

Сферические треугольники: продолжение темы о геометрии на сфере

Сферический треугольник строится дугами больших окружностей и меняет привычные законы треугольника.



Почему эта тема важна в 10 классе



На листе бумаги мы решаем плоские задачи, а на сфере нужны другие правила. Земля близка к шару, поэтому кратчайшие пути, меридианы и координаты требуют сферической геометрии. Большая окружность играет роль «прямой» на сфере.

Определение сферического треугольника

Сферический треугольник состоит из трёх точек на сфере и трёх дуг больших окружностей, которые попарно соединяют эти точки. Его стороны лежат на поверхности, а не в одной плоскости.

Вершины обычно обозначают буквами A , B , C , а стороны — a , b , c . Сторона a лежит напротив вершины A , сторона b — напротив B , сторона c — напротив C .

Углы измеряются на поверхности сферы в соответствующих вершинах и обозначаются α , β , γ . Поэтому геометрия здесь «разговаривает» с кривизной напрямую, а не прячется за плоскими приближениями.

Элементы и обозначения в сферическом треугольнике



Стороны как дуги больших окружностей

Каждая сторона — это дуга большой окружности. Часто её удобно связывать с центральным углом, который соответствует этой дуге, тогда длина дуги задаётся однозначно и в едином языке.



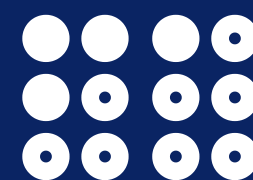
Углы считаются на поверхности

Угол между двумя сторонами измеряют не в центре сферы, а на самой сфере — в вершине треугольника. Геометрический смысл угла остаётся «поверхностным», а не «радиальным».



Стандартные обозначения

Для решения задач используют привычные символы: стороны a , b , c и углы α , β , γ . Так вычисления напоминают планиметрию, но формулы и свойства всё же другие.



Похожесть на планиметрию — с уточнением

Запись делает задачи узнаваемыми, однако результат зависит от кривизны. Поэтому важно помнить: одинаковые буквы не означают одинаковые законы, если мы переходим от плоскости к сфере.

Плоский и сферический треугольник: ключевые различия

Признак	Плоский треугольник	Сферический треугольник
Вид сторон	Отрезки прямых	Дуги больших окружностей
Кратчайшая связь между точками	По отрезку	По дуге большой окружности
Сумма углов	180°	Обычно $> 180^\circ$
Площадь	По планиметрии	Зависит от R и избытка E

Материалы курса планиметрии и сферической геометрии (обобщение).

Сравнение показывает, как кривизна поверхности меняет «геометрию треугольника» — от сторон до площади.

Главная разница — другая геометрическая среда: на сфере треугольник «подчиняется» кривизне, поэтому меняются и суммы углов, и формулы площади.

Большие окружности как стороны треугольника

Большая окружность получается пересечением сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. Поэтому она «наиболее выпрямлена» относительно поверхности: именно по ней путь получается кратчайшим.

Дуга большой окружности между двумя точками представляет кратчайший маршрут по поверхности сферы. В треугольнике такие дуги и образуют стороны, задавая геометрическую фигуру «правильно» для сферы.

Экватор и все меридианы Земли — типичные примеры больших окружностей. Напротив, параллели относятся к малым окружностям и чаще не дают кратчайший путь на сфере между точками.

Сумма углов и сферический избыток

Если сумма углов больше 180° , разница и есть сферический избыток E . Он «наказывает» треугольник за то, что он живёт на кривой поверхности.

По мере роста размеров треугольника избыток обычно увеличивается: поверхность сильнее влияет на геометрию, чем в предельных «почти плоских» случаях.

