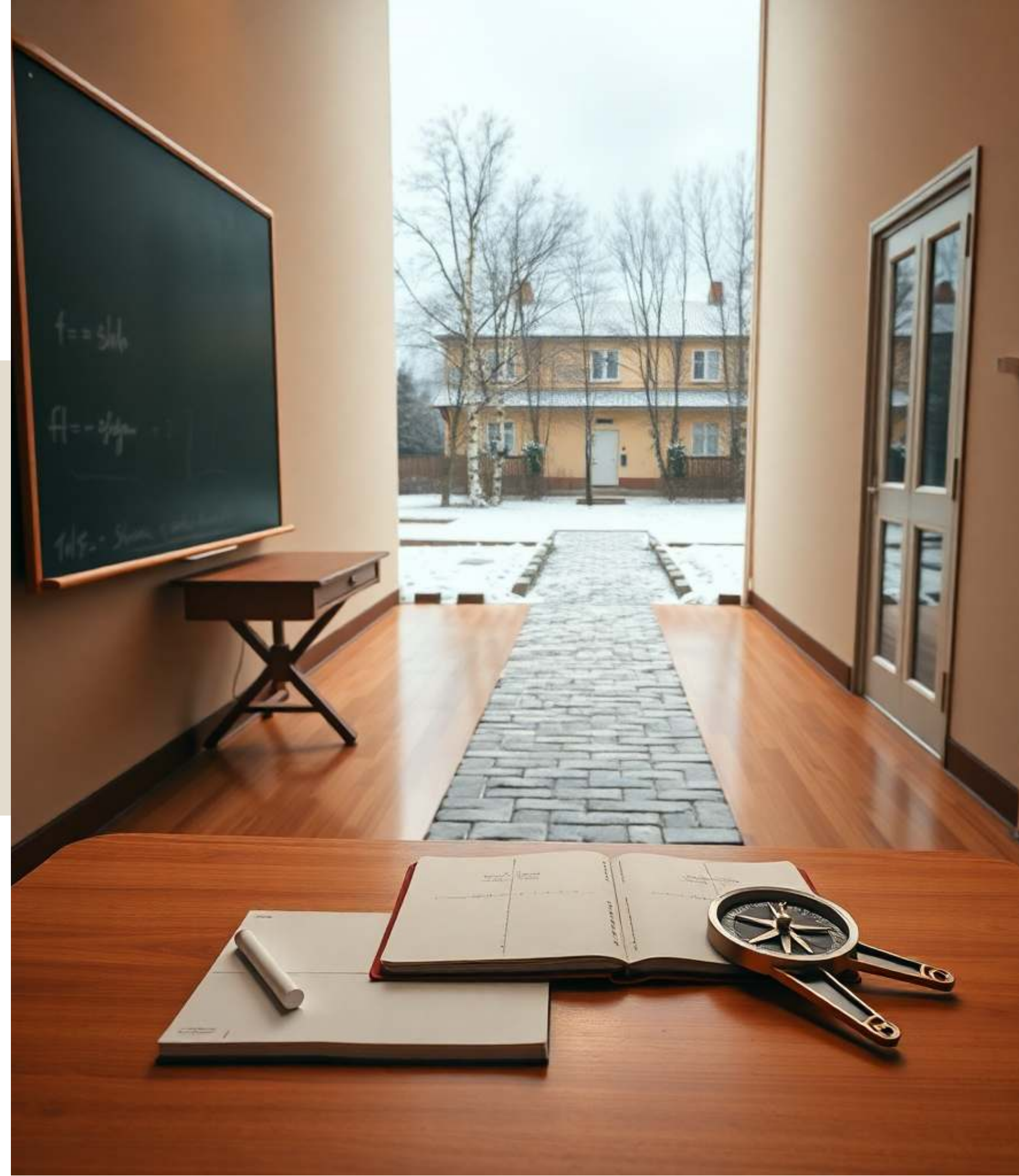


Вычисление предела функции в точке

Как найти значение, к которому стремится функция?

