

Построение отрезка по формуле: метод подобия в геометрии

Как найти длину точно, не измеряя её напрямую?



Зачем нужны построения в геометрии

Такие задачи учат переводить формулу в чертёж, работать с пропорциями и видеть, как параллельные прямые помогают получать нужные отрезки без прямого измерения.



Что называют построением отрезка по формуле



Искомая длина

Построение по формуле означает, что новый отрезок получают из уже известных длин, соблюдая заданное соотношение, а не определяют его только линейкой.

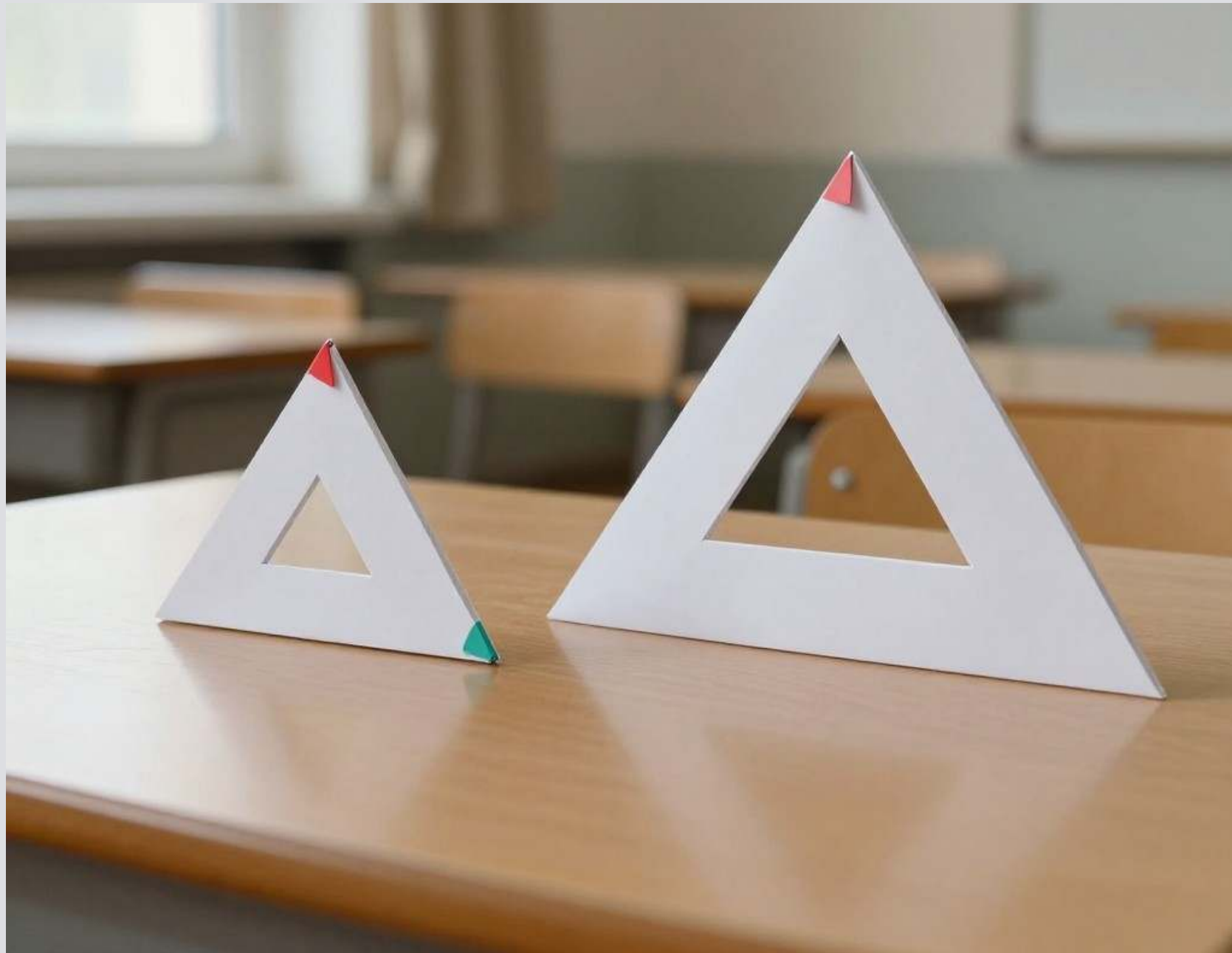
Связь с алгеброй

В 9 классе встречаются формулы вида $x = ka$, $x = bc/a$, $x = (a+b)/2$ и $x = \sqrt{ab}$, где результат выражается через известные отрезки.

Геометрический смысл

Главная идея метода в том, что правильный чертёж сохраняет пропорции и позволяет найти длину через построение, используя циркуль, линейку и точные связи между частями фигуры.

Подобие треугольников как основа метода



Равные углы

У подобных треугольников соответствующие углы равны, поэтому их форма одинакова, а различаются только размеры. Это позволяет переносить нужное отношение с одного чертежа на другой.

Пропорциональные стороны

Соответствующие стороны подобных треугольников пропорциональны. Если известна одна пара длин, можно восстановить другую и получить искомый отрезок в том же масштабе.

