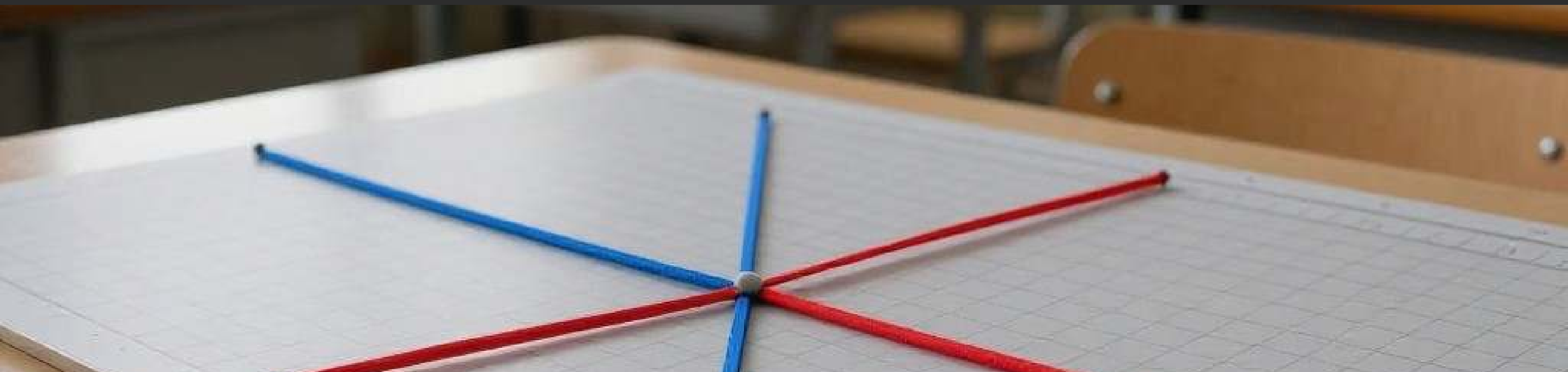


Взаимное расположение графиков линейных функций

Как по коэффициентам понять, пересекутся ли прямые?



Что нужно помнить о прямой

График линейной функции — это прямая. Коэффициент k показывает её наклон и направление, а b задаёт пересечение с осью Oy . Для построения достаточно двух точек.



Линейная функция и её параметры

1. Общий вид

Запись $y = kx + b$ задаёт все точки одной прямой на координатной плоскости. Каждое значение x даёт единственное значение y , поэтому график получается непрерывной линией.

2. Коэффициент k

Число k называют угловым коэффициентом. Оно показывает, насколько быстро меняется y при изменении x , и определяет наклон прямой: вверх, вниз или горизонтально.

3. Свободный член b

Число b показывает, где прямая пересекает ось Oy . Если b меняется, прямая сдвигается вверх или вниз, но её наклон остаётся тем же.

4. Сравнение функций

У двух линейных функций могут совпадать оба коэффициента или только один из них. Именно это и помогает определить, как расположены их графики относительно друг друга.

Три случая взаимного расположения прямых

Сравнение коэффициентов сразу показывает, как связаны графики двух линейных функций.

Сначала проверяют k . Если они равны, переходят к b ; если и b совпадают, это одна и та же прямая.

