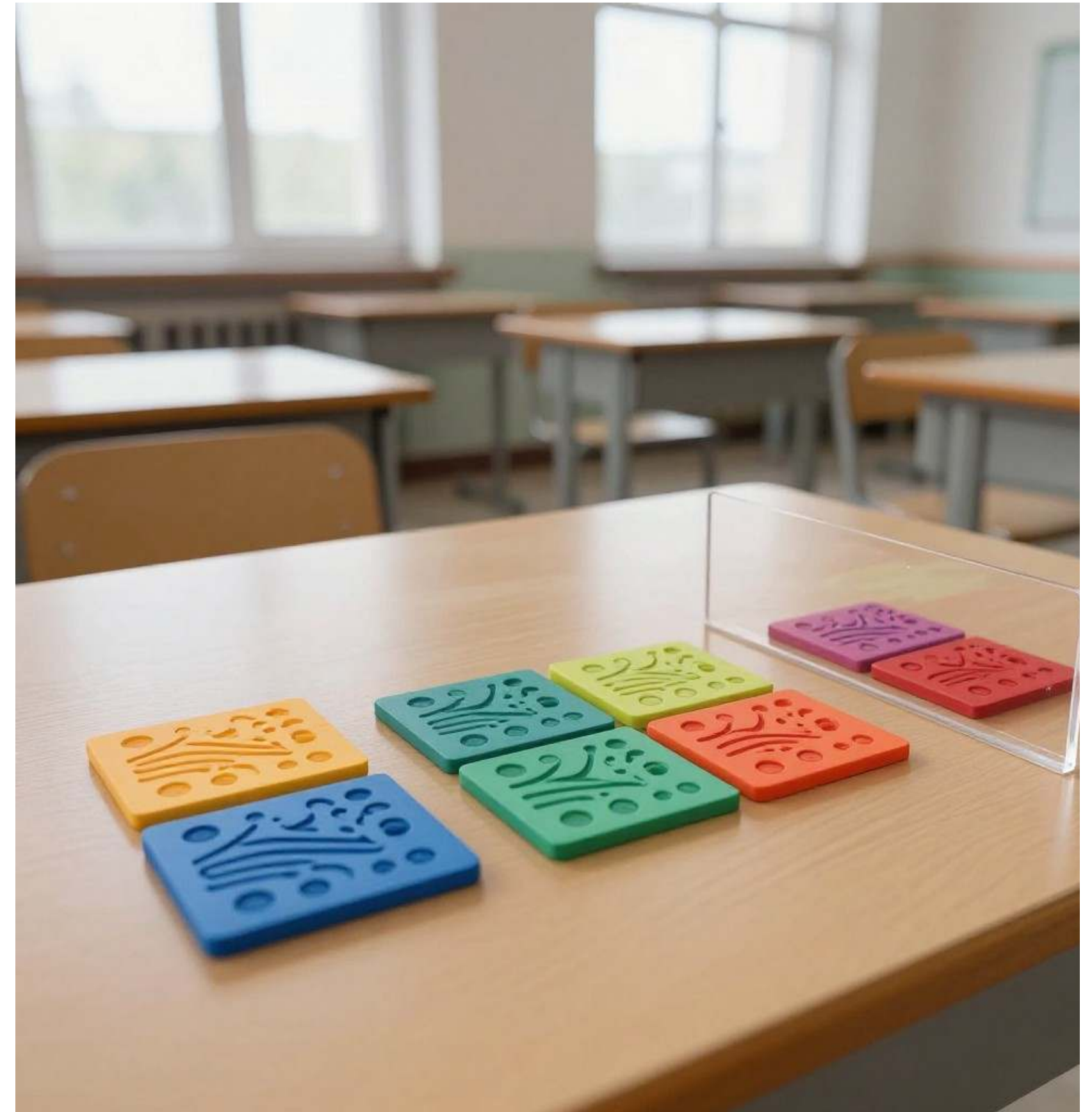


Многочлены и арифметические операции над ними

Алгебра выражений: складываем,
вычитаем и умножаем многочлены.



Зачем изучать многочлены в 7 классе



Многочлены помогают записывать формулы, упрощать выражения и уверенно переходить к более сложным темам алгебры. Эта тема опирается на уже знакомые действия с числами, знаки и распределительное свойство умножения.

Что такое многочлен



Состав многочлена

Многочлен — это выражение из двух и более одночленов, соединённых знаками «+» или «-». Каждый член сохраняет свой знак и участвует в общем алгебраическом выражении.



Степень многочлена

Степень многочлена определяется наибольшей степенью среди его одночленов. Например, в выражении $3x^2 - 2x + 5$ старший член имеет степень 2, значит и степень многочлена равна 2.