Удобство на схеме

На рисунке удобно показать два треугольника с одинаковыми углами и отношением сторон 2:3 или 3:5, чтобы сразу увидеть, как из одного получается другой.

Основные формулы, используемые в построениях

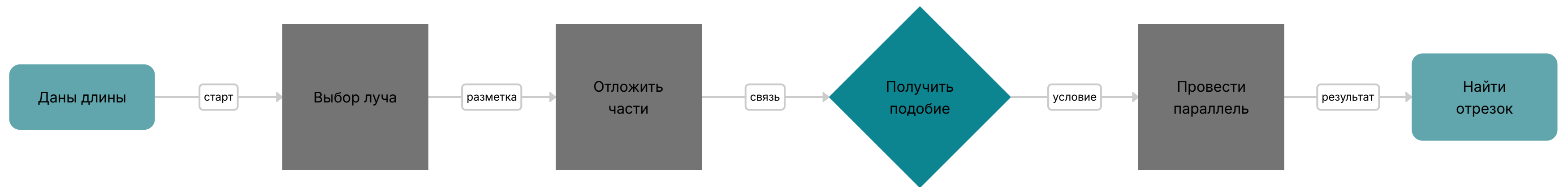
Формула	Смысл
$x = ka$	изменение в k раз
$x = bc/a$	четвёртая пропорциональная
$x = \sqrt{ab}$	среднее пропорциональное
$x = (a+b)/2$	среднее арифметическое

Формулы помогают определить, какую длину нужно построить и какие известные отрезки для этого использовать.

Все формулы сводятся к отношениям между длинами, поэтому их удобно реализовать через подобие и точные построения.

Общий алгоритм построения по подобию

Последовательность действий при решении задач на построение отрезка по формуле

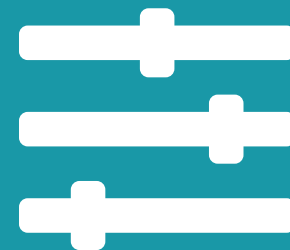


Теорема Фалеса и деление отрезка



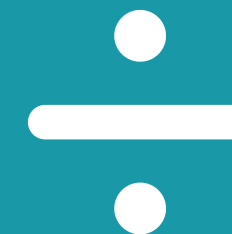
Равные части

Если на одной стороне угла откладывают одинаковые отрезки, то через их концы можно провести параллельные прямые. На другой стороне при этом тоже получаются равные промежутки.



Пропорции сохраняются

Параллельные прямые создают одинаковые отношения между отрезками. Поэтому теорема Фалеса позволяет точно переносить деление с одной стороны угла на другую.