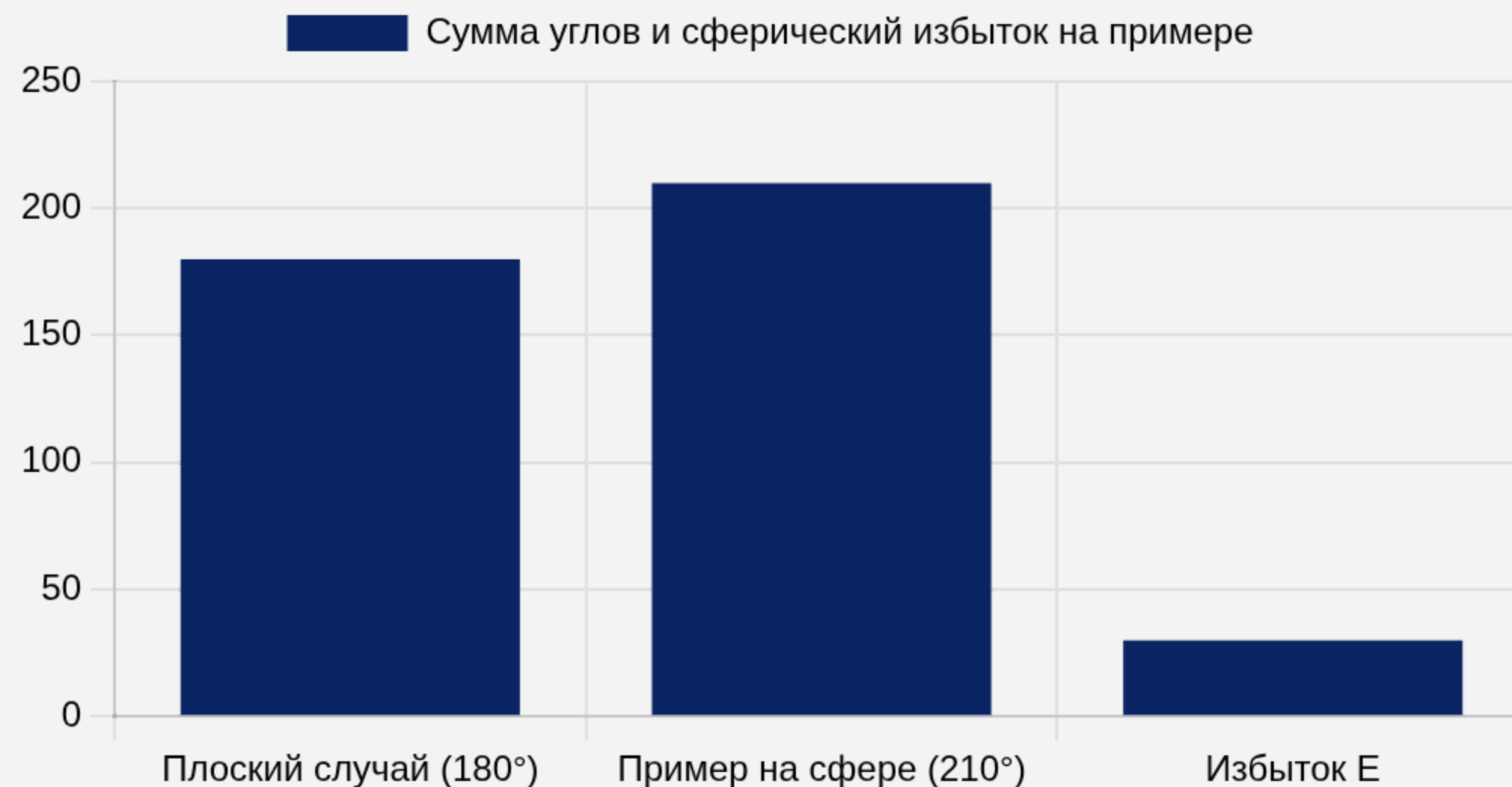


Иллюстрация на основе примера $60^\circ + 80^\circ + 70^\circ = 210^\circ$
(учебная интерпретация).

180°

Сумма углов сферического треугольника возрастает сверх этой величины на значение E

Учебный вывод теоремы о сферическом избытке (основа сферической геометрии).

Тогда выполняется формула $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + E$. Избыток определяется размером треугольника и радиусом сферы: чем треугольник меньше, тем E ближе к нулю.

Площадь сферического треугольника

Площадь сферического треугольника выражается через сферический избыток: $S = R^2 E$, когда E измерен в радианах. Формула связывает площадь непосредственно с кривизной сферы.

Для Земли радиус составляет около 6371 км, поэтому даже небольшой избыток даёт заметную площадь. Это объясняет, почему сферические эффекты нельзя игнорировать в практических задачах.