Что такое одночлен

Одночлен состоит из числа, букв и степеней, соединённых умножением. Примеры: $3x$, $-2a^2$, 5 . Число называют коэффициентом, а буквенная часть показывает переменную и её степень.



Примеры записи

К многочленам относятся $3x^2 - 2x + 5$, $7a - 4$ и $m^2 + n^2 - 2mn$. Такие записи удобно использовать, когда нужно показать зависимость величин и не писать длинные цепочки вычислений.



Степень одночлена

Степень одночлена равна сумме показателей степеней всех букв в его записи. У числа без букв степень считается равной нулю, поэтому число 5 тоже можно рассматривать как одночлен.

Стандартный вид многочлена

Порядок членов

В стандартном виде члены многочлена записывают по убыванию степеней. Сначала идут старшие степени, затем более низкие, чтобы выражение было удобнее читать и преобразовывать.

Подобные слагаемые

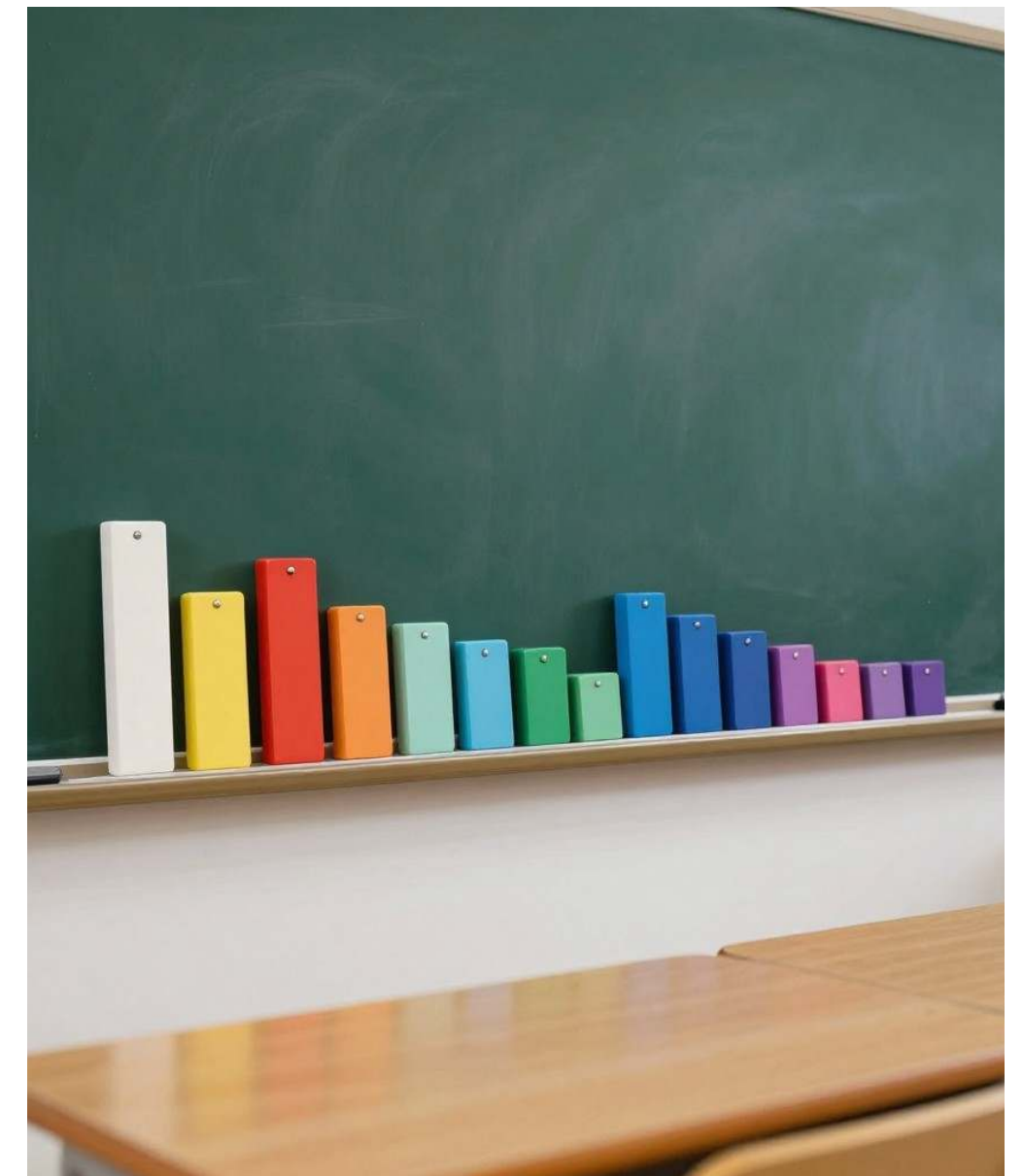
Перед записью в стандартном виде подобные слагаемые уже должны быть объединены. Это значит, что одинаковые одночлены сливаются в один член, а их коэффициенты складываются или вычитаются.

