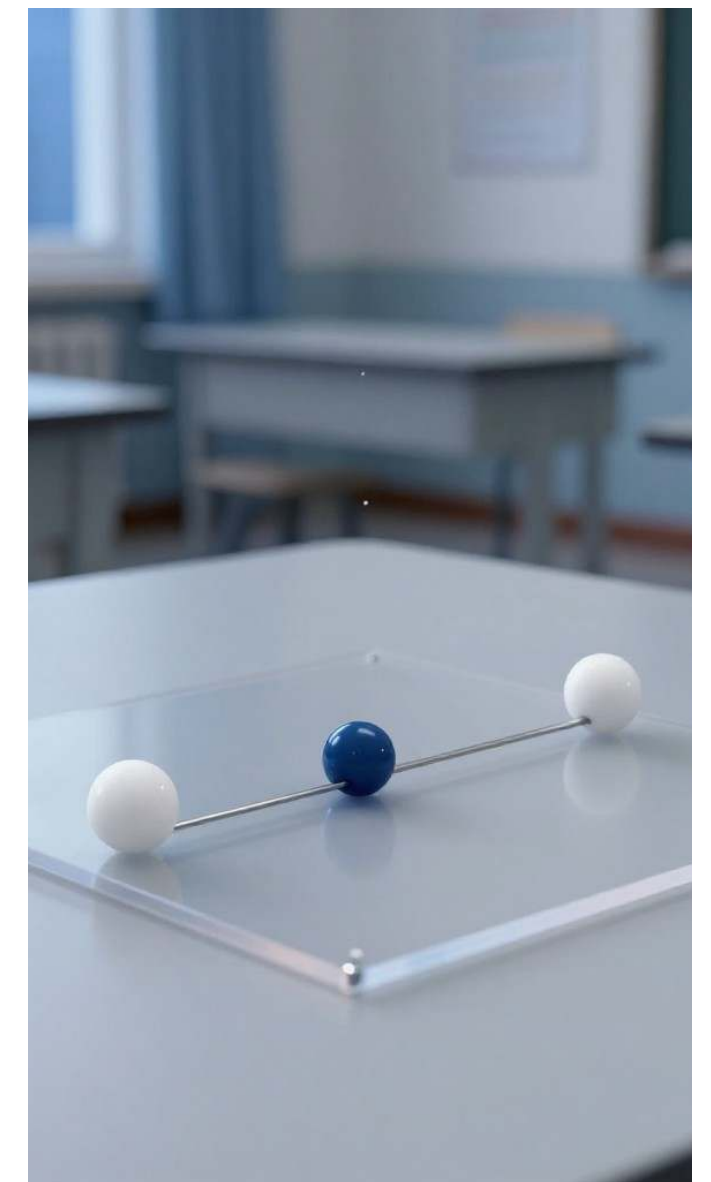
Положительный коэффициент

Если k положителен, образ точки располагается по ту же сторону от центра, что и исходная точка. Фигура сохраняет ориентацию и только меняет размер.

4

Отрицательный коэффициент

Если k отрицателен, новая точка оказывается по другую сторону от центра. Размеры меняются так же, но положение образа относительно центра становится противоположным.



Центр гомотетии и его роль

- **Неподвижная точка**

Центр гомотетии обозначают буквой O . Он не перемещается при преобразовании и служит опорной точкой, от которой строятся все остальные точки фигуры.

