

Объемы подобных тел: главный закон масштаба

Подобные тела похожи по форме, а размеры меняют объемы по закону куба масштаба.

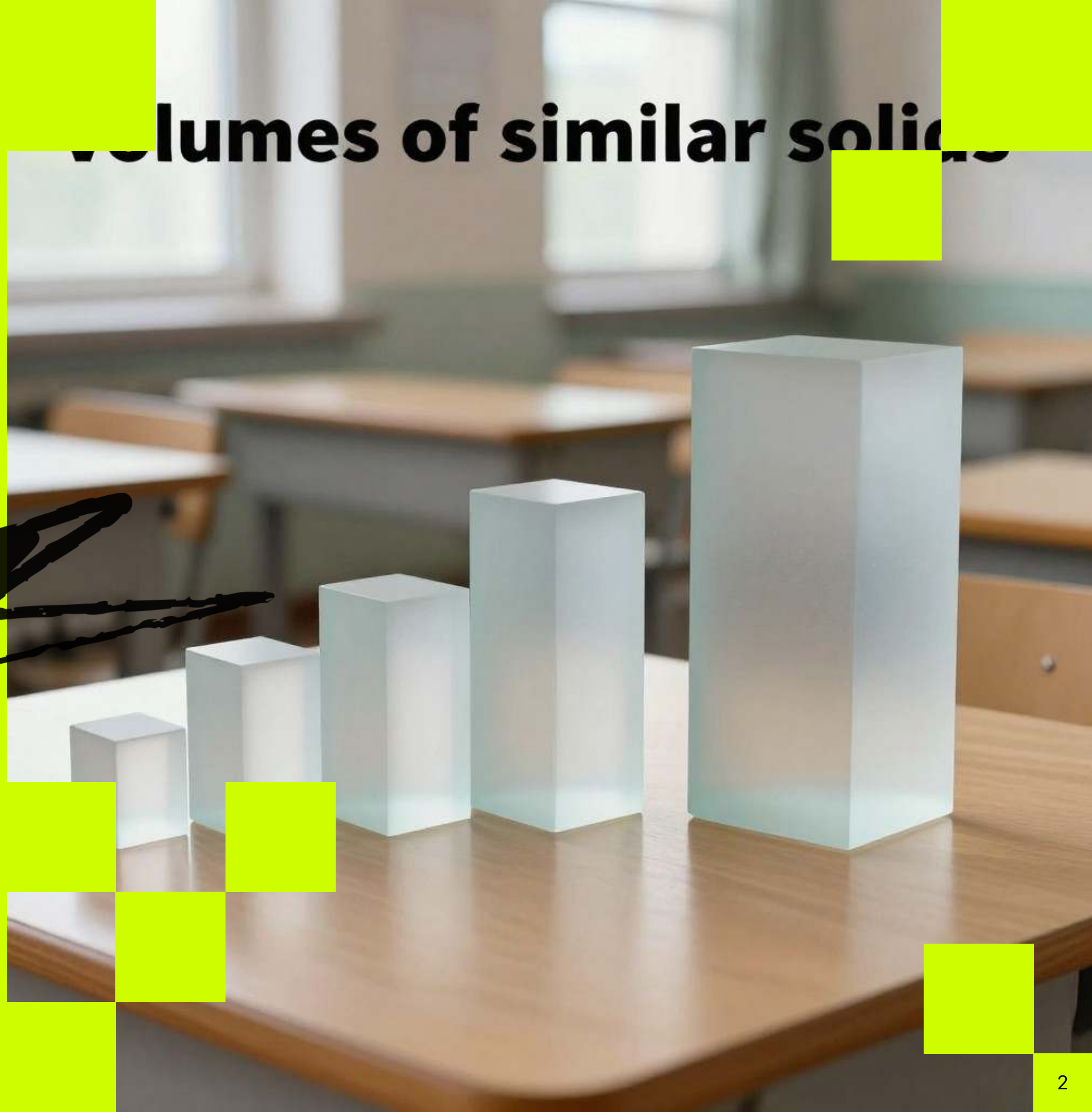


Что изучает тема «Объемы подобных тел»

Volumes of similar solids



В геометрии 10 класса подобие связывает фигуры одинаковой формы: сохраняются углы и пропорции. Рассматривают призмы, пирамиды, цилиндры, конусы и шары, а также модели. Ключевые опоры темы — коэффициент подобия и формулы объемов.