Правильные знаки

При записи важно сохранять все знаки и не пропускать члены. Ошибка в одном знаке может изменить всё выражение, поэтому каждый шаг нужно проверять особенно внимательно.

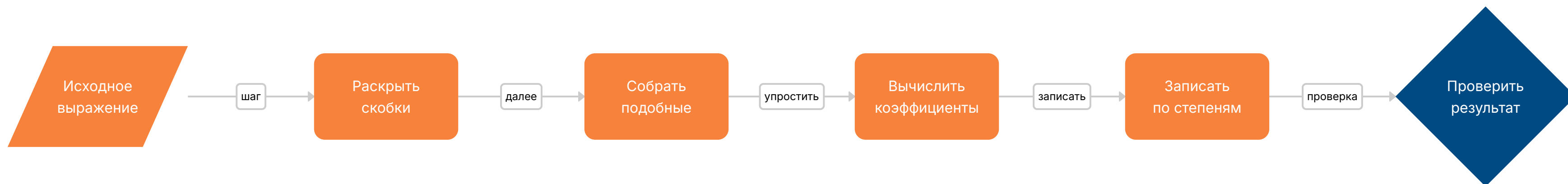
Наглядный пример

Запись $4x^3 - x^2 + 7x - 9$ является стандартным видом многочлена. В ней члены расположены по убыванию степеней, а все коэффициенты и знаки стоят на своих местах.



Как привести многочлен к стандартному виду

Последовательность действий при преобразовании алгебраического выражения



Сложение многочленов

I

Главное правило

При сложении многочленов объединяют только подобные слагаемые, то есть те, у которых одинаковая буквенная часть и одинаковые степени. Коэффициенты складывают отдельно, а буквенную часть не меняют.

2

Что остаётся без изменений

Если у двух членов нет пары с такой же буквенной частью, каждый из них просто переписывают в ответе. Поэтому сначала удобно найти все подобные слагаемые, а уже потом выполнять вычисления.

3

Пример вычисления

$(3x^2 + 2x - 1) + (x^2 - 5x + 4) = 4x^2 - 3x + 3$. Здесь отдельно сложены члены с x^2 , с x и свободные числа, после чего получен более короткий и удобный результат.

4

Проверка записи

После сложения полезно ещё раз посмотреть, не пропущен ли какой-нибудь член. Если выражение записано в стандартном виде, его легче проверять и использовать в следующих действиях.

Вычитание многочленов

1

Смена знаков

При вычитании знаки всех слагаемых второго многочлена меняются на противоположные. Это самый важный шаг, потому что ошибка в одном знаке сразу приводит к неверному ответу.

2

Дальнейшее упрощение

После смены знаков выражение превращается в обычную сумму. Затем нужно собрать подобные слагаемые и аккуратно выполнить вычисления, не смешивая члены с разными буквенными частями.