В школьных вычислениях важно следить за единицами: в выражении для площади фигурируют радианы. Если перейти в градусы, формула перестанет работать в буквальном виде, и результат может «поплыть».

Как решается задача на сферический треугольник

Логика решения в школьном формате: от данных к формуле и обратно к проверке.



Сферический закон синусов

Связь «сторона—угол»

Для сферического треугольника справедливо равенство $\sin a / \sin \alpha = \sin b / \sin \beta = \sin c / \sin \gamma$. Каждая сторона связывается с противолежащим углом, задавая общий вычислительный масштаб.

Когда формула особенно удобна

Закон синусов хорошо применять, когда известны один угол и одна противолежащая сторона, а также ещё один элемент. Тогда с помощью пропорций быстро находятся оставшиеся длины дуг и углы.

Геометрический смысл

Смысл закона синусов в том, что на сфере геометрия «подстраивается» под кривизну: соотношения сохраняют пропорциональность, но значения изменяются из-за сферической постановки углов и дуг.

Сферический закон косинусов

Сферический закон косинусов связывает стороны и углы треугольника так, что он подходит и для неизвестной стороны, когда известны две стороны и угол между ними. Это дополняет закон синусов в более сложных случаях.

Есть и аналогичная формула для углов: по трём сторонам можно вычислить один угол. В школьных задачах это помогает, когда углы не заданы напрямую, но известны дуги.

Для сторон используется версия формулы, где угол между заданными сторонами играет роль «перемычки». Получая значение третьей стороны, вы находите длину соответствующей дуги большой окружности.

На уровне смыслов закон показывает преемственность: формулы похожи на евклидовы, но различается запись, потому что в сферической геометрии угол — характеристика поверхности, а не плоской фигуры.

Основные формулы сферической геометрии

Подбор формулы — главный навык в задачах: она выбирается по тому, какие элементы даны (стороны-дуги, углы на сфере или избыток).
Ниже — компактная опора для ориентации.

Формулы образуют «маршрут» решения: сначала находят неизвестный элемент (угол или сторону) через синусы/косинусы, затем вычисляют сферический избыток и площадь через $S = R^2E$.

Формула	Что находит	Когда применять
$\sin a/\sin \alpha = \sin b/\sin \beta = \sin c/\sin \gamma$	стороны и углы	если удобны пропорции и известны угол с противолежащей стороной
(для сторон) $\cos a = \dots$	сторону	когда известны две стороны и угол между ними
(для углов) $\cos \alpha = \dots$	угол	когда известны три стороны
$S = R^2E$	площадь	когда известен радиус и сферический избыток (углы)

Учебный курс геометрии на сфере (школьная программа); сводка основных соотношений.

Частные случаи сферических треугольников

Прямоугольный сферический треугольник

Если один угол равен 90° , треугольник называют прямоугольным. Такая конфигурация часто возникает при работе с координатными сетками и меридианами, где «перпендикулярность» согласуется с направлением на сфере.

Равнобедренный сферический треугольник

Равнобедренный сферический треугольник имеет равные стороны и равные углы при основании. Симметрия упрощает вычисления: достаточно определить параметры одной «половины», затем восстановить остальные.