Коэффициент подобия и соответствующие размеры

Коэффициент подобия k показывает, во сколько раз один объект больше другого именно по линейным размерам: длинам ребер, высотам, радиусам и образующим.

Для подобных тел равны отношения соответствующих величин: если рассмотреть любые «одинаковые» ребра или высоты, то их отношение будет постоянным и равно k .

Например, при $k = 2$ все линейные размеры увеличиваются в 2 раза; при $k = 1/2$ они уменьшаются в 2 раза — форма остается той же, меняется масштаб.



Как меняются площадь и объем при увеличении масштаба

При росте линейного масштаба в 3 раза объем увеличивается в 27 раз, поэтому изменения быстро становятся «заметно больше».

Сравнение с площадями показывает: объем чувствительнее к масштабу, и именно кубический закон объясняет это расхождение.



Правило подобия: при переходе к объем умножается на k^3 (школьный курс геометрии, 10 класс).

Формула объема подобных тел

- Для подобных тел отношение объемов равно кубу коэффициента подобия: $V_2 / V_1 = k^3$. Значит, чтобы получить новый объем, нужно умножить исходный на k^3 .
- Если известен объем первого тела и во сколько раз увеличились соответствующие линейные размеры, второй объем находится точным умножением на куб коэффициента. Это переносит расчет от масштаба к вместимости.



Сравнение коэффициента подобия, площади и объема

Площадь квадрата S пропорциональна квадрату его стороны a : $S = a^2$.
Объем куба V пропорционален кубу его стороны a : $V = a^3$.

Показано, как при росте k множители площади и объема ведут себя по разным степеням масштаба.

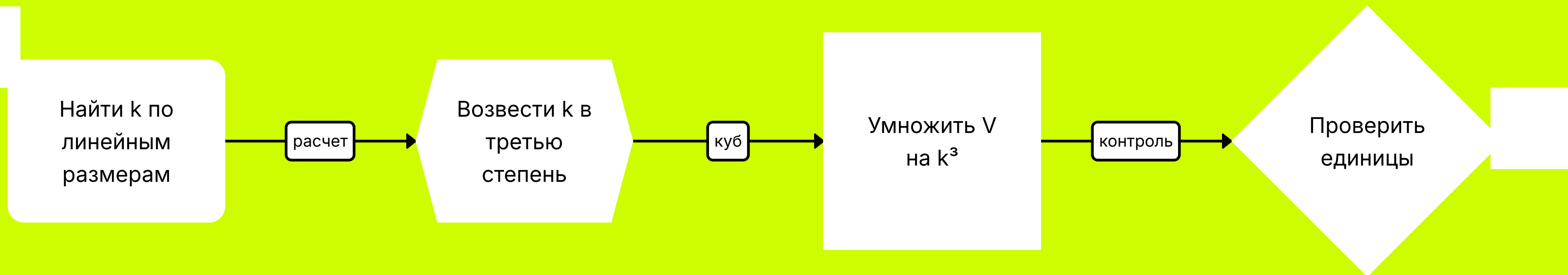
Даже небольшое увеличение k заметно сильнее увеличивает объем, чем площадь: рост идет по кубу.

k	Множитель площади	Множитель объема
1	1	1
1,5	2,25	3,375
2	4	8
3	9	27

Правило подобия в школьной геометрии: площади масштабируются как k^2 , объемы — как k^3 .

Алгоритм решения задач на объемы подобных тел

Логика школьных задач на подобие: сначала находят k по линейным размерам, затем применяют кубический закон объемов.



Подобные призмы и параллелепипеды



Сохраняется геометрия ребер

У подобных призм и параллелепипедов все соответствующие ребра, высоты и диагонали относятся как один и тот же коэффициент k . Поэтому формы остаются неизменными, меняется только масштаб.



Единый линейный масштаб k

Чтобы перейти от одного тела к другому, достаточно знать, во сколько раз увеличились линейные размеры. Отношения высот и диагоналей автоматически совпадут с этим же k , без дополнительных измерений.



Объем растет как k^3

Когда к пропорции добавляется «третье измерение», объем подчиняется кубическому закону: $V_2 / V_1 = k^3$. Это особенно важно при сравнении коробок, упаковки и макетов.