Зачем изучать пределы в 11 классе

Пределы описывают поведение функции около точки и помогают работать с разрывами, асимптотами и производной. В школьных задачах особенно важны подстановка, неопределённость $0/0$ и преобразование выражений к удобному виду.



Определение предела функции в точке

01

Смысл предела

Число L называют пределом функции $f(x)$ при $x \rightarrow a$, если при достаточно близких к a значениях x значения $f(x)$ можно сделать сколь угодно близкими к L .

02

Запись предела

Это обозначают так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Запись показывает не значение функции в точке, а её поведение в окрестности заданного числа a .

03

Точка и окрестность

Функция может не иметь значения в самой точке a , и это не мешает существованию предела. Главное — что происходит при приближении к ней.

04

Слева и справа

Чтобы предел существовал, значения функции при подходе слева и справа должны стремиться к одному и тому же числу. Иначе общего предела нет.

Геометрический смысл предела

○ Высота графика

На графике предел — это уровень, к которому подходит кривая, когда x приближается к a . Важно не само значение в точке, а направление движения графика.

○ Совпадение подходов

Если слева и справа график стремится к одной высоте, предел существует. Это видно даже тогда, когда линия в точке разорвана или отмечена пустой точкой.

○ Отдельная точка

Иногда в точке стоит другое значение функции, чем предполагает график вокруг неё. Тогда значение и предел различаются, но предел может оставаться определённым.

○ Разрывы и пустоты

Пустая точка, скачок или разрыв не всегда уничтожают предел. Решающее значение имеет именно поведение функции вблизи точки, а не оформление самой точки.



Основные свойства пределов

Эти свойства позволяют разбивать сложное выражение на более простые части и вычислять предел по шагам.

Если пределы отдельных частей известны, сложное выражение обычно сводится к последовательному применению правил без лишних вычислений.

Свойство	Формула
Сумма	$\lim(f+g)=\lim f+\lim g$
Произведение	$\lim(fg)=(\lim f) (\lim g)$
Частное	$\lim(f/g)=\lim f/\lim g$

Непрерывность и связь с пределом

1

Определение непрерывности

Функция непрерывна в точке a , если предел при $x \rightarrow a$ существует и равен значению функции в самой точке: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

2

Когда помогает подстановка

Для многочленов и многих элементарных функций предел часто находится прямой подстановкой. Это возможно, когда в выражении нет деления на ноль и запрещённых значений.

3

Что такое разрыв

Разрыв возникает, если значение в точке отсутствует, не совпадает с пределом или левый и правый пределы различаются. Тогда нужен отдельный анализ выражения.