Треугольники из пересечений больших окружностей

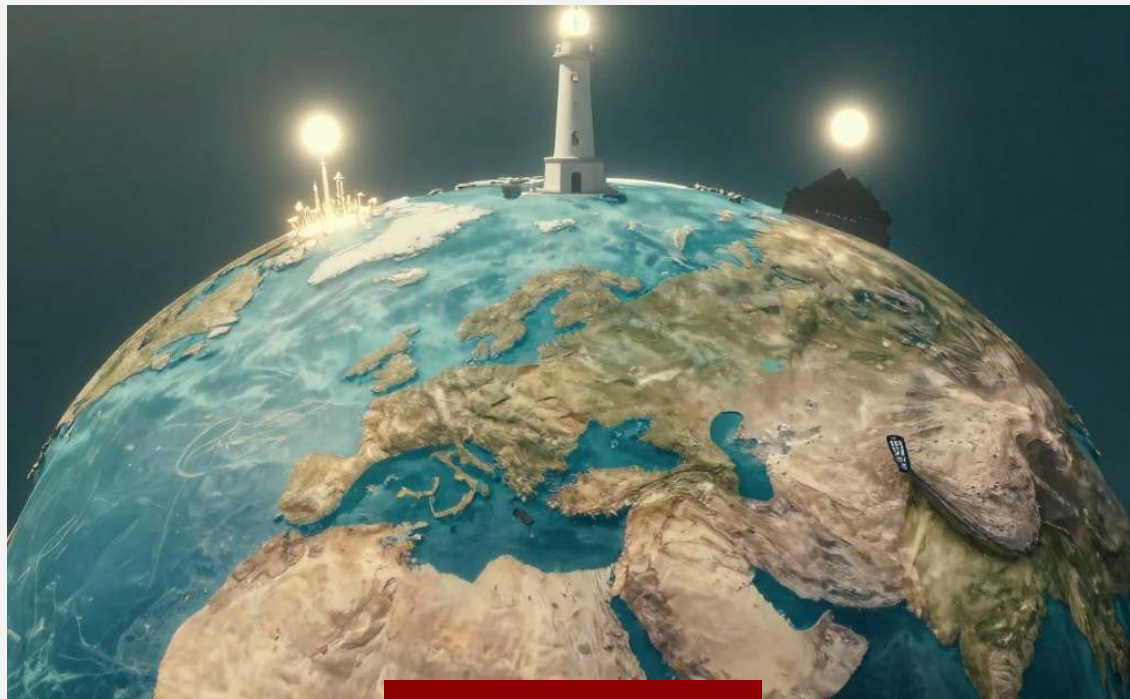
В задачах нередко рассматриваются треугольники, стороны которых лежат на дугах больших окружностей, заданных пересечениями. Тогда одна сторона или один угол служит удобной опорой, и формулы применяются короче.

Сферический треугольник на Земле: визуальные истории для понимания



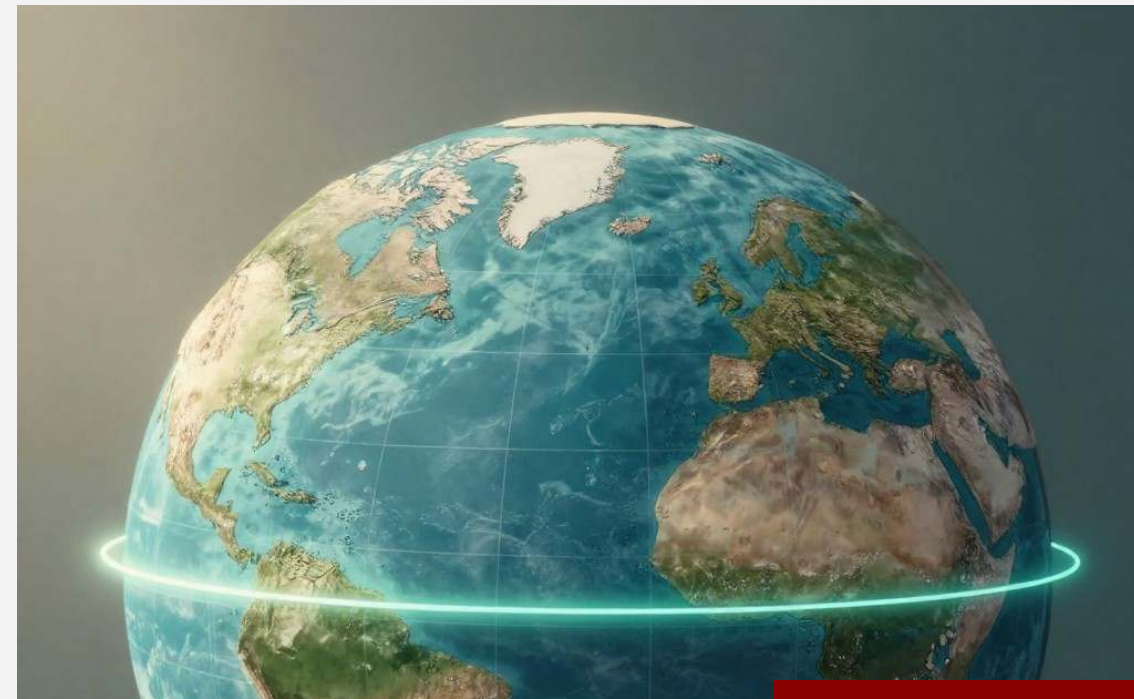
Дуги вместо «прямых»

Когда точки соединяют дугами больших окружностей, привычная «прямая на карте» перестаёт быть кратчайшим путём. На глобусе кратчайшая траектория становится гладкой линией по сфере, а треугольник собирается из трёх таких дуг.