- **Влияние коэффициента**

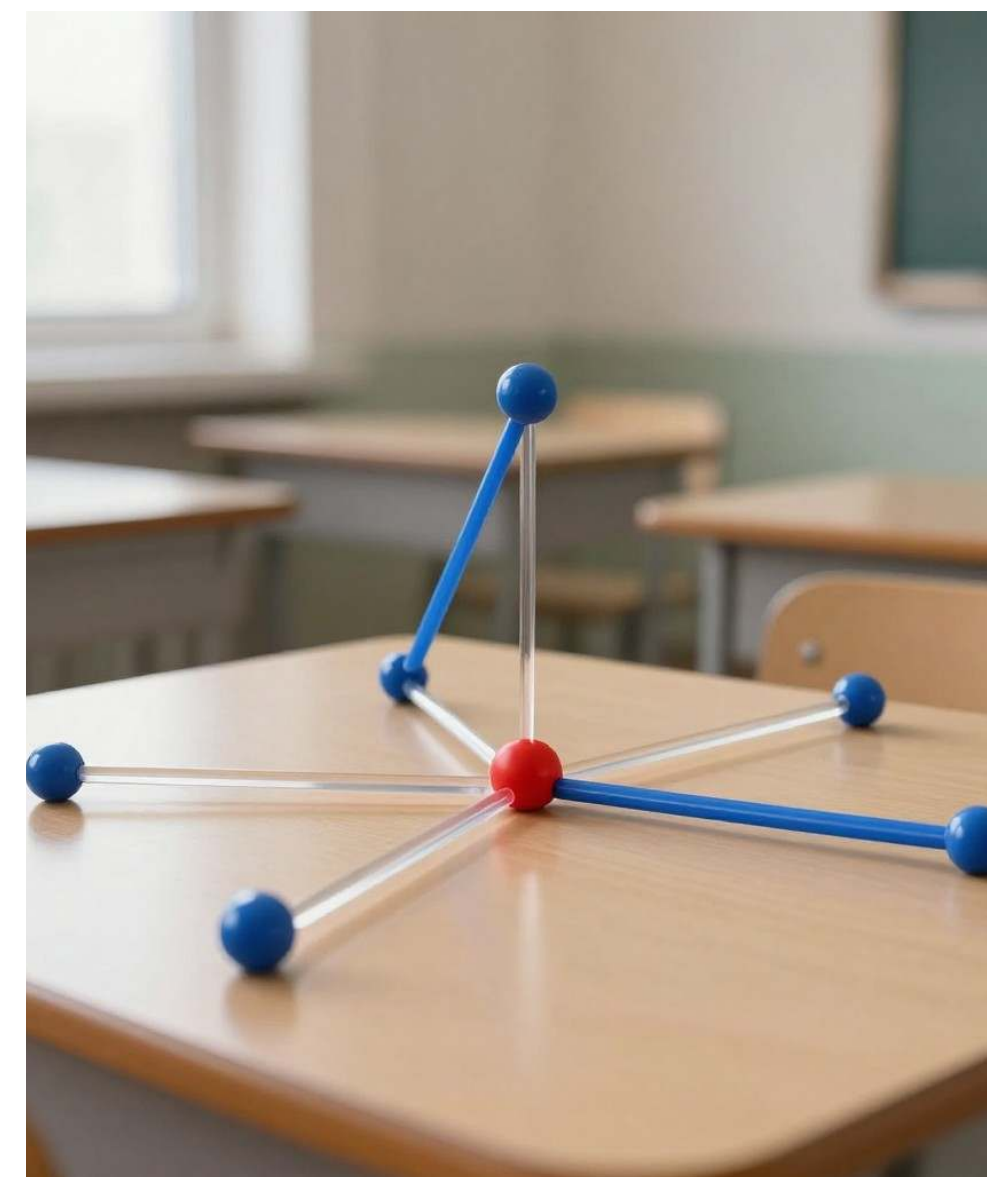
При $k > 1$ фигура увеличивается, при $0 < k < 1$ — уменьшается. Чем больше модуль коэффициента, тем сильнее меняется расстояние от центра до образа точки.

- **Лучевое построение**

Каждая вершина образа лежит на прямой, проходящей через центр и соответствующую исходную точку. Поэтому гомотетию удобно строить по лучам и отрезкам.

- **Смена стороны**

Если $k < 0$, образ точки появляется на противоположной стороне от центра. Это важно учитывать, иначе построение будет выполнено неверно даже при правильном масштабе.



Как коэффициент влияет на размер фигуры

По модулю коэффициента легко оценить изменение линейных размеров, а затем проверить и периметр, и площадь фигуры.

Чем больше $|k|$, тем сильнее изменение размеров; знак k влияет не на величину, а на расположение образа.

Правила гомотетии: линейные размеры изменяются в $|k|$ раз, периметр — в $|k|$ раз, площадь — в k^2 раз.

Примеры коэффициента гомотетии

Сравним несколько типичных случаев и увидим, как знак и модуль коэффициента влияют на результат.