3

Пример действия

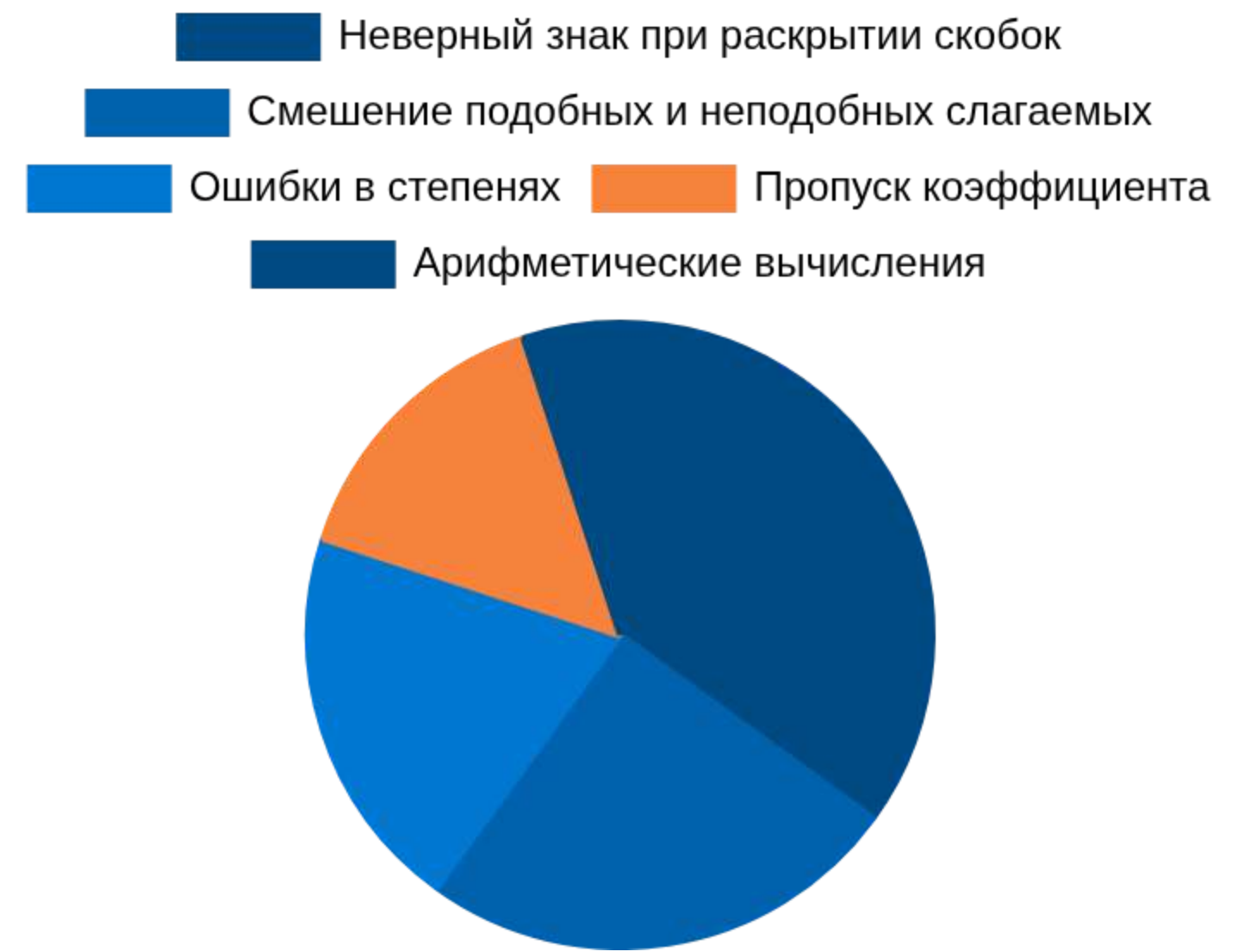
$(5a^2 - 3a + 1) - (2a^2 + a - 4) = 5a^2 - 3a + 1 - 2a^2 - a + 4 = 3a^2 - 4a + 5$. В результате видно, что минус перед скобками изменил знаки всех членов.

Где чаще возникают ошибки

Чаще всего ошибки появляются не в самом вычислении, а при записи выражения и работе со знаками. Поэтому полезно выполнять преобразования по шагам и сразу проверять каждый член.

Больше половины ошибок связаны со знаками и распознаванием подобных слагаемых. Значит, внимательность и аккуратная запись важнее, чем скорость вычислений.

Обобщённые данные для учебной диаграммы по теме «Многочлены»



Распределительное свойство умножения



Основная запись

Распределительное свойство записывают так:
 $a(b+c)=ab+ac$ и $a(b-c)=ab-ac$. Оно показывает, что множитель умножается на каждое слагаемое в скобках отдельно.