Координаты как вершины треугольника

Представьте три пункта наблюдения: город, маяк и обсерваторию. Их широты и долготы определяют три точки на сфере. Соединяя их дугами больших окружностей, вы получаете сферический треугольник, связанный с реальными углами направлений.



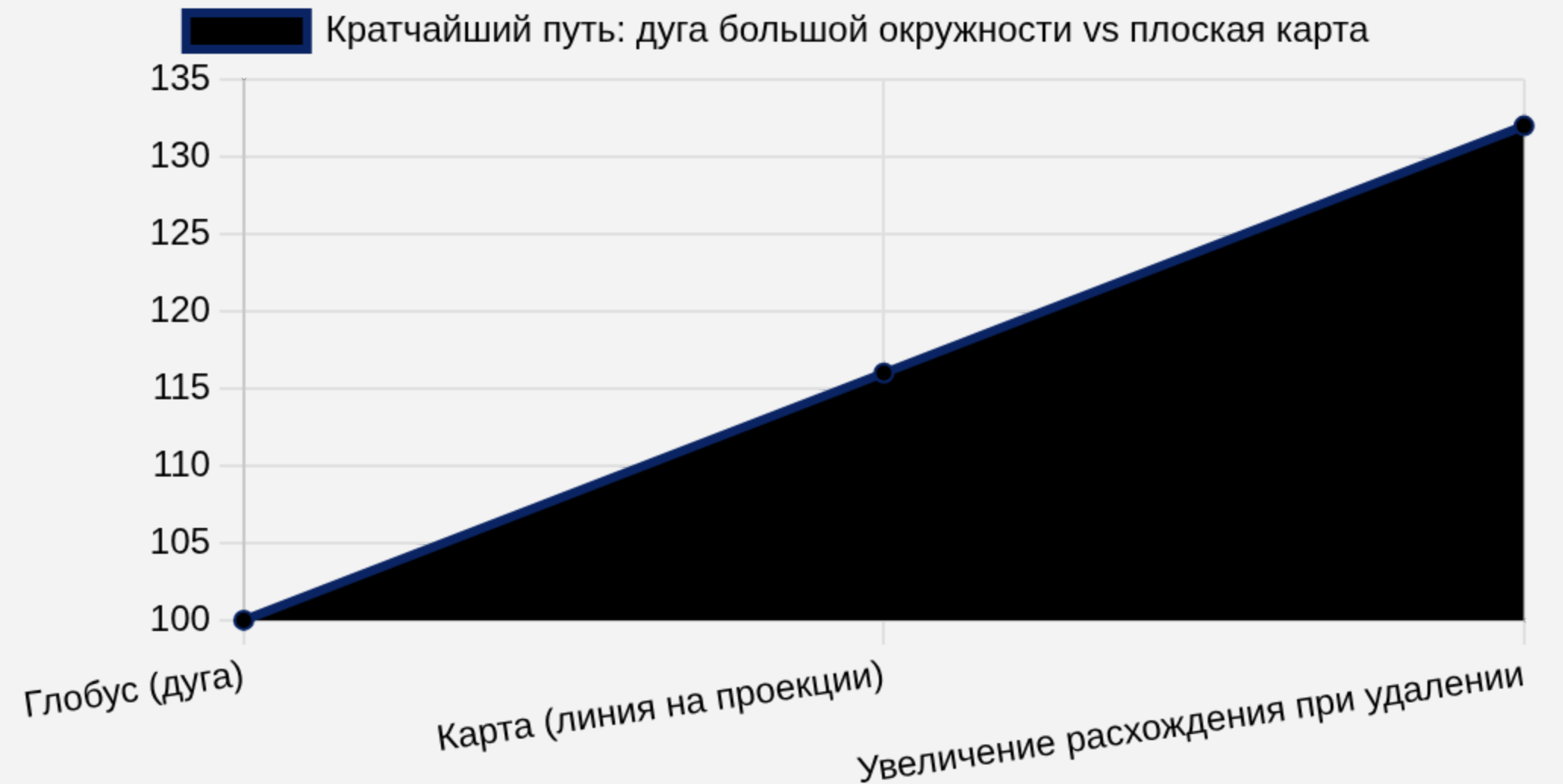
Экватор и меридианы — готовая «разметка»