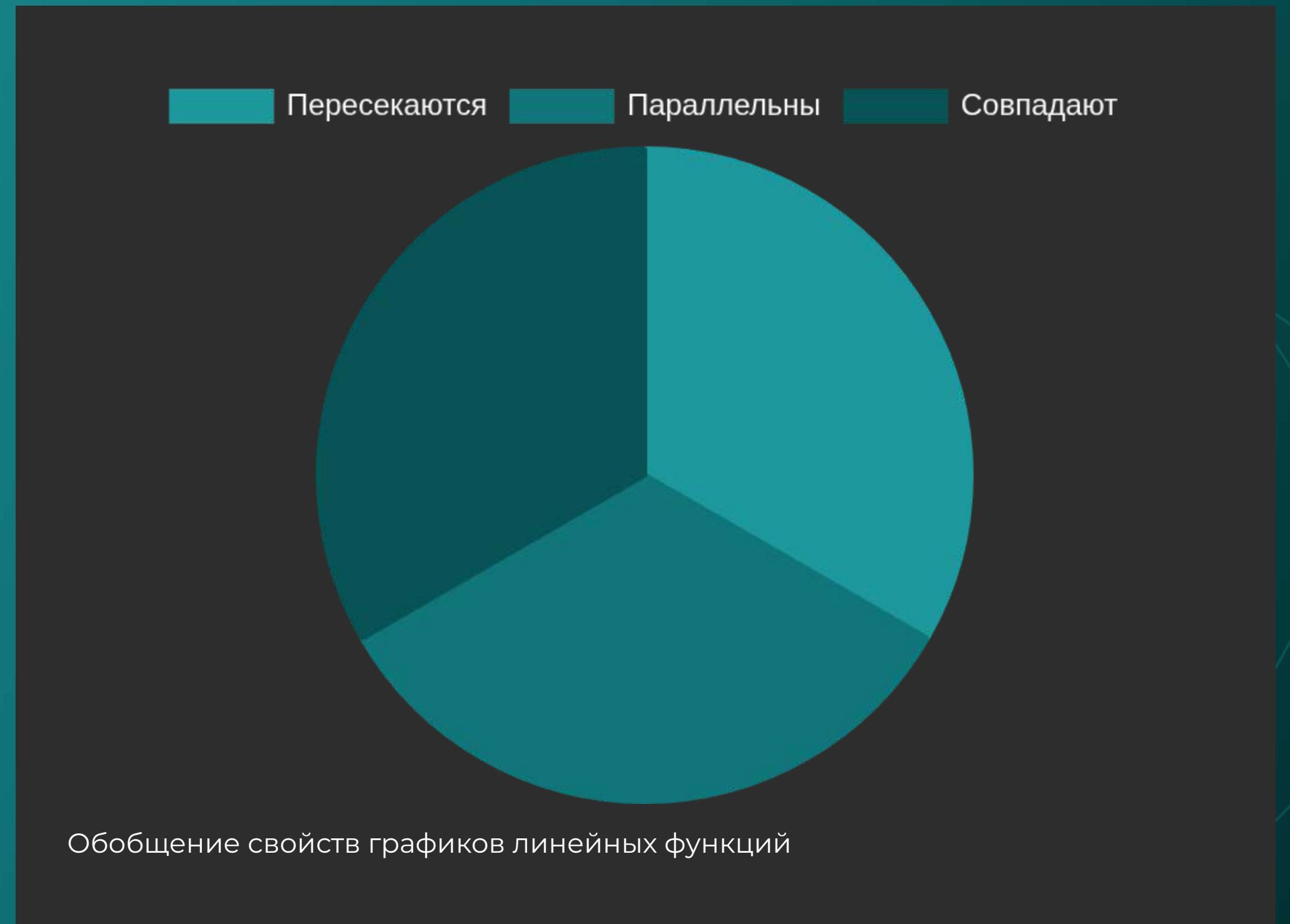
Условие	Расположение	Пример
$k_1 \neq k_2$	пересекаются	$y=2x+1; y=-x+3$
$k_1 = k_2, b_1 \neq b_2$	параллельны	$y=3x+2; y=3x-4$
$k_1 = k_2, b_1 = b_2$	совпадают	$y=x+5; y=x+5$