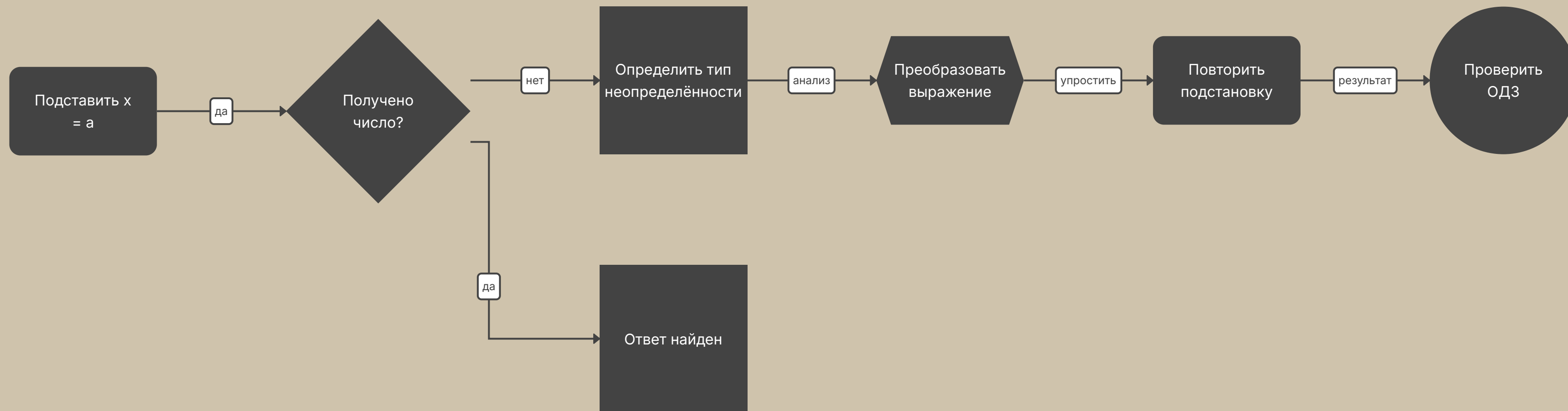
4

Почему это важно

Непрерывность делает вычисления проще: там, где функция ведёт себя «спокойно», подстановка заменяет длинные преобразования и сразу даёт правильный результат.

Алгоритм вычисления предела

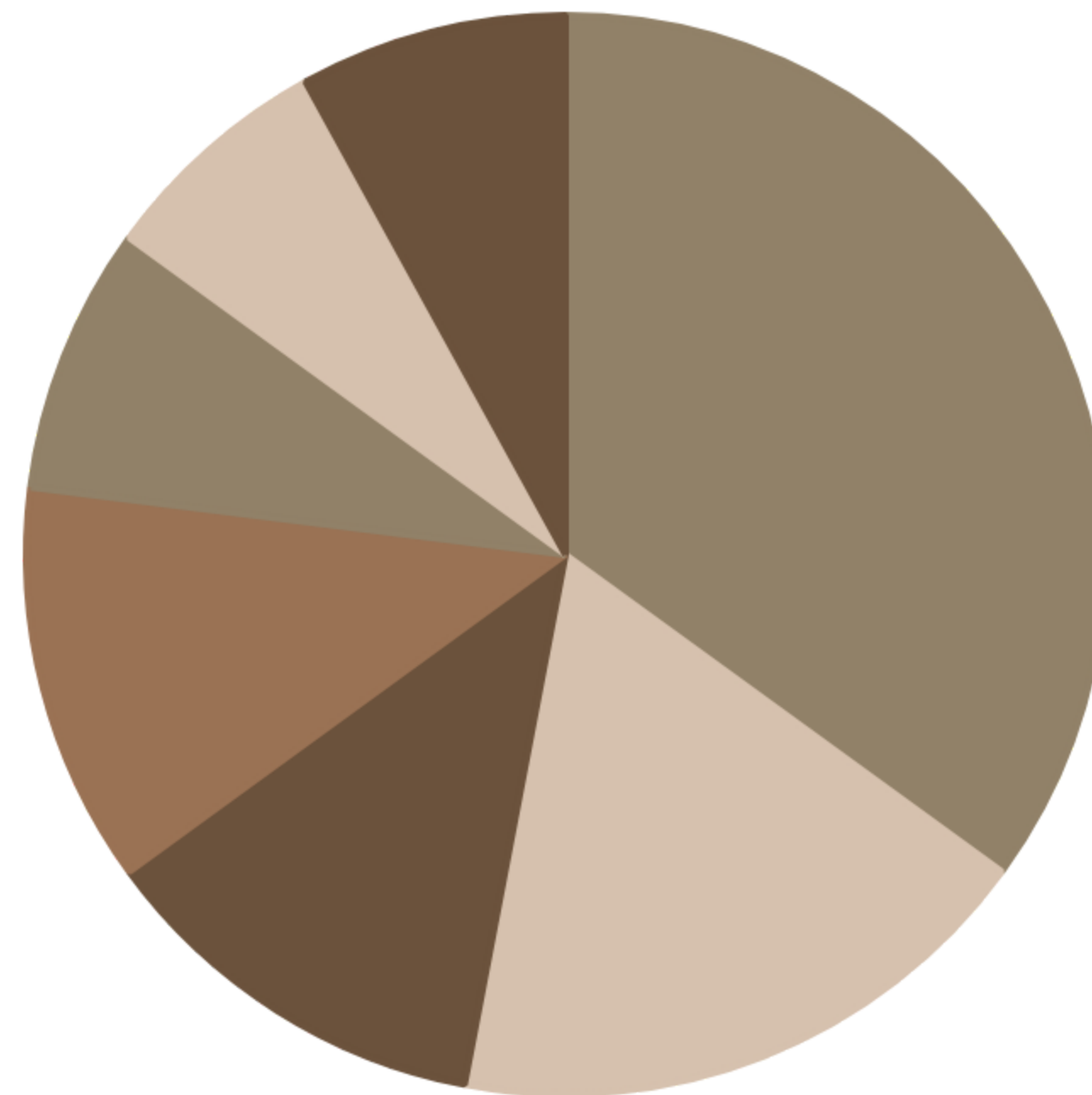
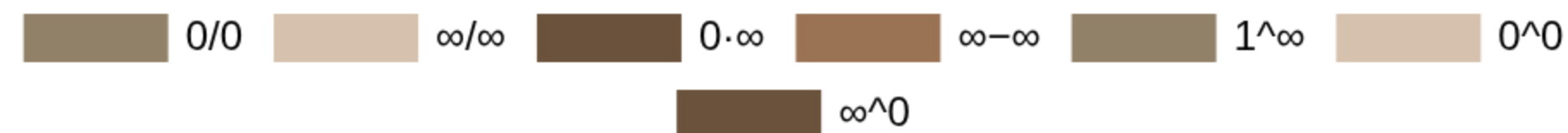
Типовой порядок действий в школьных задачах