Практика построений

Этот приём используют, когда нужно разделить отрезок на 2, 3, 4 и больше частей. Он особенно удобен, если деление должно быть строго геометрическим, без ошибок измерения.

Деление отрезка в разных отношениях

Чем больше сумма долей, тем меньше становится каждая отдельная часть при одной и той же общей длине.

Отношения с разными знаменателями дают разные доли целого, но принцип построения остаётся одинаковым.



Учебные отношения для задач на деление отрезка; без статистических данных

Построение четвёртой пропорциональной

1

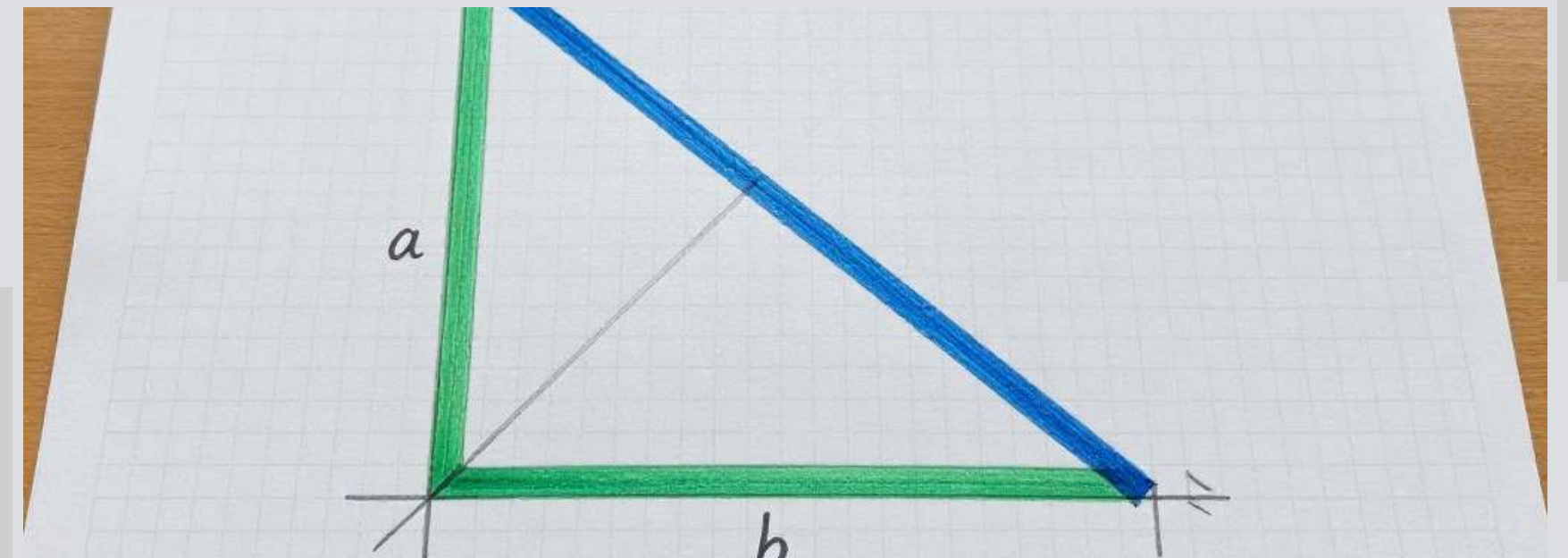
Записать отношение

Сначала фиксируют пропорцию $a : b = c : x$, где три величины известны, а четвёртую нужно найти. Это позволяет сразу увидеть, какую длину должен дать чертёж.

2

Построить вспомогательную фигуру

Далее строят отрезки так, чтобы в чертеже появились подобные треугольники или параллельные линии. Именно они сохраняют нужное отношение между сторонами.



3

Получить результат

После проведения параллельной прямой искомая длина выражается через известные отрезки и равна $x = bc/a$. Так геометрическое построение подтверждает алгебраическую формулу.