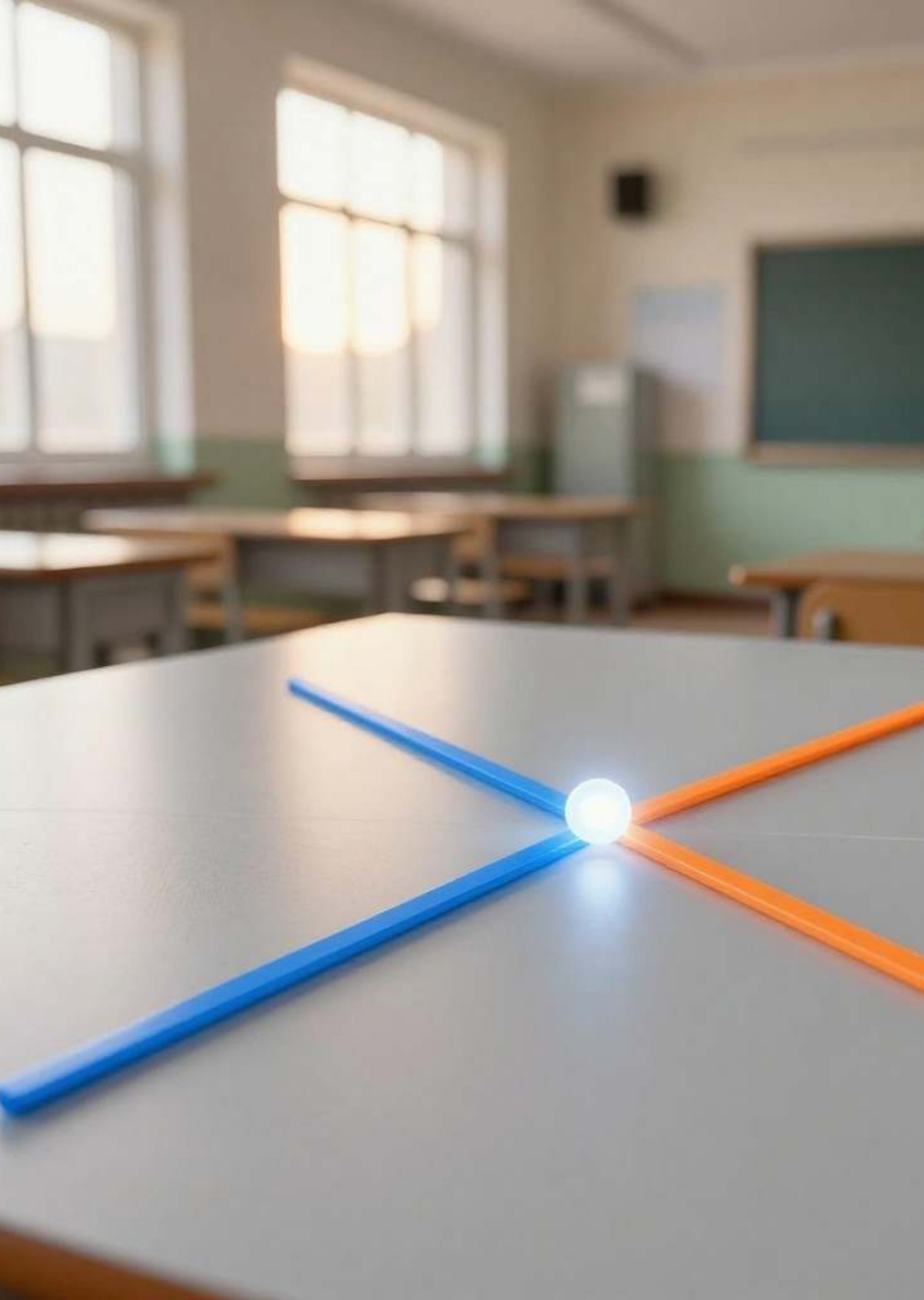
Сравнение коэффициентов линейных функций $y = kx + b$

Сколько бывает вариантов расположения

У двух линейных функций есть только три возможных отношения на плоскости.

Все случаи равновероятно описываются сравнением k , а затем b .





Пересекающиеся прямые

Разные наклоны

Если коэффициенты k различны, прямые идут по-разному: одна может подниматься, другая — опускаться. Поэтому их графики обязательно встречаются в одной точке.