Наиболее частые неопределённости

В школьных задачах чаще всего встречается форма $0/0$: именно она обычно требует разложения, сокращения или других преобразований.

Тип неопределённости подсказывает направление решения: сначала распознать форму, затем выбрать подходящий приём упрощения.



Школьная практика решения пределов

Метод разложения на множители

○ Когда применять

Этот способ особенно полезен при неопределённости $0/0$. Он помогает, когда числитель и знаменатель содержат общий множитель, который мешает прямой подстановке.

○ Что меняется после сокращения

Когда общий множитель исчезает, выражение нередко перестаёт быть неопределённым. Тогда предел можно найти обычной подстановкой или более простым вычислением.

○ Что разлагают

Чаще всего раскладывают квадратные трёхчлены, разность квадратов и выражения с общим множителем $x-a$. После этого одинаковые множители можно сократить.

○ Почему метод удобен

Разложение на множители быстро превращает громоздкую дробь в прозрачную форму. В результате видно, какая часть выражения действительно влияет на предел.

Метод рационализации

01

Где возникает необходимость

Рационализация нужна, когда в выражении есть корни и появляется неопределённость $0/0$. В таких задачах обычное сокращение не работает, поэтому требуется другое преобразование.

03

Типичные примеры

Метод часто применяют к дробям вида $(\sqrt{A}-\sqrt{B})/(x-a)$ и похожим выражениям. После умножения на сопряжённое возникают удобные алгебраические преобразования.

02

Сопряжённое выражение

Основной приём состоит в умножении на сопряжённое выражение. Это позволяет убрать корень из числителя или знаменателя и раскрыть скрытый общий множитель.

04

Что происходит дальше

После рационализации обычно появляется множитель, который можно сократить. Затем выражение упрощается настолько, что предел находится без затруднений.

Тригонометрические пределы

x^1 Главная опора

Основной предел $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x / x = 1$ работает только при измерении угла в радианах. Он позволяет сводить многие тригонометрические выражения к известному числу без громоздких преобразований.

Переход к новым формулам

Из базового предела выводят $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} x / x = 1$, а также формулы для выражений с $\sin(kx)$ и $\operatorname{tg}(kx)$. Достаточно привести аргумент к виду, близкому к нулю.