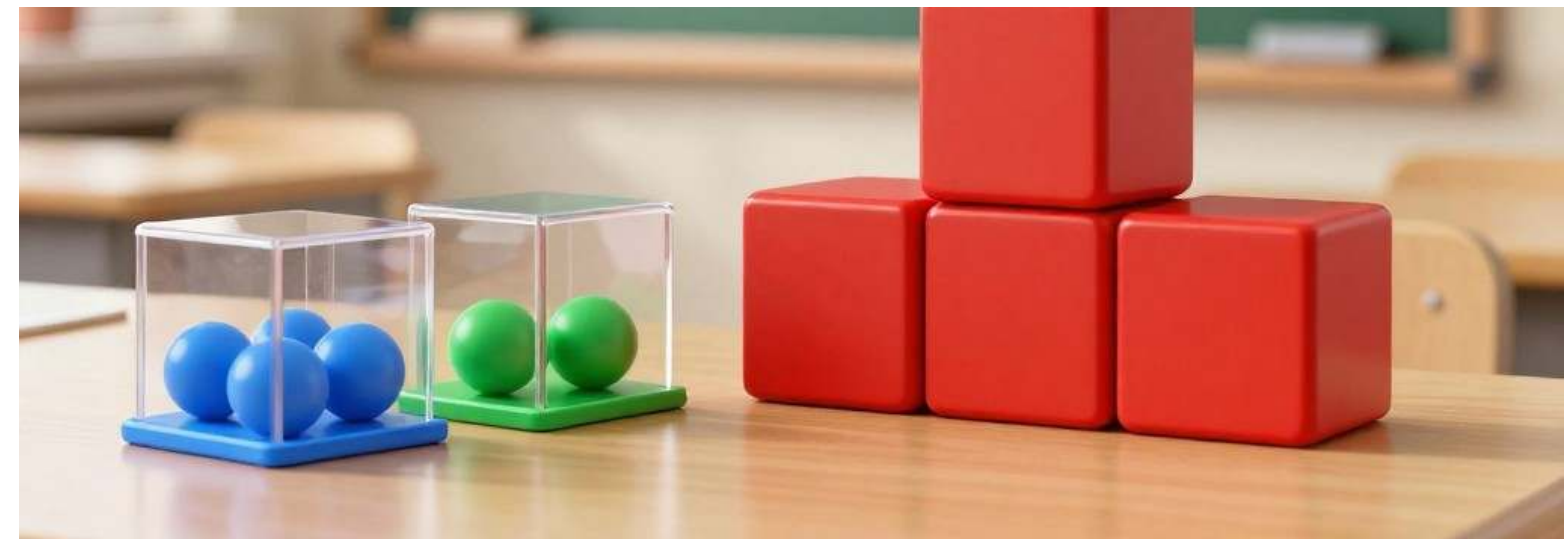
Простой пример

Если раскрыть скобки в выражении $3(x+4)$, получится $3x+12$. Множитель 3 распределяется на оба слагаемых, поэтому число внутри скобок нельзя умножать только на один член.



Зачем оно нужно

Это свойство лежит в основе раскрытия скобок и помогает умножать многочлены. Благодаря ему длинное выражение можно преобразовать по частям, не теряя ни одного слагаемого.



Умножение одночлена на многочлен

I

Действие по шагам

При умножении одночлена на многочлен каждый член многочлена умножают отдельно. Это помогает не пропустить ни одно слагаемое и получить полный результат без лишних сокращений.

2

Работа с коэффициентами

Сначала перемножают числовые коэффициенты. Затем одинаковые буквы при умножении складывают по показателям степеней. Так из $2x \cdot 3x^2$ получается $6x^3$, потому что $2 \cdot 3 = 6$ и $x \cdot x^2 = x^3$.

3

Пример вычисления

$2x(3x^2 - x + 5) = 2x \cdot 3x^2 - 2x \cdot x + 2x \cdot 5 = 6x^3 - 2x^2 + 10x$. Сначала записывают все произведения, а потом, если возможно, приводят результат к стандартному виду.

4

Контроль результата

После умножения полезно проверить, что каждый член исходного многочлена был использован. Если хотя бы одно слагаемое забыто, ответ получится неполным и неверным.

Сравнение основных действий с многочленами

Действие	Правило	Шаг	Пример
Сложение	Подобные слагаемые	Сложить коэффициенты	$(3x^2+2x)+(x^2-5x)$
Вычитание	Сменить знаки	Привести подобные	$(5a^2-3a)-(2a^2+a)$
Умножение на одночлен	Каждый член отдельно	Перемножить коэффициенты	$2x(3x^2-x+5)$

Сводная таблица показывает, чем отличаются основные действия с многочленами и что важно в каждом случае.

Во всех действиях решающими остаются знаки и умение находить подобные слагаемые; именно они обеспечивают правильный результат.

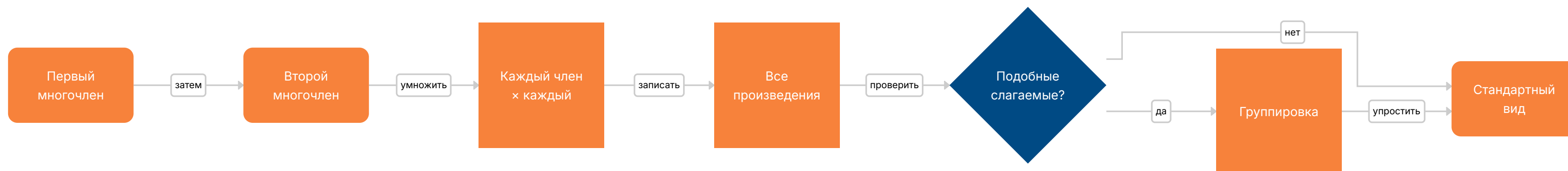
Школьный курс алгебры, 7 класс

Умножение многочлена на многочлен



Как умножать два многочлена

Последовательность действий при перемножении многочленов в школьном курсе алгебры, 7 класс



Как быстро растёт число промежуточных произведений

Чем больше слагаемых в многочленах, тем длиннее вычисления и тем внимательнее нужно вести запись каждого произведения.