Одна общая точка

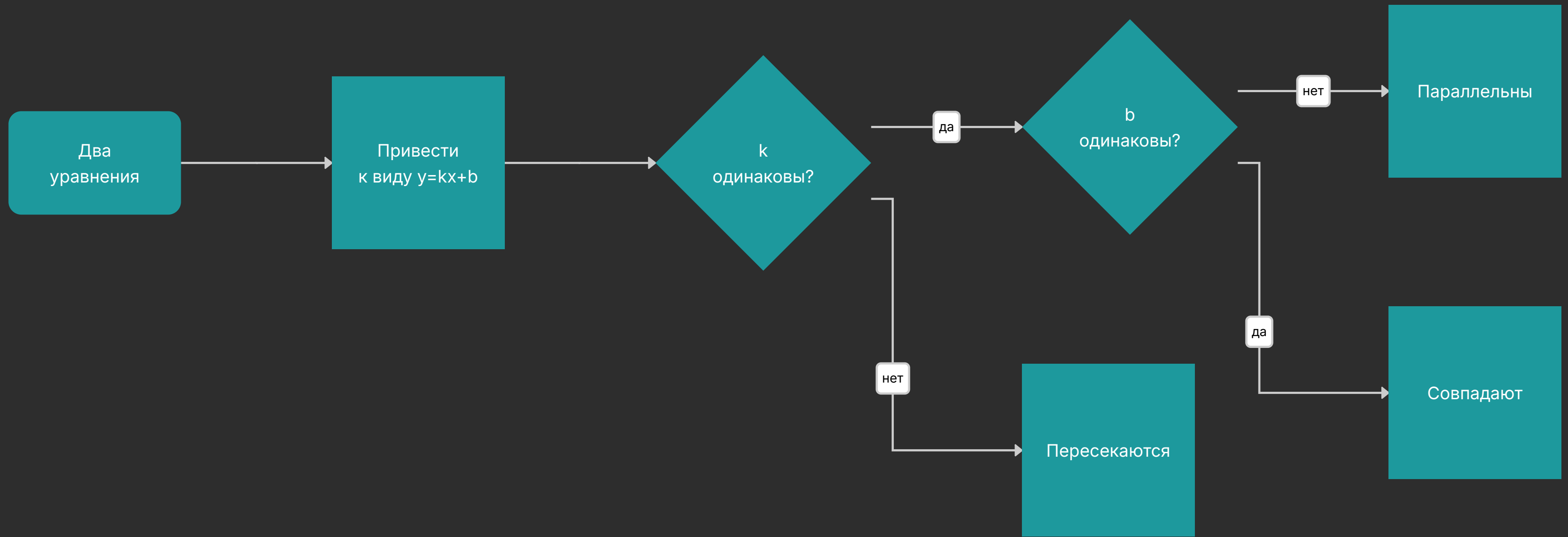
Точка пересечения принадлежит обеим прямым сразу. Её координаты находят, решая систему двух линейных уравнений, потому что нужно одно и то же x и одно и то же y .

Пример на плоскости

Например, графики $y = 2x + 1$ и $y = -x + 3$ пересекаются под углом. На рисунке удобно отметить место встречи и подписать оба уравнения.

Как определить расположение прямых

Алгоритм основан на последовательном сравнении коэффициентов k и b .



Параллельные прямые

1.

Одинаковый наклон

Параллельные прямые имеют равные коэффициенты k , поэтому они направлены одинаково. На координатной плоскости такие графики никогда не сближаются и не пересекаются.

2.

Разные уровни

Если значения b различны, прямые находятся на разной высоте относительно оси Oy . Они остаются на постоянном расстоянии друг от друга во всех точках.

3.

Пример

Уравнения $y = 3x + 2$ и $y = 3x - 4$ описывают параллельные прямые. У них одинаковый наклон, но разные точки пересечения с осью Oy .

Совпадающие графики



Одинаковые коэффициенты

Если у двух функций совпадают k и b , то их графики полностью совпадают. На плоскости это одна и та же прямая, просто записанная дважды.



Разные записи

Иногда уравнение сначала выглядит иначе, но после преобразования принимает вид $y = kx + b$. Тогда легко проверить, совпадают ли значения коэффициентов.



Одна линия

Например, $y = 2x + 6$ и $2y = 4x + 12$ после упрощения дают один и тот же график. У них бесконечно много общих точек.

Сравнение уравнений по коэффициентам

Уравнение 1	Уравнение 2	k1 и k2	b1 и b2	Вывод
$y=x+5$	$y=x-1$	равны	разные	параллельны
$y=-2x+3$	$y=4x+3$	разные	равны	пересекаются
$y=0,5x-2$	$y=0,5x-2$	равны	равны	совпадают

Примеры линейных функций в форме $y = kx + b$

Три примера показывают, как по k и b быстро определить взаимное расположение прямых.

Сравнение коэффициентов даёт ответ без построения графиков: сначала k , затем b . Это самый быстрый способ определить вид взаимного расположения.

Как находят точку пересечения



1. Записывают уравнения

Обе прямые приводят к удобному виду и рассматривают как систему двух уравнений с двумя неизвестными.

2. Приравнивают выражения

Если обе функции выражены через y , их правые части приравнивают, чтобы найти общий x .