$\sqrt{x}$ Пределы для косинуса

Выражения с $1 - \cos x$ часто преобразуют через тождество, чтобы получить стандартный вид. Так возникает предел $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) / x^2 = 1/2$, удобный в задачах с малым углом.

Условие применения

Все тригонометрические пределы требуют аккуратности: нельзя подменять радианы градусами и нужно следить за тем, к какому нулю стремится аргумент. Именно это обеспечивает правильный числовой ответ.

Классические пределы, которые нужно знать

Эти формулы часто используются как опорные при преобразовании выражений и позволяют быстро получать ответ в типовых задачах.

Небольшой набор стандартных пределов покрывает множество задач: достаточно привести выражение к известному виду, чтобы избежать лишних вычислений.

Предел	Значение	Прием
$\sin x / x$	1	основной
$(1 - \cos x) / x^2$	$\frac{1}{2}$	тригонометрия
$(e^x - 1) / x$	1	экспонента
$\ln(1+x) / x$	1	логарифм

Пределы при бесконечности и асимптотическое поведение



Когда график уходит вдаль

При $x \rightarrow \infty$ или $x \rightarrow -\infty$ функция может стремиться к числу, расти без ограничения или колебаться. На графике это видно как движение вдоль линии, к которой кривая все ближе подходит, не пересекая ее в нужном смысле.



Асимптоты как ориентир

Если значение функции стремится к постоянной, говорят о горизонтальной асимптоте. При неограниченном росте около некоторой точки возникает вертикальная асимптота. Такие линии помогают быстро понять поведение графика, даже когда точное значение в точке не рассматривается.

Как преобразования меняют исходное выражение

На практике ключевым оказывается не сам предел, а переход к форме, где подстановка снова становится возможной.

Чем раньше устранена неопределенность, тем проще вычисление: преобразование переводит задачу из символической формы в обычный числовой ответ.