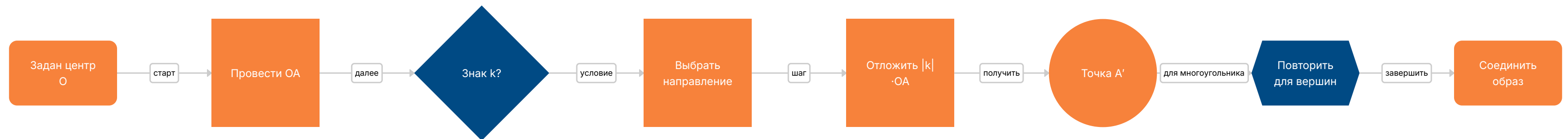
Модуль коэффициента отвечает за масштаб, а знак — за положение образа относительно центра.

Свойства гомотетии и определения коэффициента k .

k	Что происходит	Пример
2	Увеличение	в 2 раза
$\frac{1}{2}$	Уменьшение	в 2 раза
-1	На другую сторону	без изменения размера
-2	Увеличение и перенос	в 2 раза

Построение образа точки при гомотетии

Последовательность построения по центру O и коэффициенту k .



Гомотетия на клетчатой бумаге

Удобно для проверки

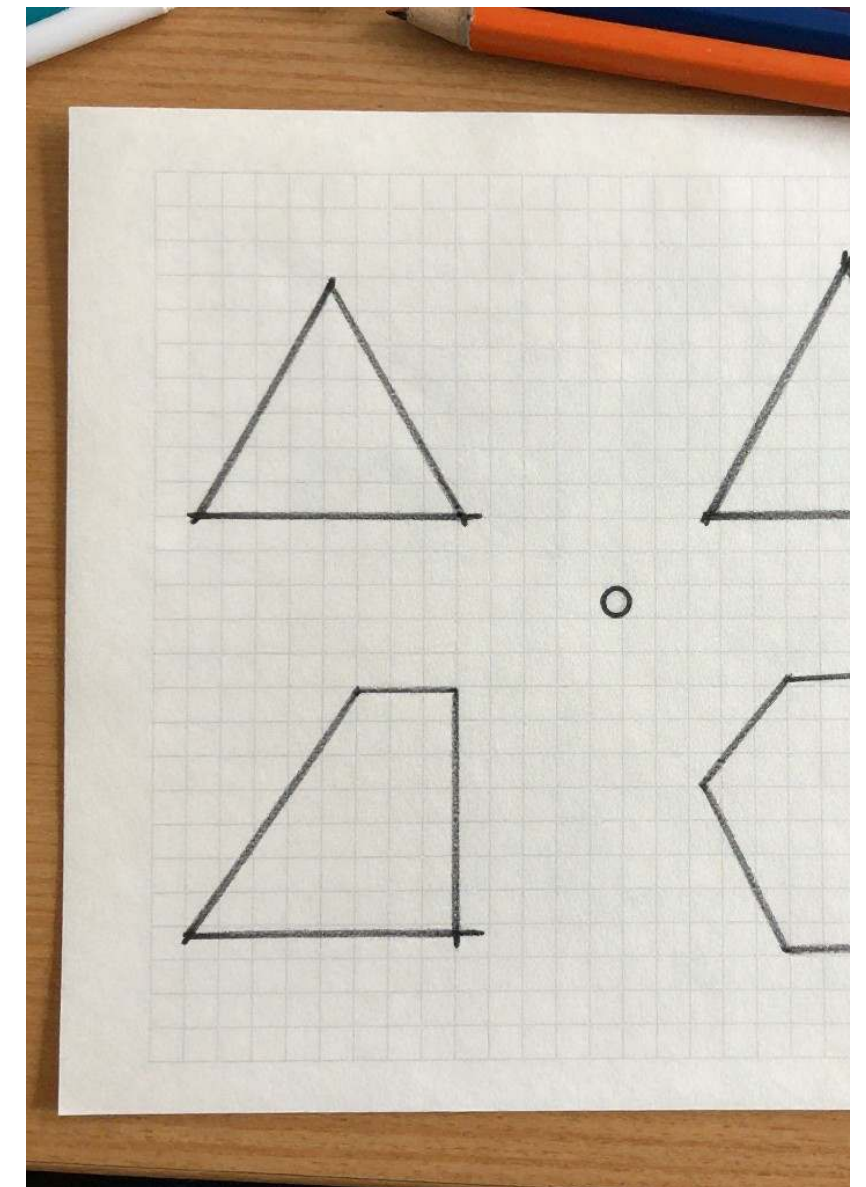
На клетчатой бумаге легко сравнивать размеры фигур и видеть, что форма остаётся прежней. По клеткам проще заметить, насколько изменились стороны и расстояния.