3. Находят координату x

Решают полученное уравнение и получают значение x , которое подходит сразу для обеих прямых.

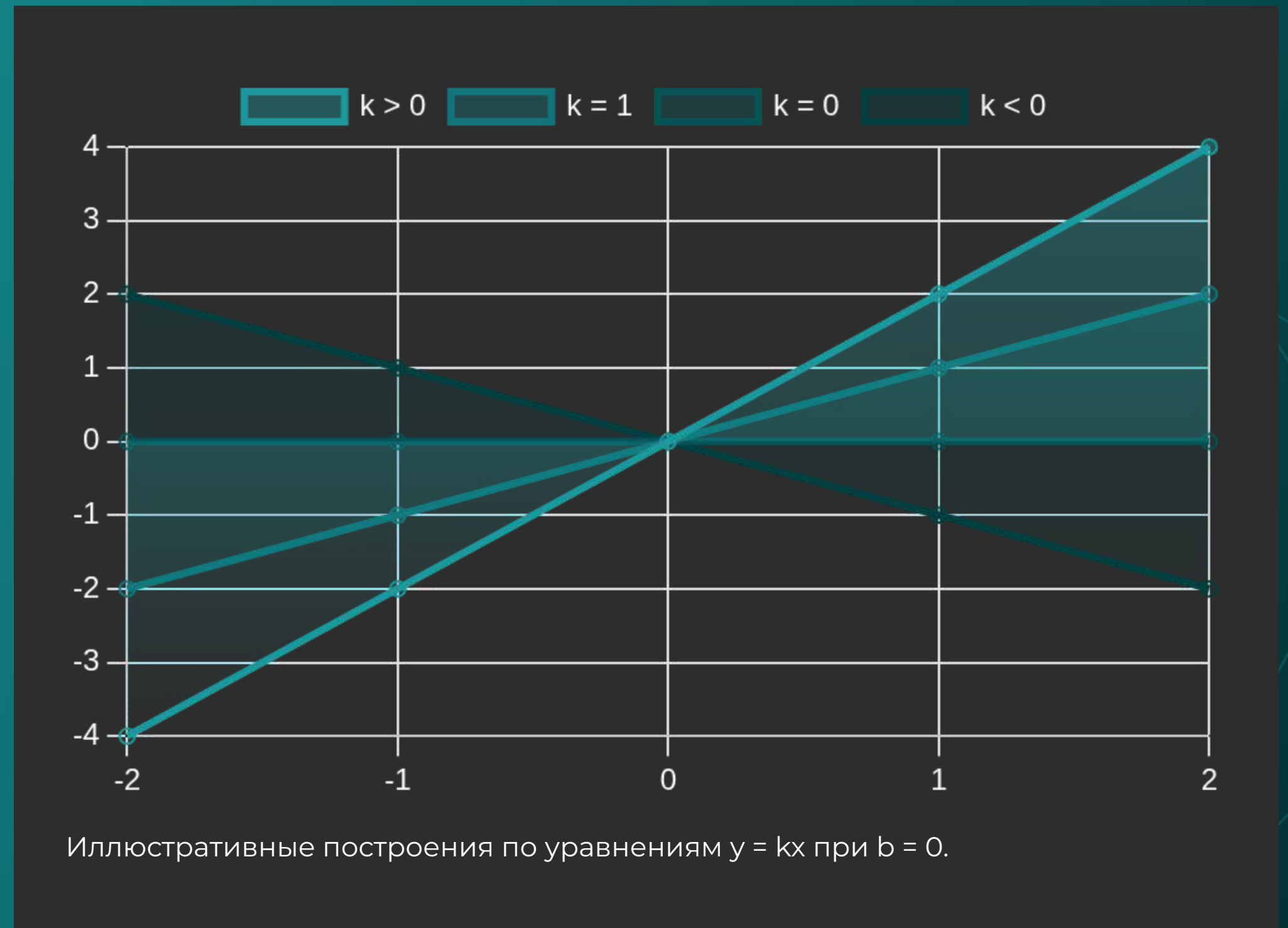
4. Подставляют и проверяют

Найденный x подставляют в одно из уравнений, вычисляют y и записывают точку пересечения.

Как коэффициент k меняет наклон

Для всех линий выбрано одинаковое значение $b = 0$, чтобы заметнее увидеть влияние только коэффициента k .