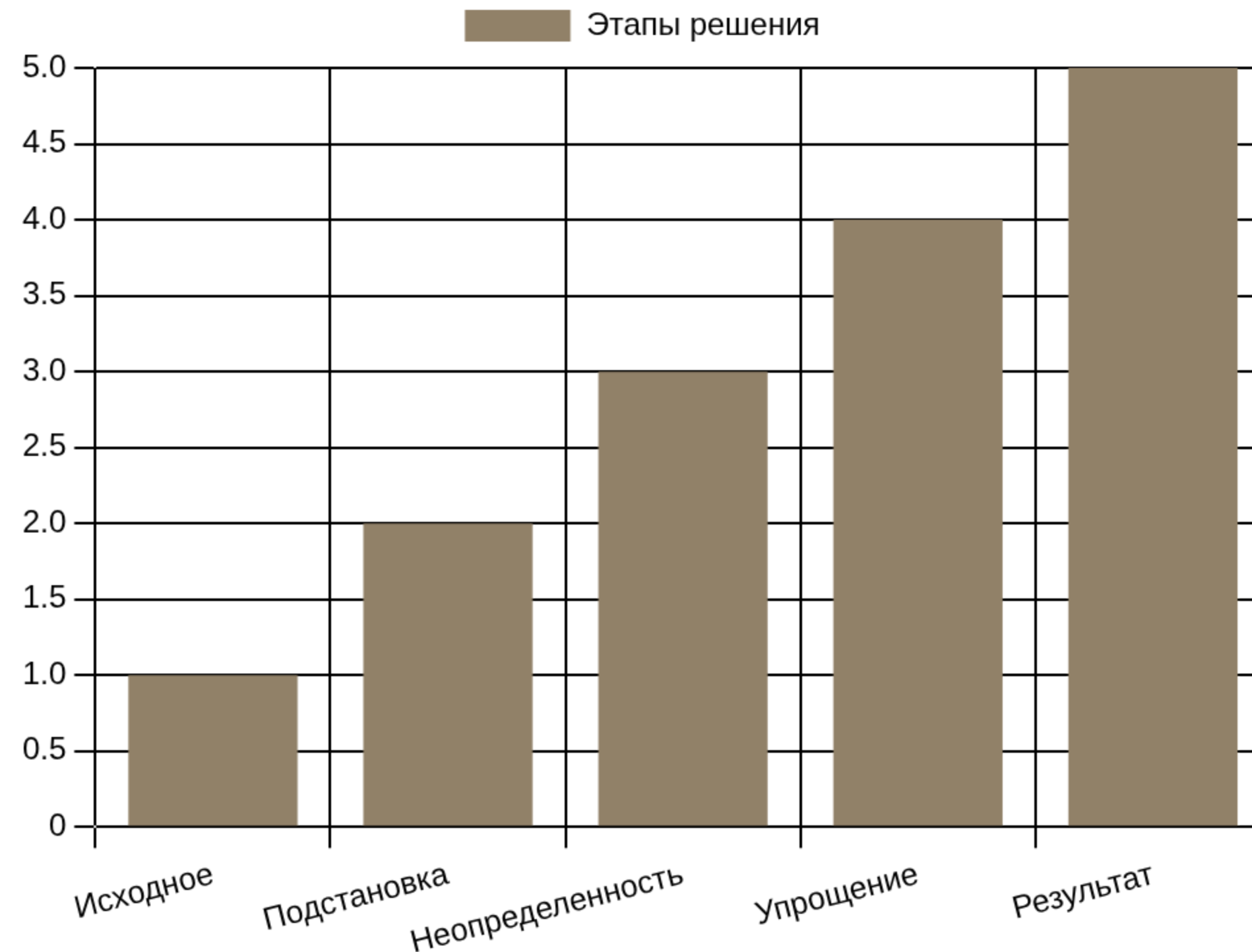


Схема типового решения пределов в школьном курсе

Типичные ошибки при вычислении пределов

○ Слепая подстановка

Подстановка допустима не всегда: если появляется неопределенность, нужно остановиться и проверить форму выражения. Иначе можно получить формально красивый, но неверный ответ.

○ Неверное сокращение

Сокращать можно только общие множители, а не отдельные слагаемые. Ошибка в этом шаге часто разрушает структуру выражения и приводит к неправильному пределу.

○ Путаница с радианами

В тригонометрических пределах угол следует измерять в радианах. Если использовать градусы, формулы вида $\sin x / x$ перестают работать в нужном виде.

○ Игнорирование ОДЗ

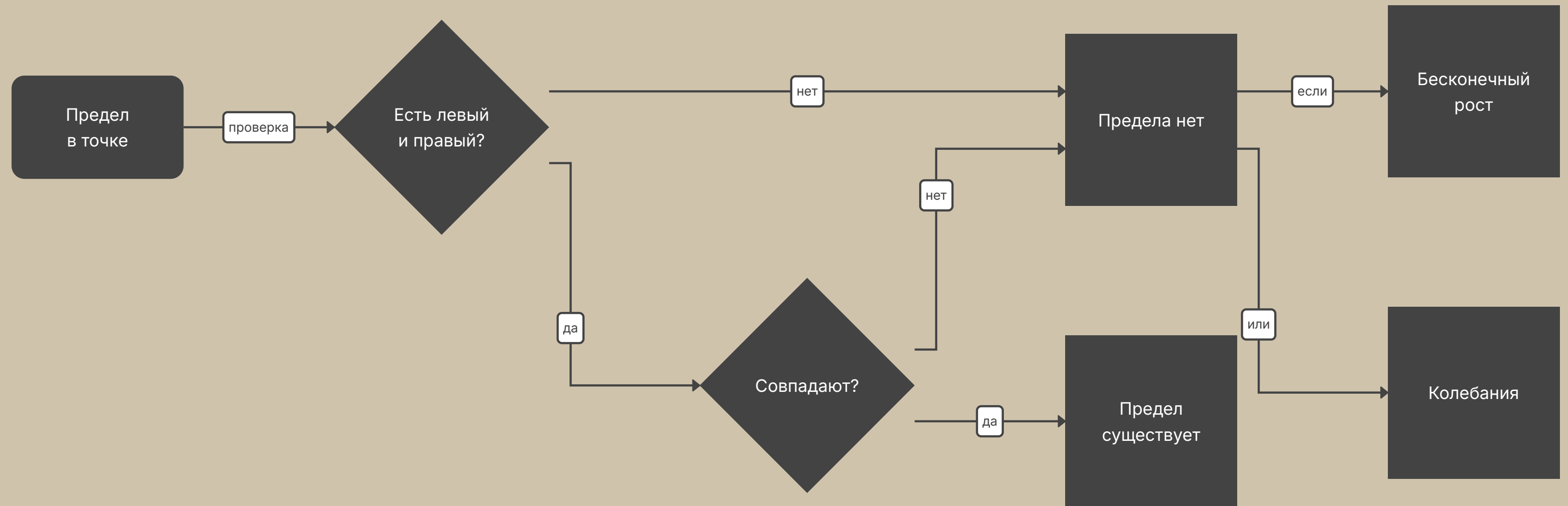
После преобразования важно проверить область допустимых значений. Иногда сокращение убирает ограничение, но исходная задача все равно требует учитывать, где выражение было определено.