Построение среднего пропорционального



Полуокружность как подсказка

На отрезке, составленном из двух данных частей a и b , удобно построить полуокружность. Затем в точке их соединения восстанавливают перпендикуляр. Там, где он пересекает дугу, и находится искомая длина x . Такой чертёж наглядно показывает связь между формулой $x^2 = ab$ и геометрией.

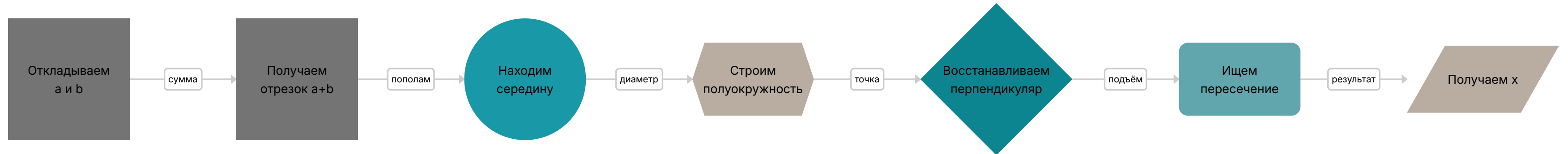


Почему это работает

Секрет построения связан с подобием прямоугольных треугольников, возникающих внутри полуокружности. Их стороны оказываются пропорциональны, поэтому квадрат искомого отрезка равен произведению данных длин. Это один из самых красивых примеров, где алгебра и геометрия отвечают на один и тот же вопрос.

Схема построения отрезка $x = \sqrt{ab}$

Построение через полуокружность, перпендикуляр и подобие прямоугольных треугольников



Как проверяют правильность построения



Типичные ошибки при построении

Ошибка	Последствие	Причина
Параллельность	Нарушается подобие	Неточный наклон
Разметка	Сбивается отношение	Считали части неверно
Перпендикуляр	Длина искажается	Угол построен неточно

Небольшие неточности заметно влияют на итоговую длину и могут нарушить нужное отношение сторон.

Чаще всего ошибка возникает не из-за формулы, а из-за неточности в построении вспомогательных линий и делении отрезка.

Типичные погрешности школьных построений по теме подобия и пропорций

Пример: деление отрезка в отношении 2:3

Шаг 1. Разметка

Из точки А проводят луч и откладывают на нём пять равных отрезков, потому что сумма долей 2 и 3 равна 5. Это создаёт основу для дальнейшего построения.

Шаг 2. Соединение с В

Последнюю точку разметки соединяют с точкой В. Полученная линия задаёт опорное направление, относительно которого будут строиться параллельные прямые и нужные пропорции.

Шаг 3. Параллель

Через вторую точку от А проводят прямую, параллельную линии к В. Благодаря этому возникают подобные треугольники, а деление отрезка сохраняет отношение 2:3.