Подобные пирамиды и конусы

Почему «подобие» видно на сечениях

У подобных пирамид и конусов совпадают формы оснований и сохраняются углы наклона боковых ребер или образующих. Поэтому «геометрический силуэт» остается тем же, но высота и радиус увеличиваются вместе. Именно это позволяет переносить расчеты с одной фигуры на другую.



Кубический рост объема при удвоении масштаба

Если все линейные размеры увеличиваются в 2 раза, объем возрастает в 8 раз. Это хорошо иллюстрируется сравнением двух конусов: увеличенный радиус и высота дают мощный прирост вместимости. Так кубический закон становится очевидным в реальных задачах.



Наглядный рост объема при увеличении масштаба

Когда k увеличивается с 2 до 4, объем не удваивается, а возрастает в 8 раз: $8 \rightarrow 64$. Это и есть «кубическая чувствительность».

Диаграмма подчеркивает: объем подчиняется закону k^3 , поэтому при переходе от модели к реальному объекту вместимость меняется драматически.



Правило подобия: $V_2 / V_1 = k^3$ (школьный курс геометрии, 10 класс).

1000

**Если радиус увеличить в 10 раз,
объём возрастёт в 1000 раз — это
следствие кубической зависимости.**

Правило подобия в школьной геометрии (10 класс), формула объёма шара $V=4/3\pi r^3$.



Все шары подобны: форма полностью задаётся радиусом. Поэтому при изменении масштаба объём растёт по закону k^3 , и даже небольшое увеличение радиуса даёт заметный прирост вместимости.



Типичные ошибки в задачах на подобие и объем

Ошибка	Почему неверно	Как сделать верно
Умножают объём на k	Объём масштабируется по кубу, а не по первой степени	Сначала находят k по линейным размерам, затем умножают объём на k^3
Смешивают площадь и объём	Площадь растёт как k^2 , а объём — как k^3	Для площадей используют k^2 , для объёмов — k^3
Берут несоответствующие линейные размеры	Коэффициент подобия должен связывать только «одинаковые» элементы	Сопоставляют соответствующие высоты/радиусы/рёбра у подобных тел
Забывают единицы	Несовпадение единиц ломает итоговое значение	Приводят все длины к одной системе до вычислений

Типовые задания школьного курса геометрии.

В задачах на подобие легко перепутать, какую степень имеет коэффициент: линейные размеры меняются как k , площади — как k^2 , объёмы — как k^3 . Ниже — самые частые сбои при решении.

Большинство ошибок сводится к нарушению закона масштабирования: коэффициент должен проходить через нужную степень, а сопоставляться обязаны соответствующие размеры.

Масштаб чертежа и реальный объем

Старт: масштаб 1:10

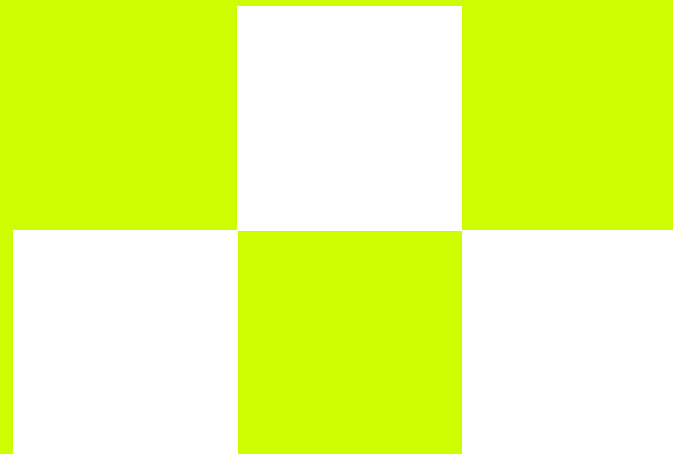
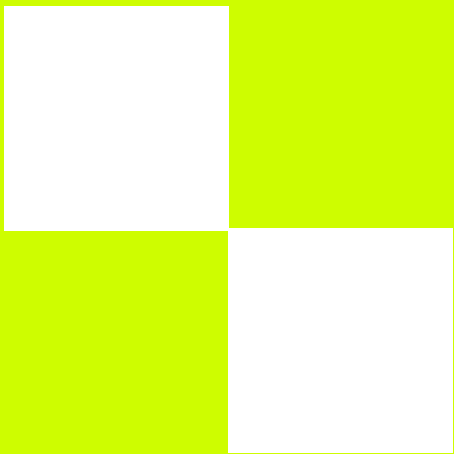
Модель сделана в 10 раз меньше оригинала по линейным размерам. То есть любой «длины» на чертеже соответствует десятикратная реальная величина.

