

Произведение вектора на число: изменение длины и направления

Умножение вектора на число меняет его длину и иногда направление.



Зачем это нужно в геометрии

Эта операция помогает работать на координатной плоскости, строить векторы нужной длины и сравнивать отрезки. Она важна для задач на вычисления, построения и понимание направления.

3

основных случая определяют, как изменятся длина и направление вектора

Именно эти три варианта нужно различать при решении задач: положительный, отрицательный и нулевой коэффициент.

Правило умножения вектора на число из школьного курса геометрии

Геометрический смысл на рисунке



Коэффициент задаёт масштаб

Если умножить вектор на 2, его изображение на рисунке станет вдвое длиннее, но останется направленным так же, как исходный вектор.

Знак меняет стрелку

При умножении на отрицательное число длина увеличивается по модулю коэффициента, а стрелка поворачивается в противоположную сторону относительно начального направления.

Ноль даёт особый случай

При коэффициенте 0 получается нулевой вектор: у него нет направления, а длина равна нулю. Это важно помнить при чтении чертежей.

Три случая умножения вектора на число

Случай	Направление	Длина
$k > 0$	сохраняется	$ k \cdot a $
$k < 0$	противоположное	$ k \cdot a $
$k = 0$	нет	0

Таблица помогает быстро сравнить результат для разных значений коэффициента.

Знак коэффициента влияет на направление, а длина зависит только от модуля числа.

Как меняется длина результата при разных значениях k

На графике удобно сравнивать значения без чертежа: видна одинаковая длина для противоположных коэффициентов.

Длина результата зависит от модуля k , поэтому одинаковые по модулю числа дают равный эффект.

Построено по формуле $|k| \cdot |a|$ при $|a|=1$

Свойства умножения вектора на число

1. Распределительное свойство

Формула $k(a+b)=ka+kb$ показывает, что коэффициент можно «распределить» на сумму векторов. Это удобно при упрощении выражений и проверке вычислений.

2. Сложение коэффициентов

Равенство $(k+m)a=ka+ma$ помогает объединять действия с одним и тем же вектором. Оно особенно полезно, когда в задаче встречаются несколько числовых множителей.

3. Последовательное умножение

Запись $(km)a=k(ma)$ означает, что сначала можно умножить вектор на одно число, а затем на другое. Итог не изменится, если не нарушать порядок действий.

Координатная запись произведения

1.

Правило координат

Если вектор задан как $(x; y)$, то после умножения на число k получаем $(kx; ky)$. Оба числа в записи меняются одинаково.

2.

Примеры вычислений

Для вектора $(3; -2)$ при умножении на 4 получаем $(12; -8)$, а при умножении на -1 — $(-3; 2)$. Знак коэффициента влияет на обе координаты.

3.

Практическая польза

Такая запись позволяет находить новый вектор быстро, без построения чертежа. Это особенно удобно в задачах на координатной плоскости и при проверке ответов.

Пример на координатной плоскости

Вектор растягивается в три раза

Пусть дан вектор $a=(2; 1)$. При умножении на 3 получаем $(6; 3)$. На координатной плоскости конец вектора уходит дальше от начала координат в том же направлении, но на большее расстояние.