Шаг 4. Результат

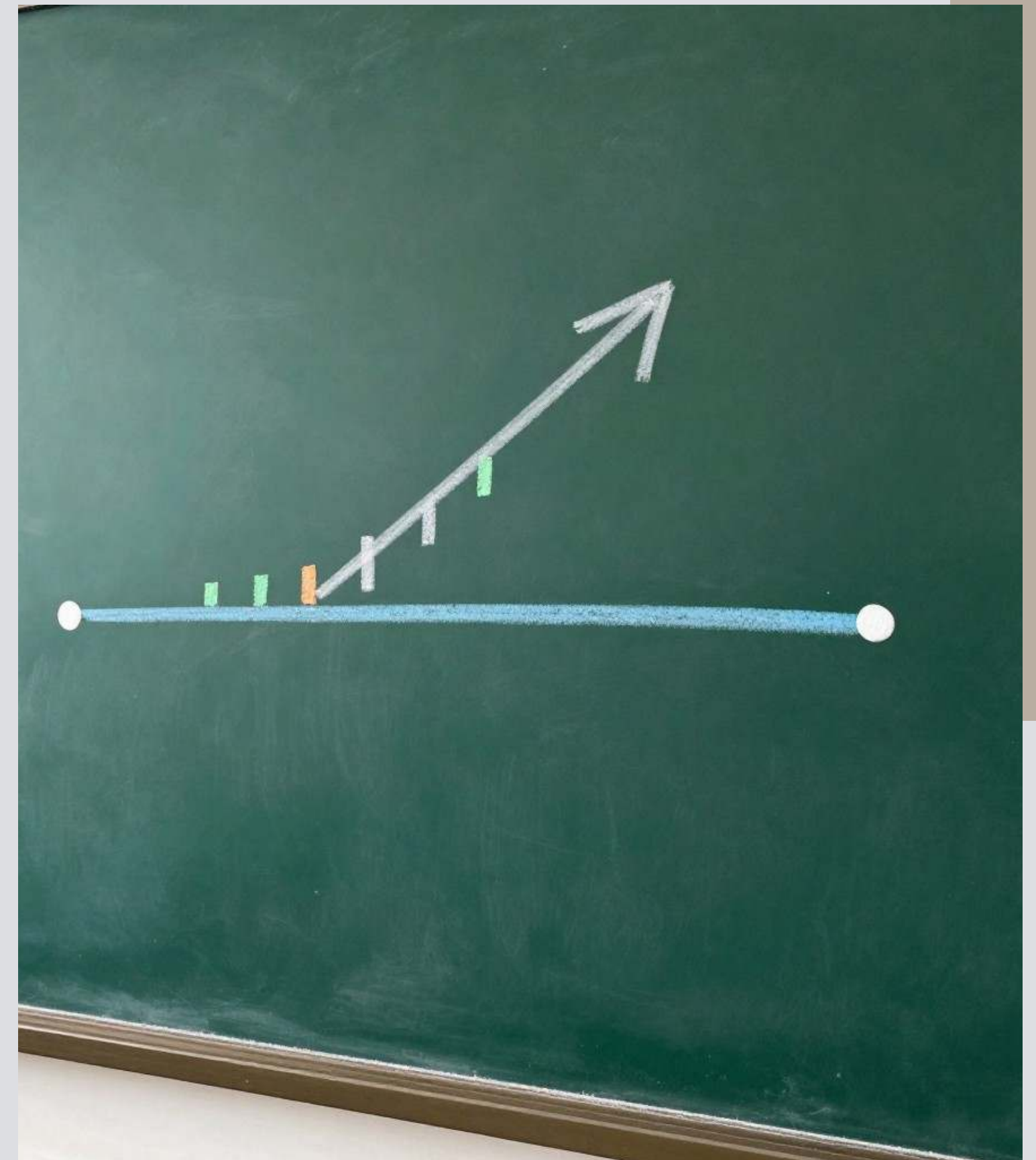
Точка пересечения делит отрезок АВ на две части в заданном отношении. Одна часть соответствует двум долям, другая — трём, как и требовалось.