Переход к объёму

Объём зависит от трёх линейных измерений, поэтому уменьшается в $10^3 = 1000$ раз. Отсюда разница по вместимости и массе между макетом и реальным объектом.

Переход к площади

Поскольку площадь зависит от двух линейных измерений, она уменьшается в $10^2 = 100$ раз. Визуальная «плоскость» модели похожа, но её геометрическая величина заметно меньше.



Как найти неизвестный линейный размер по объемам

Процесс решения основан на том, что для подобных тел $V_2/V_1 = k^3$.



Практическое значение подобия в архитектуре и технике

Макет, который «вмещает» по-настоящему

Архитекторы делают уменьшенные модели зданий и проверяют композицию, пропорции и сценарии движения. Чтобы оценить вместимость и объём помещений, они связывают модель и реальный объект через масштаб: объёмы считаются по k^3 . Это помогает планировать материалы и эксплуатационные ресурсы.



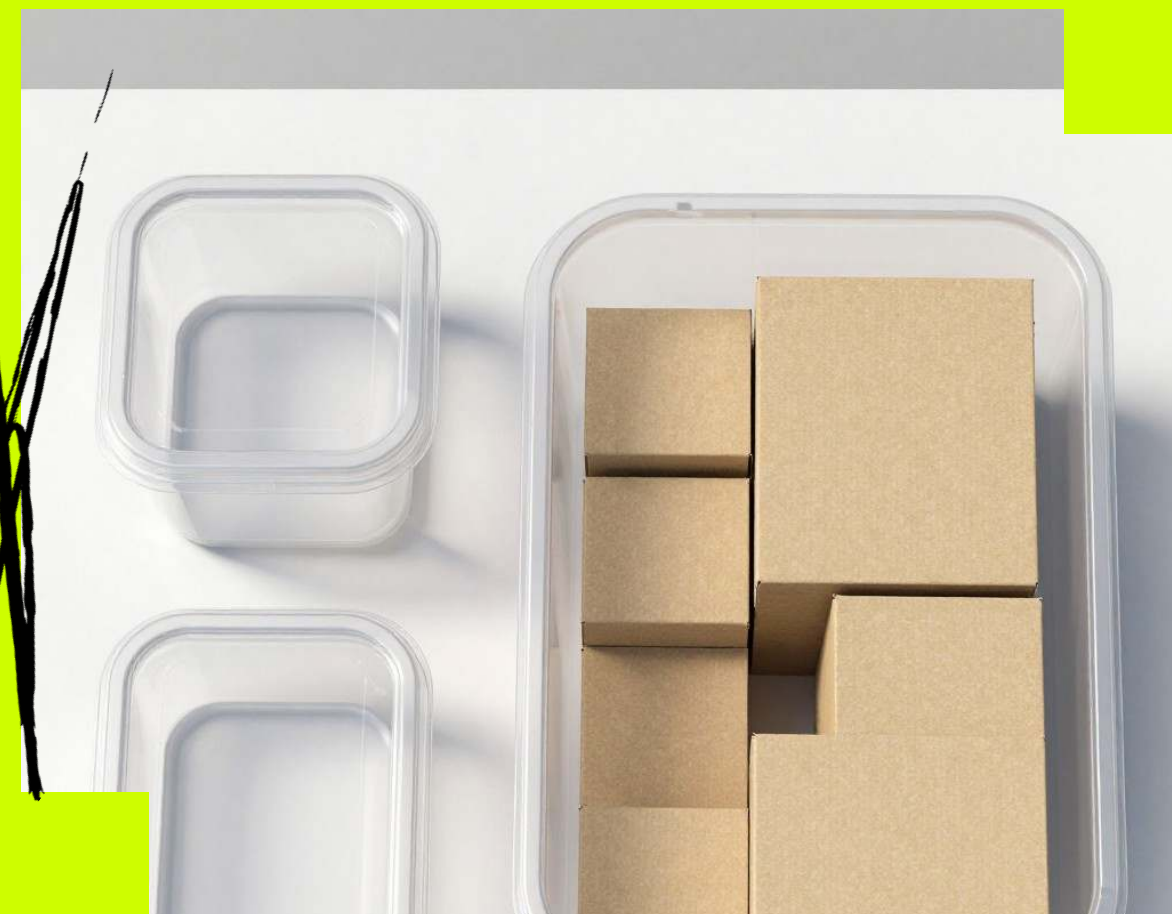
3D-модели и расчёт с «кубическим» масштабом