Экватор и меридианы образуют естественные линии большой окружности. Поэтому во многих задачах географии и навигации они фактически задают стороны сферического треугольника. Карта объясняет смысл, а сфера — точность расчётов.

Кратчайший путь на сфере и на карте

Если точки далеко друг от друга, проекция «растягивает» расстояния и визуально ломает представление о кратчайшем маршруте. Дуга большой окружности остаётся минимальной по поверхности.

Диаграмма показывает: прямолинейность на карте не гарантирует кратчайшесть. На сфере минимальная траектория определяется дугами больших окружностей.



Схематические иллюстративные значения для сравнения подходов (без привязки к конкретному маршруту), отражающие общий эффект проекций и геодезических линий.

Применения в навигации и астрономии

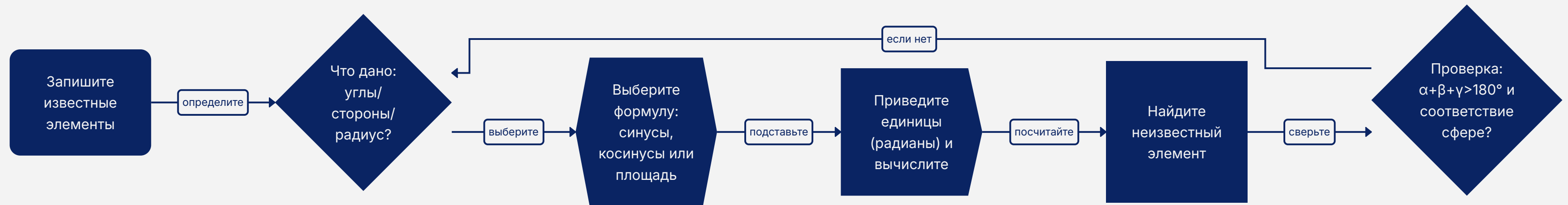
В морской и воздушной навигации координаты точек задают на сфере, а маршруты часто аппроксимируют геодезическими линиями — дугами больших окружностей. Сферическая геометрия помогает уточнять направления и углы.

В картографии и определении координат важны связи между широтой, долготой и расстояниями по поверхности. Там треугольники на сфере становятся удобным языком для расчётов по карте и глобусу.

На небесной сфере аналогичные построения применяют для нахождения положений звёзд и планет относительно горизонта и полюсов. Сферические треугольники описывают углы между направлениями на небе.

Алгоритм решения школьных задач

Схема показывает последовательность действий при вычислениях для сферических треугольников.



Типичные ошибки и проверка результата

Частая ошибка — смешивать дугу большой окружности и плоскую хорду. Сторона сферического треугольника — это именно дуга, поэтому «длины по прямой» применять нельзя без пересчёта.

Нельзя механически переносить формулы плоской планиметрии: сумма углов и выражение для площади на сфере другие. Даже если внешне формулы похожи, ключевые места зависят от кривизны.

Путаница в обозначениях также ведёт к неверным выводам: важно помнить, что противоположная сторона относится к своему углу. Кроме того, углы и стороны должны быть согласованы по «парности» в выбранной формуле.

Проверьте единицы измерения: в формуле площади требуется работа с радианами. Итог проверяют сравнением с правилом $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ и оценкой разумности полученной площади или дуги.

Геометрия сферы делает треугольники «прикладными»

Сферический треугольник показывает, что геометрия зависит от поверхности: его стороны — дуги больших окружностей, сумма углов больше 180° , а площадь связана с сферическим избытком. Формулы синусов и косинусов превращают расчёт в задачу, а Земля, навигация и астрономия дают смысл этим вычислениям.