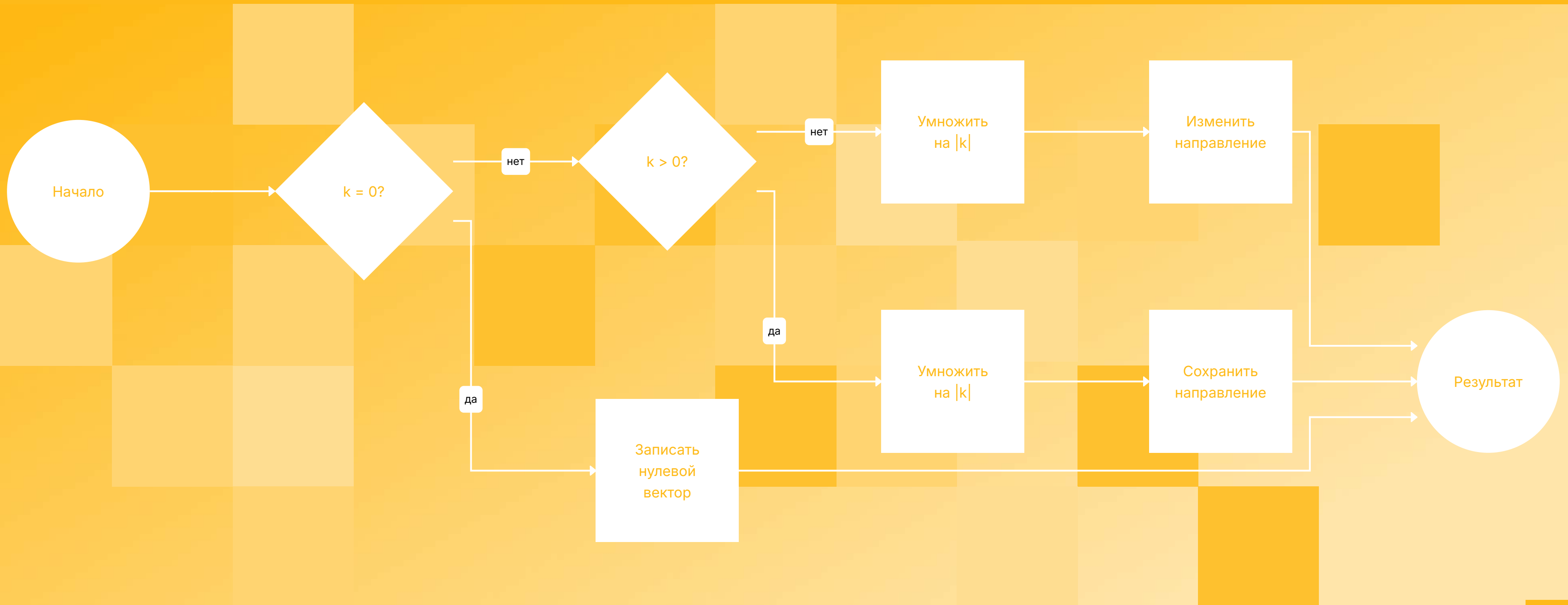
Отражение в противоположную сторону

Если тот же вектор умножить на -2 , получится $(-4; -2)$. Конец вектора окажется в другой части плоскости, а стрелка будет направлена противоположно исходной. Это хорошо показывает роль знака коэффициента.



Алгоритм нахождения $k \cdot a$

Схема показывает, как действовать при вычислениях и построениях.



Противоположные векторы как частный случай

Умножение на -1

Вектор $-a$ получают из a умножением на -1 . Его длина остается прежней, а направление меняется на противоположное, поэтому оба вектора образуют пару противоположных векторов.

Где это встречается

Такое преобразование удобно в задачах на симметрию и движение по прямой: достаточно заменить направление на обратное, не меняя длину отрезка или координатный масштаб.

Что важно запомнить

Запись $-a$ не означает «уменьшить» вектор. Она показывает, что берут тот же по длине вектор, но направляют его в обратную сторону.



Сравнение результатов при разных коэффициентах

На диаграмме сравниваются только длины результата, поэтому знак коэффициента здесь не виден отдельно.

Длина зависит от модуля коэффициента: отрицательные числа дают ту же длину, что и соответствующие положительные.

Составлено по правилу $|k| \cdot |a|$ на основе заданного примера.

Типичные ошибки при решении задач

Игнорируют знак

Иногда ученик умножает только длину и забывает, что при отрицательном коэффициенте вектор должен развернуться в противоположную сторону. Из-за этого ответ получается неполным.

Меняют одну координату

При координатной записи ошибочно изменяют знак лишь у одной координаты. На самом деле число k умножает обе координаты сразу: получается $(kx; ky)$.

Путают нулевой вектор

Для $k=0$ нельзя писать обычный вектор с нулевыми координатами как направленный отрезок. Правильный ответ — нулевой вектор, у которого нет направления.

Смешивают модуль и число

Иногда вместо $|k|$ используют само число k при нахождении длины. Это неверно: длина результата всегда неотрицательна и зависит только от модуля коэффициента.

Проверка ответов по координатам

а	к	результат	длина
(1; 4)	2	(2; 8)	в 2 раза
(1; 4)	-3	(-3; -12)	в 3 раза

По правилу умножения вектора на число: $(x; y) \rightarrow (kx; ky)$, $|k| \cdot |a|$.

Сравним исходный вектор, коэффициент и полученный результат по координатам и длине.

Координаты и длина должны согласовываться одновременно: знак влияет на направление, а модуль — на величину.

Связь с жизнью и другими предметами



Физика

Силу, скорость и перемещение часто рассматривают как векторы. Если скорость увеличить вдвое, объект за одинаковое время пройдет больший путь, сохраняя направление движения.



Геометрия чертежей

При масштабировании рисунков умножение вектора на число помогает сохранять форму и менять размер. Так строят подобные фигуры и сравнивают направленные отрезки.



Движение на плоскости

На карте или схеме такой прием показывает, как изменится маршрут при большем или меньшем шаге. Это удобно, когда нужно быстро оценить смещение точки.