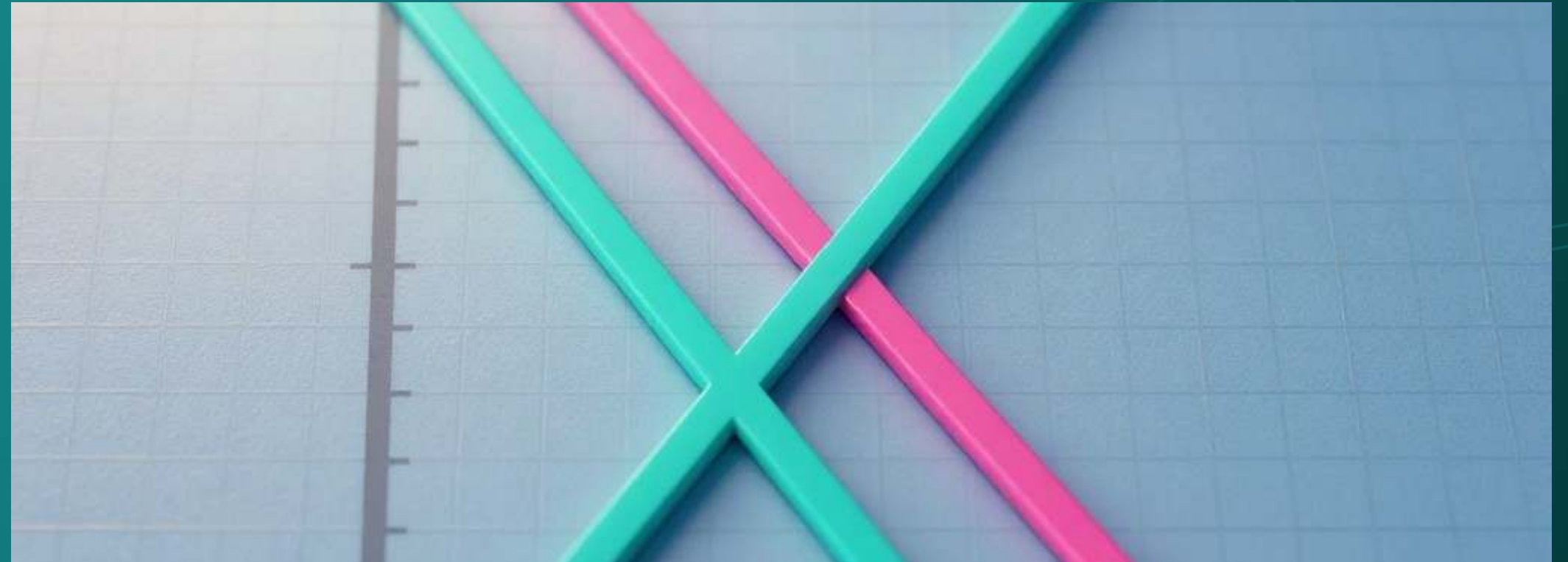
Знак k определяет направление прямой, а модуль — её крутизну: чем больше $|k|$, тем сильнее наклон.