В инженерных проектах часто сначала моделируют объект в CAD, а затем пересчитывают параметры под нужный размер. Особенно важно помнить: при изменении масштаба «прибавка» в объёме идёт быстрее, чем кажется по картинке. Тогда точнее оцениваются расход материалов, объём резервуаров и масса конструкций.



Упаковка и экономия пространства

Проектирование упаковки опирается на подобие форм: подбирают размеры под продукт, сохраняя геометрию. Когда меняется высота и ширина, объём тары растёт по кубическому закону, поэтому быстро меняются количество содержимого и эффективность логистики. Так макет превращается в расчёт, а не только в рисунок.



Сравнение линейного, площадного и объемного роста

При переходе от $k=2$ к $k=4$ линейный размер меняется лишь вдвое, а объём — в 8 раз. Поэтому «куб» всегда заметнее на практике.

Разные степени k создают разную чувствительность к масштабу: k^2 влияет умеренно, а k^3 резко усиливает изменения. Это ключ к уверенным расчётам.



Правило подобия: линейный масштаб k , площади k^2 , объёмы k^3 . Примеры для $k=2,3,4$.

Обратная задача: найти коэффициент подобия

Если известны объёмы двух подобных тел, сначала вычисляют отношение V_2/V_1 . По закону подобия оно равно k^3 , поэтому дальше нужен переход от куба к корню.

Далее извлекают кубический корень: $k = \sqrt[3]{V_2/V_1}$. Это и есть коэффициент подобия, который переводит любую соответствующую длину или радиус одного тела в другое.

Например, при отношении объёмов 27:1 получаем $k = \sqrt[3]{27} = 3$. После этого искомый линейный размер находят умножением соответствующей длины на найденный k .

Основные формулы объемов в теме подобия

Вспомогательная таблица, которая поможет вам вспомнить формулы для вычисления объёмов. Вспомогательная таблица, которая поможет вам вспомнить формулы для вычисления объёмов.

Таблица собирает стандартные выражения для объёмов. При переходе между подобными фигурами величина объёма меняется всегда в k^3 раз, даже если используется разная формула.

Выбирайте формулу по типу фигуры, а затем помните: масштабирование объёма одинаково для всех подобных тел — через k^3 .

Фигура	Формула объёма
Призма, цилиндр	$V = S \cdot h$
Пирамида, конус	$V = (1/3) \cdot S \cdot h$
Шар	$V = (4/3) \cdot \pi \cdot r^3$

Школьный курс геометрии (10 класс).

Значение темы для учебных и практических задач



Точность по масштабу

Тема учит переводить модель в реальность: линейные размеры, площади и объёмы меняются по разным степеням. Это делает ответы в задачах проверяемыми и логичными.



Работа с чертежами и макетами

В заданиях на масштаб важно не путать «красивое сходство» с настоящими величинами. Закон подобия позволяет корректно сравнивать размеры и объёмы разных масштабов.



Прогноз вместимости

Когда форма сохраняется, именно кубическая зависимость объёма объясняет резкие изменения вместимости. Умение применять k^3 помогает оценивать «насколько больше» станет объект.



Контроль типичных ошибок

Знание про k , k^2 и k^3 помогает избегать распространённых сбоев: путаницы между площадью и объёмом и неверного применения коэффициента. Это повышает надёжность решений.



Главный вывод по теме объемов подобных тел

Для подобных тел отношение объёмов равно кубу коэффициента подобия: $V_2/V_1 = k^3$.
Линейные размеры задают форму, площади меняются по k^2 , а объёмы — по k^3 ,
обеспечивая точный переход между моделью и реальностью.