Рост почти пропорционален числу слагаемых в обоих множителях, поэтому порядок вычислений помогает избежать пропусков.

Школьный курс алгебры, 7 класс



Формулы сокращённого умножения

Квадрат суммы

Формула $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ позволяет раскрывать скобки сразу, без поочерёдного перемножения всех частей. Она часто встречается в задачах на упрощение выражений.

Квадрат разности

Запись $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ удобна, когда в выражении есть вычитание. Особенно важно правильно сохранить знак среднего члена, чтобы не допустить ошибку.

Разность квадратов

Формула $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ помогает быстро перемножать сопряжённые выражения. Она сокращает вычисления и часто используется при преобразовании многочленов.

Многочлены в геометрических задачах

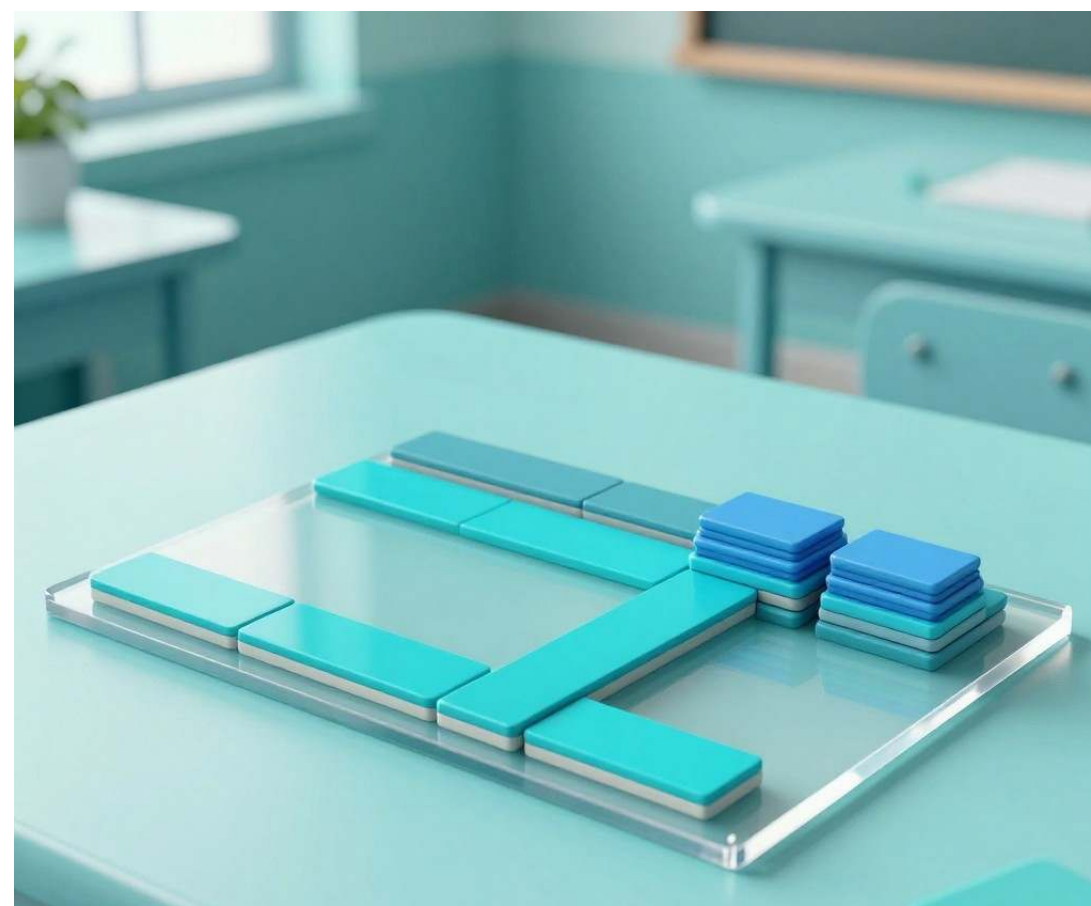
Периметр без длинных вычислений

Если стороны прямоугольника равны $x+3$ и $x+5$, то периметр можно записать как $2(x+3)+2(x+5)$. После упрощения получаем $4x+16$. Такой способ удобен, когда нужно быстро выразить длину через переменную.