1

2

3

4

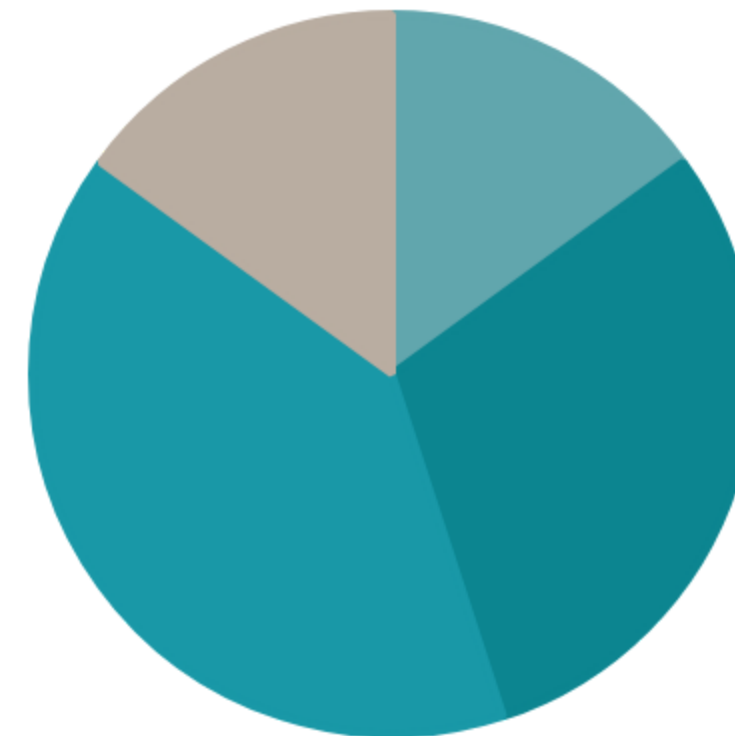


Какие способы нахождения длины используют чаще

На диаграмме показано, что пропорции и подобие чаще всего помогают там, где обычной линейки недостаточно.

Методы, основанные на подоби, дают наибольшую гибкость: они работают и в чертеже, и в задачах с неизвестной длиной.

Прямое измерение Построение по пропорции
Через подобие Среднее пропорциональное



Сравнение основных школьных способов нахождения длины по теме построений

Подобие, масштаб и чертежи



Одинаковая форма

Подобные фигуры сохраняют вид, но отличаются размером. Это хорошо видно на картах, планах и чертежах, где реальный объект уменьшают по одному и тому же правилу.

Понимание масштаба

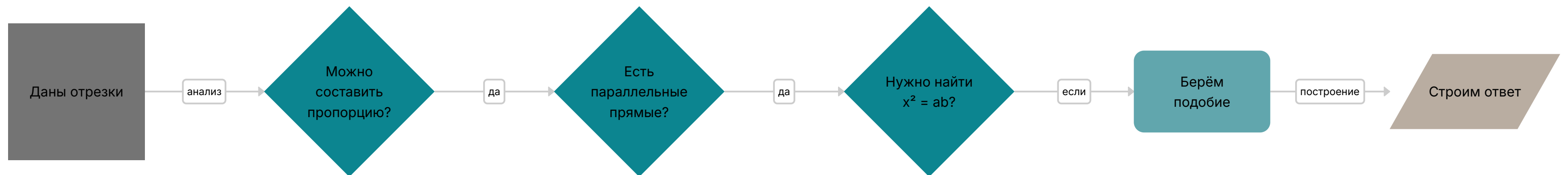
Запись 1:100 означает, что каждый сантиметр на чертеже соответствует одному метру в действительности. Такое соответствие позволяет точно переносить размеры без изменения пропорций.

Практическая польза

Именно поэтому подобие удобно в технике и геометрии: можно строить модель, сравнивать расстояния и находить нужные длины, не измеряя объект напрямую.

Когда в задаче выбирают метод подобия

Выбор способа построения зависит от данных задачи, пропорций и наличия параллельных прямых



Метод подобия соединяет формулы и чертёж в одной задаче: через него удобно работать с пропорциями, теоремой Фалеса, построениями и проверкой ответа.

4

главные темы курса связаны с ним напрямую.

Факты, которые нужно помнить

Факт	Запись	Смысл
Углы	равны	Признак подобия
Стороны	пропорциональны	Общий масштаб
Четвёртая	$x = bc/a$	Искомая длина
Среднее	$x^2 = ab$	Геом. среднее

Эти утверждения используются во всех основных построениях с отрезками и пропорциями.

Если помнить эти четыре опоры, можно уверенно решать большинство задач на построение отрезка по формуле.

Итоги темы: от формулы к точному построению

Мы увидели, как алгебраическая формула превращается в геометрическое построение. Подобие треугольников, пропорции и теорема Фалеса позволяют находить длины точно и без прямого измерения.