Как свободный член b сдвигает прямую

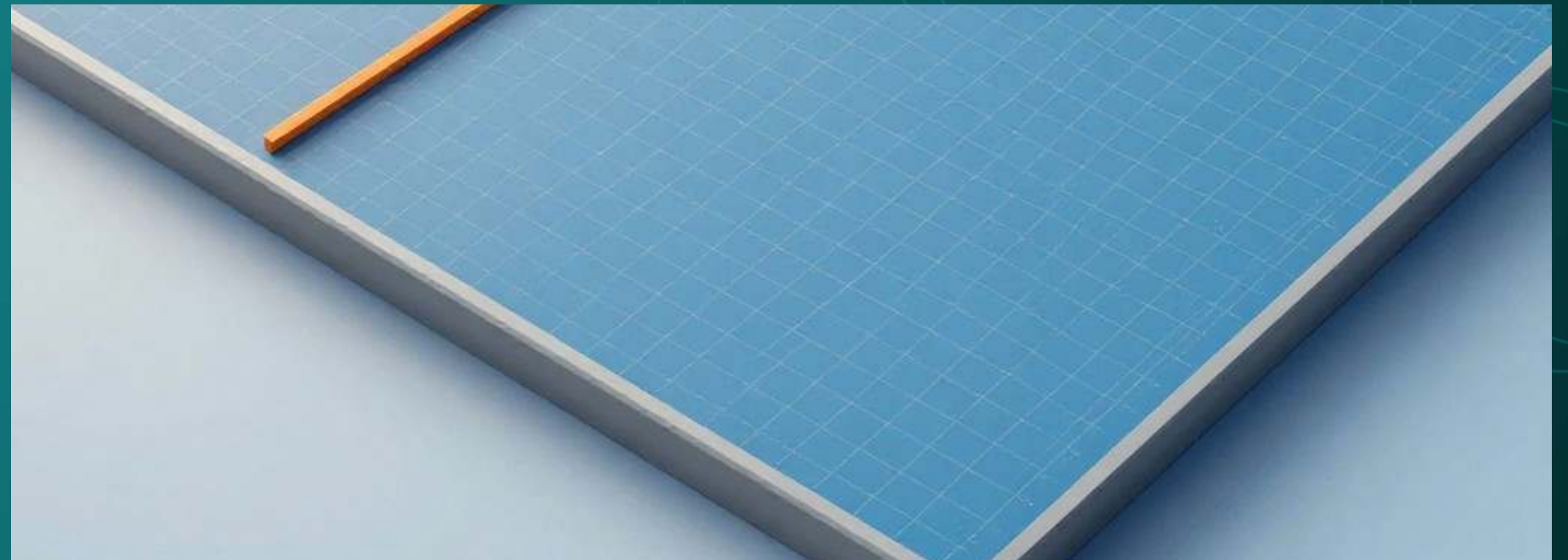
Одна прямая выше другой

Две прямые могут идти в одном направлении, но располагаться на разной высоте. Так бывает, когда коэффициент k одинаковый, а b различается. На рисунке удобно показать две параллельные линии с разными точками пересечения оси Oy .



Сдвиг без изменения наклона

Изменение b не поворачивает график и не делает его круче. Прямая просто поднимается или опускается, сохраняя тот же наклон. Поэтому по одному только b можно понять, где окажется линия на координатной плоскости.



Типичные ошибки при сравнении графиков

1. Смотрят только на b

Некоторые ученики замечают лишь свободный член и сразу делают вывод. Но именно коэффициент k показывает наклон, поэтому сначала нужно сравнить его, иначе легко перепутать пересечение с параллельностью.

2. Путают близость и совпадение

Если линии расположены очень близко, это ещё не значит, что они совпадают. Совпадение возможно только тогда, когда уравнения после преобразования дают одинаковые значения k и b .

3. Не приводят уравнения к виду $y = kx + b$

Уравнения в разных формах могут выглядеть непохожими, хотя описывают одну прямую или две параллельные. Поэтому перед сравнением их обязательно приводят к стандартному виду.