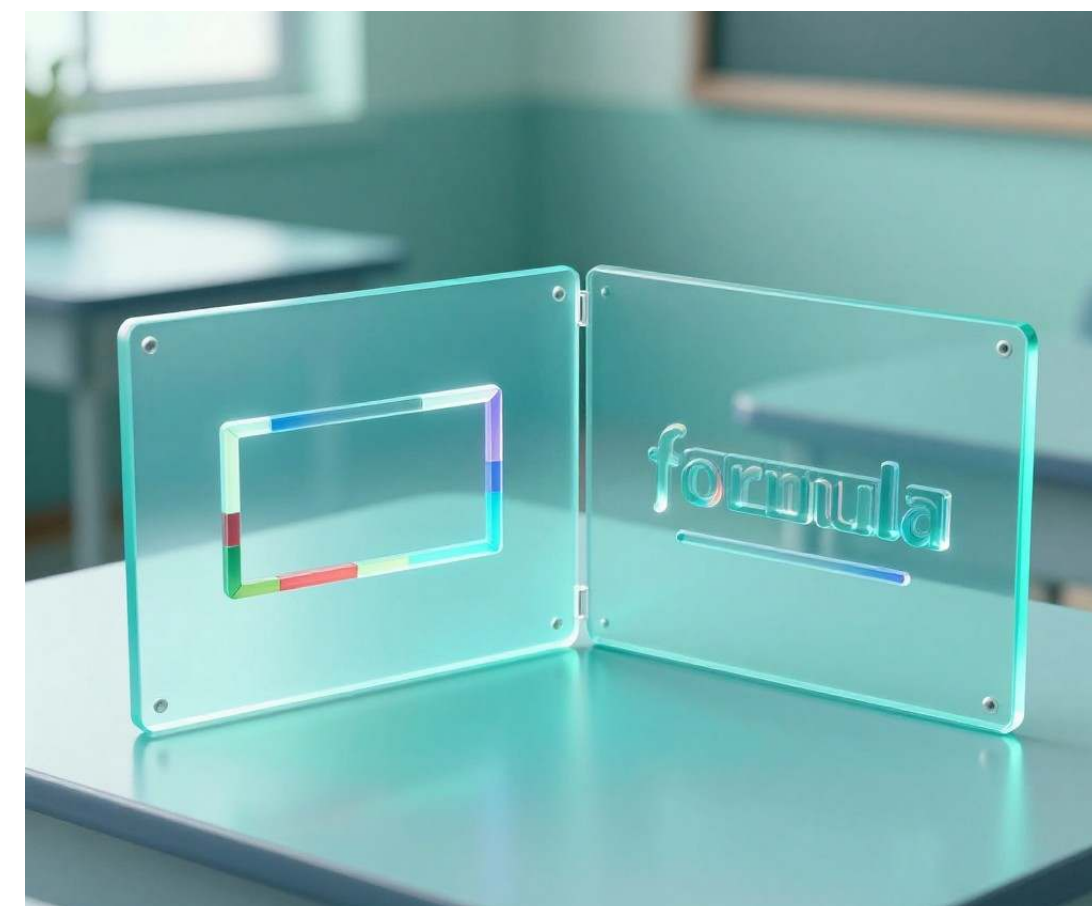
Площадь как произведение сторон

Площадь того же прямоугольника находится умножением сторон: $(x+3)(x+5)=x^2+8x+15$. Здесь многочлен помогает перейти от геометрического рисунка к алгебраической записи и увидеть зависимость площади от x .



Связь рисунка и формулы

Геометрическая модель делает выражение наглядным: на чертеже видны стороны, а в записи — действия с ними. Поэтому многочлены удобно применять, когда нужно описать фигуру и проверить расчёт по схеме.



Проверка вычислений на простых примерах

Таблица показывает, как разные действия с многочленами приводят к короткому и проверяемому результату.

Быстрая проверка по шагам помогает заметить пропущенный член или неверный знак ещё до записи окончательного ответа.