Построение на клетчатой бумаге

1. Найти исходный вектор

Сначала отмечают начало и конец исходного вектора на клетках. По рисунку удобно считать, сколько клеток он проходит по горизонтали и вертикали.

2. Умножить координаты

Затем каждую координату конца вектора умножают на число k . Для точки $(1; 2)$ при $k=2$ получаем $(2; 4)$, а при отрицательном k — точку в противоположной части плоскости.

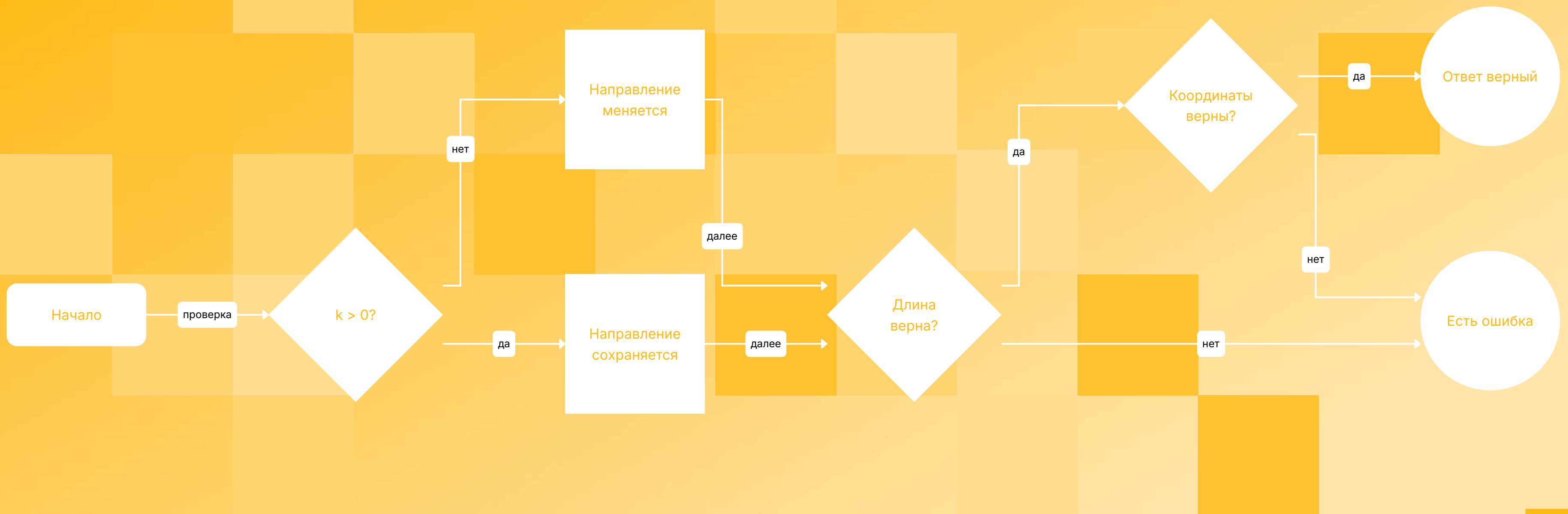
3. Сделать вывод

После построения видно, что положительный коэффициент сохраняет направление, а отрицательный разворачивает вектор. При этом изменение длины всегда соответствует модулю числа.



Проверка правильности ответа

Последовательность проверок для задач на умножение вектора на число



Примеры заданий для закрепления

1.

Координатный пример 1

Найдите $3 \cdot (2; -1)$. Нужно умножить обе координаты на 3 и получить новый вектор. Это проверяет умение работать с положительным коэффициентом и сохранять направление.

2.

Координатный пример 2

Вычислите $-2 \cdot (4; 5)$. Здесь важно не только умножить координаты, но и учесть смену направления. Такой пример помогает не перепутать знак результата.

3.

Нулевой коэффициент

Определите $0 \cdot (-3; 7)$. В ответе должен получиться нулевой вектор, а не просто пара нулей. Это закрепляет понимание особого случая $k=0$.

4.

Геометрическая задача

Вектор длиной 5 см умножьте на 4, а затем на -1. Первый шаг меняет длину, второй — только направление. Так удобно увидеть два разных эффекта операции.

Итоговые правила в одной таблице

k	направление	длина	координаты
$k > 0$	сохр.	$ k \cdot a $	$(kx; ky)$
$k < 0$	противоп.	$ k \cdot a $	$(kx; ky)$
$k = 0$	нет	0	$(0; 0)$

Сводная таблица помогает быстро вспомнить, как знак коэффициента влияет на вектор, его длину и координаты.

Во всех случаях длина зависит от модуля коэффициента, а координаты изменяются по одному и тому же правилу.