Примеры уравнений и выводы

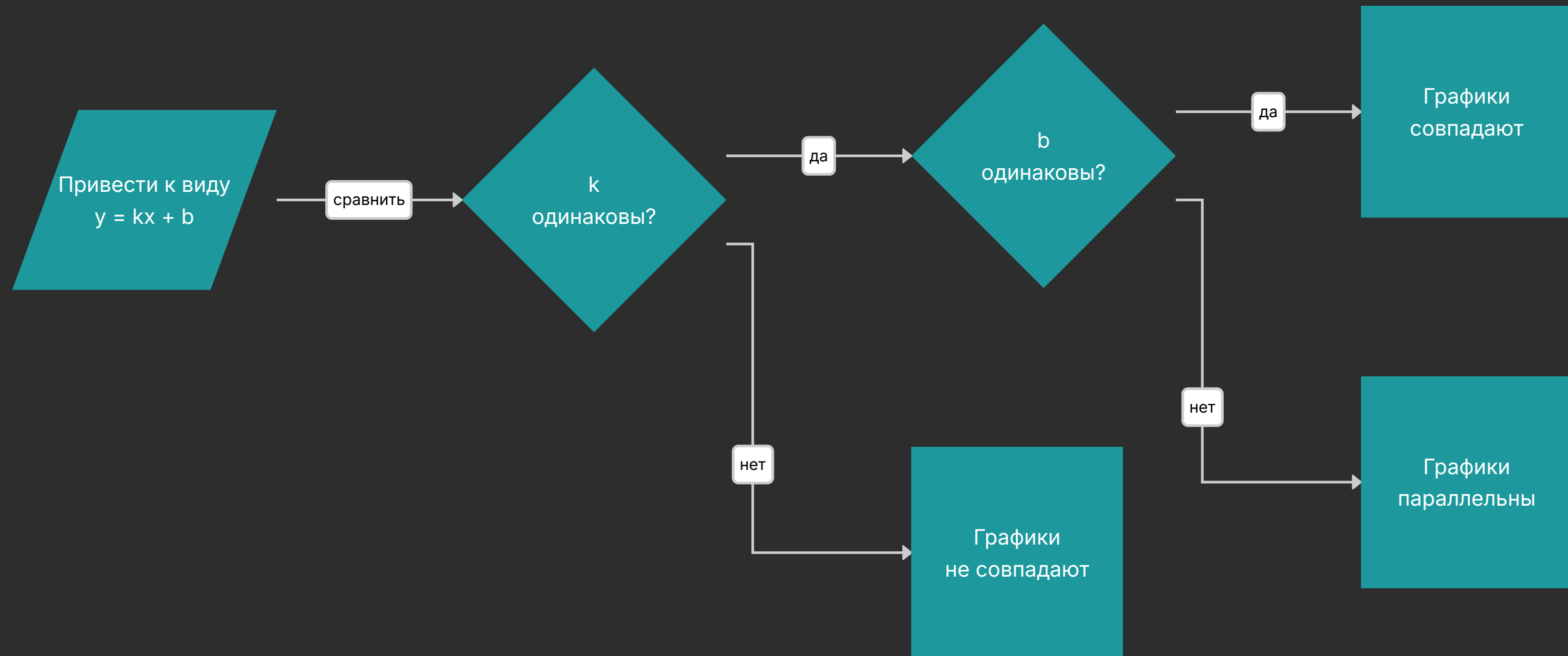
Сравним коэффициенты k и b в трёх типичных ситуациях.

Сначала сравнивают k : если они различны, прямые пересекаются. Если k одинаковы, по b определяют, параллельны графики или совпадают.

Уравнения	k	b	Вывод
$y = -x + 2; y = 2x - 1$	разные	разные	пересекаются
$y = 4x + 7; y = 4x - 3$	одинаковые	разные	параллельны
$y = 3x - 5; 3y = 9x - 15$	одинаковые	одинаковые	совпадают

Проверка совпадения графиков

Последовательность сравнения двух линейных уравнений в виде $y = kx + b$



Где используется сравнение линейных функций



Движение

Линейные зависимости помогают описывать путь, время и скорость. Сравнение двух графиков показывает, когда один вариант движения станет выгоднее или быстрее другого.



Стоимость

В задачах о цене две прямые могут представлять разные тарифы. Их пересечение показывает, при каком количестве услуг или минут оба варианта стоят одинаково.



Время

Если процесс меняется равномерно, его удобно записать линейной функцией. Тогда можно сравнить, какой из двух процессов завершится раньше или где их значения совпадут.



Практические модели

Сравнение прямых помогает читать графики в учебных и жизненных задачах. Так математика становится удобным инструментом для анализа реальных ситуаций.

Главные признаки трёх случаев

Одна и та же формула $y = kx + b$ может описывать разные ситуации. Всё решают значения коэффициентов.

Три равные части показывают, что вариантов ровно три: пересечение, параллельность и совпадение.

- Разные k — пересекаются
- Одинаковые k , разные b — параллельны
- Одинаковые k и b — совпадают



Обобщение правил сравнения линейных функций.

3

**признака достаточно,
чтобы быстро
определить взаимное
расположение двух
прямых.**

Сначала сравнивают наклон, затем свободный член. Такой порядок помогает без лишних вычислений понять, пересекаются ли прямые, параллельны они или совпадают.

Правило по теме «Взаимное расположение графиков линейных функций»

Главное, что нужно запомнить

В линейной функции $y = kx + b$ именно коэффициенты k и b определяют, как расположены две прямые. Это простое правило помогает быстро читать графики и решать задачи.