Контроль направления

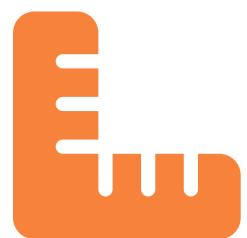
Все вершины образа должны лежать на прямых, проходящих через центр. Это помогает быстро проверить правильность построения и не перепутать положение точек.

Наглядные примеры

Особенно удобно рассматривать треугольник, квадрат или пятиугольник. Их можно изобразить в исходном виде и в уменьшенной или увеличенной копии на одной сетке.



Связь гомотетии и подобия фигур



Одинаковая форма

Фигуры, полученные гомотетией, имеют одинаковую форму. Они отличаются только размером, поэтому сразу относятся к подобным фигурам.



Равные углы

Соответствующие углы остаются равными. Это один из главных признаков подобия и удобный способ сравнивать две фигуры без полного измерения.



Пропорциональные стороны

Соответствующие стороны изменяются в одном и том же отношении. Один коэффициент подобия связывает все пары сторон и позволяет находить неизвестные длины.



Решение задач

Если известны одна-две стороны и коэффициент преобразования, можно быстро вычислить остальные размеры. Так гомотетия помогает решать школьные задачи на подобие.

Что сохраняется, а что меняется при гомотетии

При гомотетии важно отдельно проверять ориентацию фигуры и положение центра, чтобы не перепутать результат построения.

Гомотетия сохраняет геометрию формы, но меняет масштаб; при отрицательном k дополнительно меняется ориентация.

Свойства гомотетии: сохраняются углы, параллельность и порядок вершин; изменяются длины, периметр и площадь.

9 раз

увеличивается площадь фигуры
при коэффициенте гомотетии 3.

Площадь меняется не линейно,
а по квадрату коэффициента, поэтому
ошибка в вычислениях здесь особенно
заметна.

Свойство гомотетии: площадь изменяется в k^2 раз.

Сравнение исходной фигуры и её образа

Сравниваем, какие свойства сохраняются, а какие зависят от коэффициента гомотетии.

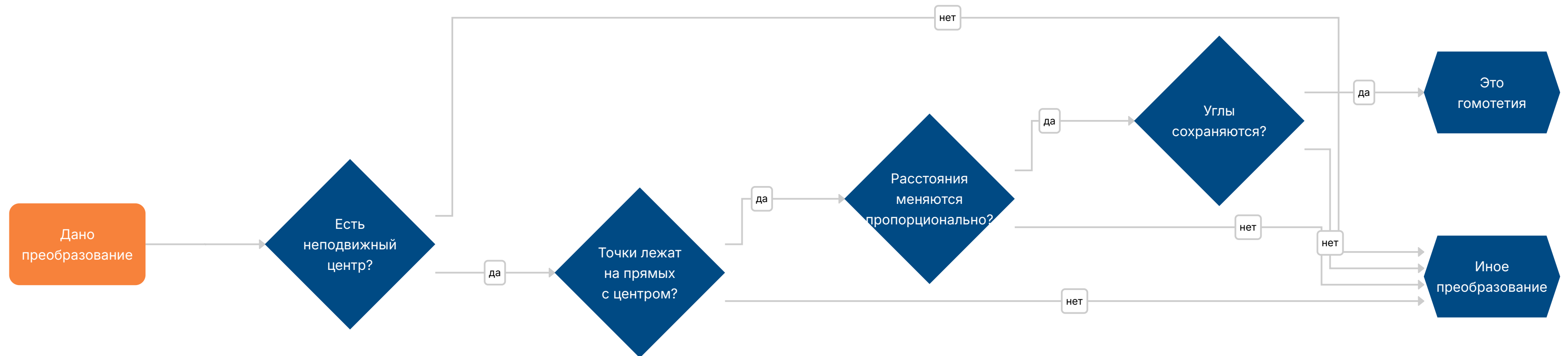
Гомотетия сохраняет форму фигуры, но изменяет её масштаб; центр остаётся на месте.

Свойства гомотетии: углы сохраняются, длины умножаются на $|k|$, площадь — на k^2 .

Свойство	Исходная	Образ
Углы	равны	равны
Стороны	длины a	$a \cdot k $
Площадь	S	$S \cdot k^2$
Центр	O	неподвижен

Как отличить гомотетию от других преобразований

Признаки проверки: неподвижный центр, коллинеарность точек с центром, пропорциональность расстояний и сохранение углов.