○ Смешение значения и предела

Предел и значение функции в точке — не одно и то же. Даже при разрыве или пустой точке предел может существовать, если поведение слева и справа совпадает.

Когда предел существует, а когда нет

Схема показывает проверку односторонних пределов и возможные причины отсутствия общего предела.



Связь пределов с производной

Предел как основа

Сначала изучают предел как способ описать поведение функции вблизи точки. Это создает основу для более точного языка математики, чем простое сравнение значений.

Графический смысл

После этого пределы помогают понимать касательную к графику, скорость изменения и участки возрастания или убывания. Решения становятся не только вычислительными, но и содержательными.

Разностное отношение

Затем появляется формула производной через предел $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ при $h \rightarrow 0$. Именно здесь предел превращает идею мгновенного изменения в строгую запись.

Переход к анализу

В итоге тема пределов связывает школьную алгебру с математическим анализом. Те же приемы затем используются при исследовании функций, производных и дальнейших разделов курса.

Примеры вычисления пределов

Во всех примерах задача сводится к преобразованию выражения к стандартному виду, после чего ответ получается прямой подстановкой или по известной формуле.

Один и тот же подход работает для разных выражений: нужно увидеть структуру и выбрать подходящее преобразование, а не пытаться решать все одним способом.

Пример	Прием	Ответ
$(x^2-4)/(x-2)$	множители	4
$\sin(3x)/x$	триг. предел	3
$(\sqrt{x}-1)/(x-1)$	рационал.	$\frac{1}{2}$

Типовые школьные примеры по теме пределов

Практическое значение пределов в школьном курсе

1

Анализ графиков

Предел помогает понять, как ведет себя функция около точки, где значение может быть задано неудобно или вовсе отсутствовать. Это особенно полезно при изучении разрывов и асимптот.

2

Подготовка к производной

Через предел вводится производная, поэтому тема становится мостом к новому разделу математики. Умение работать с предельными переходами облегчает последующее изучение касательной и скорости изменения.

3

Решение нестандартных задач

Во многих примерах прямой подстановки недостаточно, и тогда приходится преобразовывать выражение. Пределы учат видеть скрытую структуру формулы и выбирать рациональный способ решения.

4

Математическая дисциплина

Работа с пределами развивает аккуратность: нужно следить за ОДЗ, видом неопределенности и корректностью преобразований. Эти навыки полезны не только в алгебре, но и в дальнейшем обучении.

Главное о пределах функции в точке

Предел показывает, к чему стремится функция вблизи точки, и не всегда совпадает с ее значением там. Умение находить пределы открывает путь к непрерывности, производной и более глубокому анализу функций.