Школьные алгоритмы вычислений

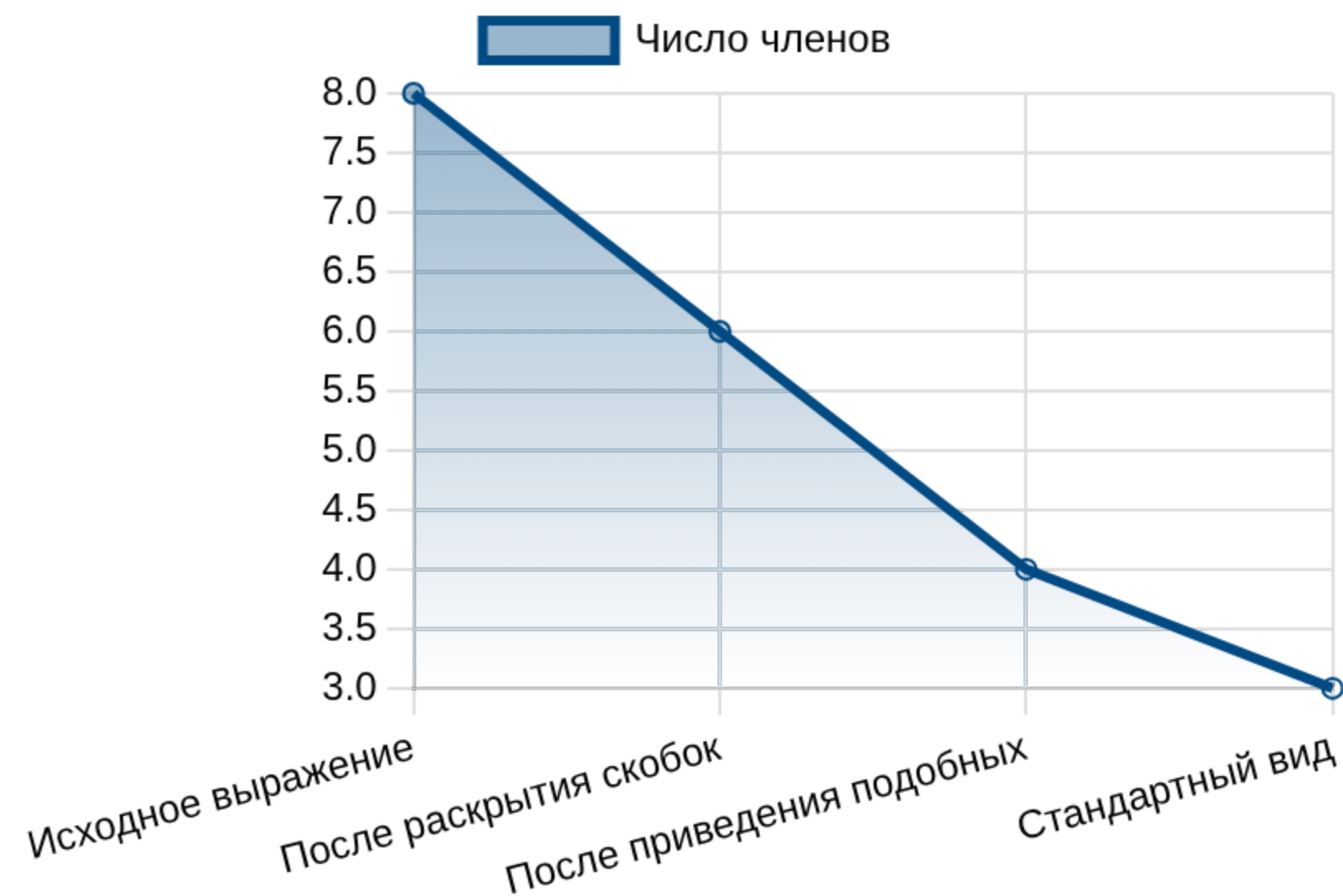
Выражение	Действие	Результат
$(2x+3)+(x-5)$	сложение	$3x-2$
$(4a-1)-(a+6)$	вычитание	$3a-7$
$3y(y-2)$	умножение	$3y^2-6y$
$(x+1)(x+2)$	умножение	x^2+3x+2

Сравнение выражения до и после упрощения

Упрощение не меняет смысл выражения, но делает его короче и удобнее для дальнейших действий.

Число членов последовательно уменьшается, поэтому преобразование облегчает вычисления и помогает быстрее увидеть структуру выражения.

Школьный курс алгебры, 7 класс



Типичные ошибки при работе с многочленами



Неверный знак

После раскрытия скобок знак часто меняют не у всех слагаемых. Из-за этого результат отличается от правильного, даже если остальные вычисления выполнены верно.



Путаница с членами

Иногда смешивают подобные и неподобные слагаемые или забывают один из множителей. Такая ошибка особенно заметна при умножении и вычитании многочленов.



Ошибки в степенях

При умножении буквенные степени нужно складывать, а не перемножать. Если этот шаг пропущен, ответ становится неверным по степени и по виду.



Самопроверка

Полезно повторно раскрыть скобки, выделить подобные слагаемые и сравнить результат с исходным выражением. Проверка каждого шага снижает риск случайной ошибки.

Многочлены: основа многих алгебраических действий

Многочлены помогают удобно записывать выражения, выполнять вычисления и решать задачи. Если уверенно работать со знаками, подобными слагаемыми и стандартным видом, алгебра станет намного понятнее.