Гомотетия в координатах

1

Формула преобразования

Если центр гомотетии находится в начале координат, то каждую координату точки умножают на коэффициент k : получается новый образ на той же плоскости.

2

Увеличение и уменьшение

При k больше 1 фигура удаляется от начала координат и растёт. При 0 меньше k меньше 1 она приближается к началу координат и уменьшается.

3

Отрицательный коэффициент

Если k отрицателен, точка переходит на противоположную сторону относительно начала координат. При этом расстояние меняется по модулю коэффициента.

4

Удобство построений

Такой способ позволяет быстро находить образы точек и фигур на координатной плоскости, не измеряя каждую сторону отдельно.

Примеры перехода точек в координатах

На координатной плоскости особенно хорошо видно, что знак коэффициента меняет сторону расположения точки относительно начала координат.

Координаты изменяются строго по формуле:
положительный коэффициент сохраняет направление,
отрицательный — меняет его на противоположное.

Построено по правилу гомотетии $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$; пример точки $A(2; 3)$.

Гомотетия в реальной жизни

Карта, которая «уменьшает» город

Когда на карте весь город помещается на листе, это не волшебство, а работа масштаба. Дороги, кварталы и реки сохраняют форму, но становятся меньше в одинаковое число раз, поэтому по карте удобно ориентироваться и сравнивать расстояния.



Макет, чертёж и экран

Архитектурный макет, чертёж здания и увеличение изображения на экране показывают один принцип: форма остаётся узнаваемой, а размеры изменяются. Благодаря этому можно заранее представить, как будет выглядеть реальный объект, не строя его сразу в натуральную величину.



Типичные ошибки при изучении гомотетии

I

Путают смысл коэффициента

Коэффициент гомотетии задаёт не длину отдельного отрезка, а правило изменения всей фигуры. Если перепутать эти понятия, легко получить неверные стороны и пропорции.

2

Игнорируют знак

Знак коэффициента важен: он определяет, окажется ли образ по ту же сторону от центра или перейдёт на противоположную. Без этого построение теряет правильное расположение.

3

Неверно считают площадь

При гомотетии площадь не умножают на k . Она изменяется в k^2 раз, поэтому при большом коэффициенте ошибка быстро становится заметной в ответе.

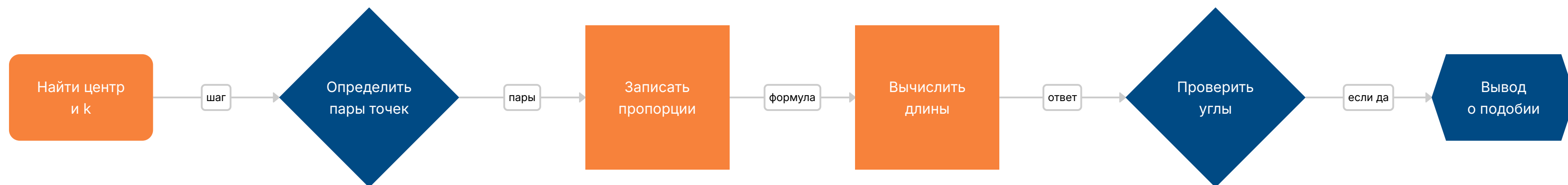
4

Не проверяют лучи

Все соответствующие точки должны лежать на прямых, проходящих через центр. Если это условие не выполнено, преобразование нельзя считать гомотетией.

План решения задач на гомотетию

Последовательность действий для задач на построение, вычисление и сравнение фигур.



Краткая памятка по свойствам гомотетии

Сводим в одну таблицу самые важные правила для быстрого решения задач.

Главное: форма сохраняется, а масштаб, площадь и ориентация зависят от коэффициента.

Свойства гомотетии из школьного курса геометрии.

Свойство	Правило	Результат
Длины	$\times k $	меняются
Периметр	$\times k $	меняется
Площадь	$\times k^2$	меняется
Углы	не меняются	равны
Центр	неподвижен	О
Ориентация	зависит от k	может меняться

Главный вывод о гомотетии

Гомотетия показывает, как одна и та же фигура может сохранять форму и менять размер. Понимание её свойств помогает уверенно решать задачи на масштаб, координаты и подобие.