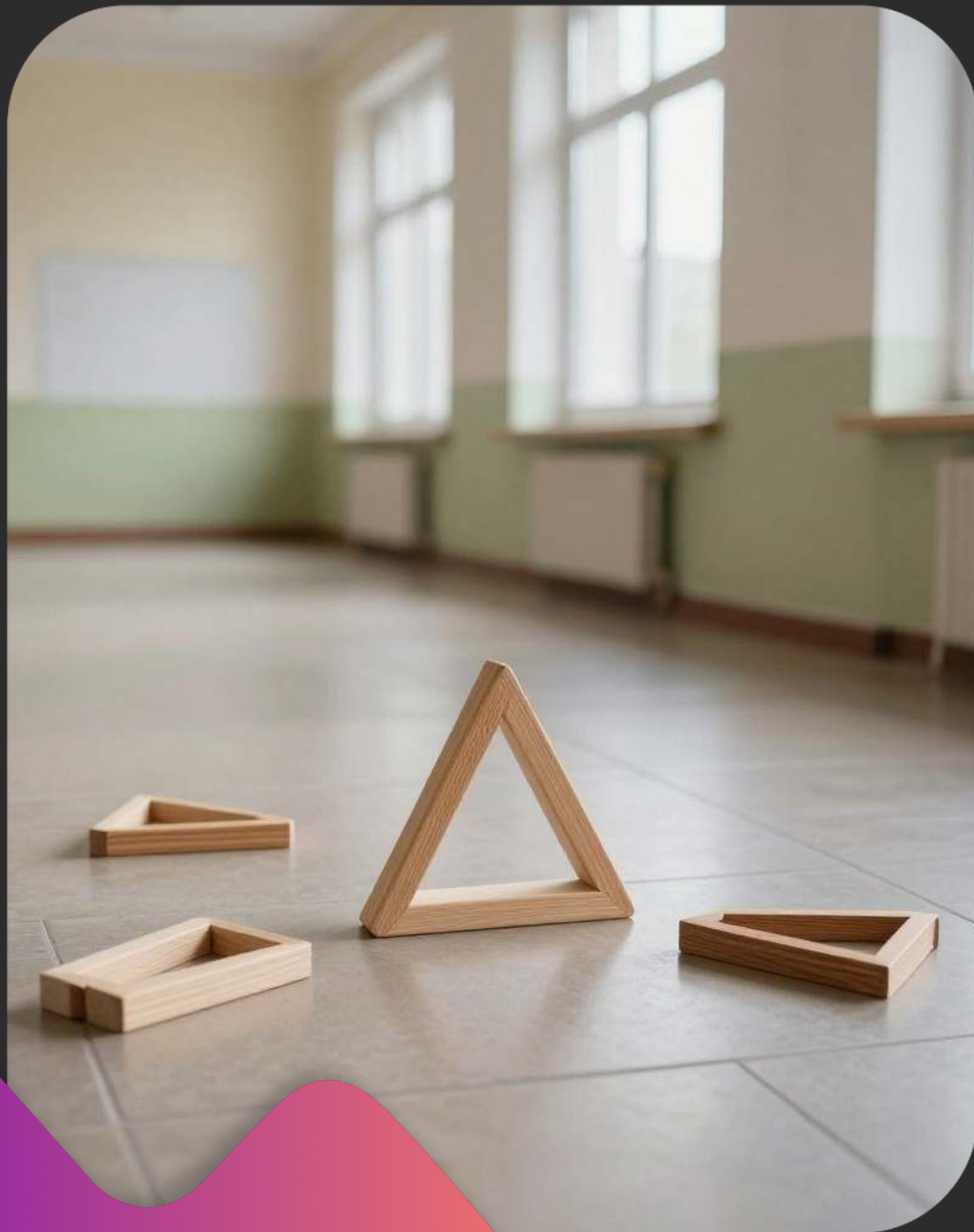


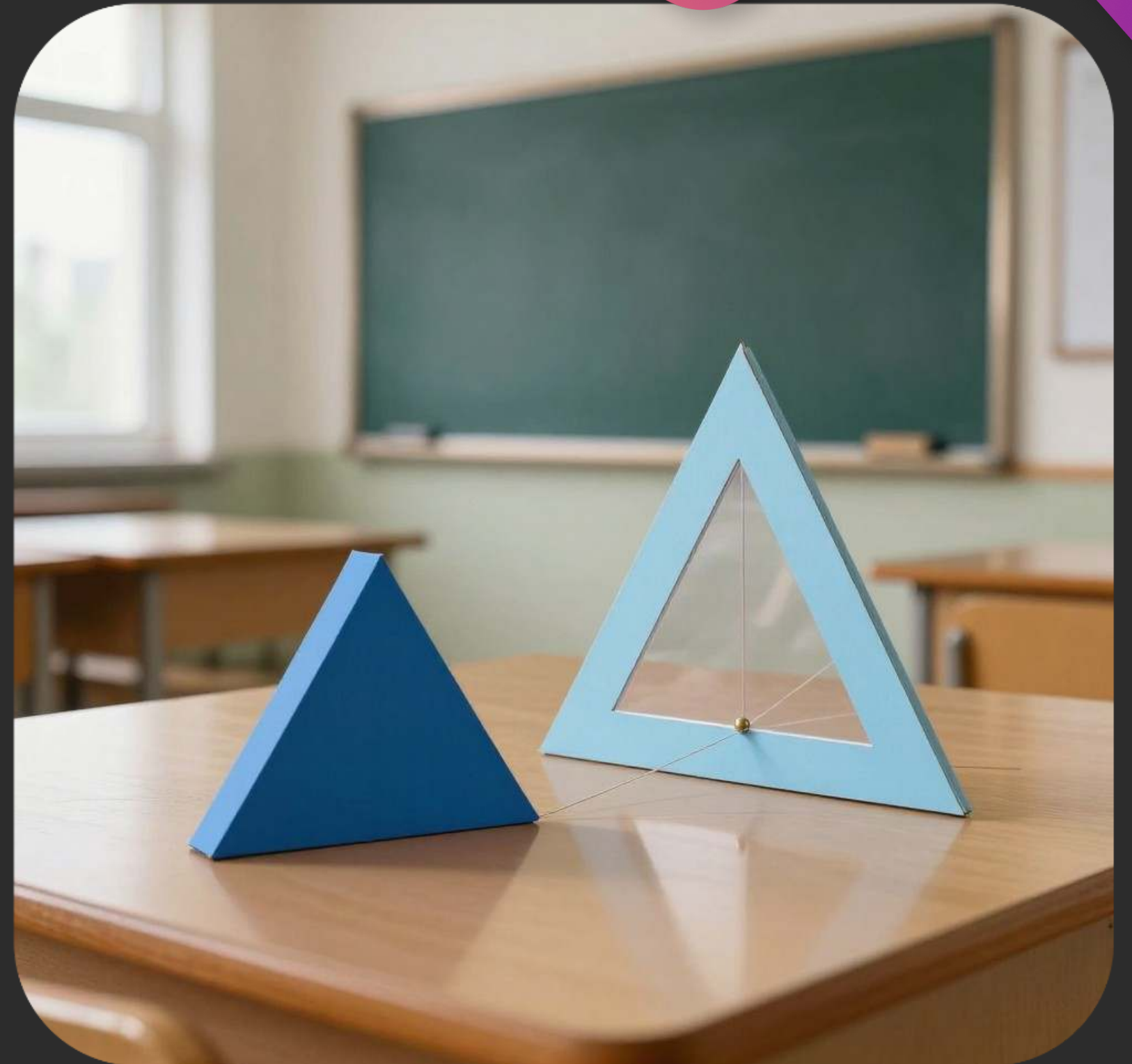
Гомотетии и изометрии: как меняются фигуры

Как фигуры сохраняют форму, но меняют размер?



Зачем изучать преобразования фигур в 7 классе

Преобразования позволяют быстро сравнивать фигуры, понимать подобие и масштаб, а также уверенно работать на клетчатой бумаге и координатной плоскости.



Изометрия: что именно сохраняется

Расстояния без изменений

Изометрия переводит каждую точку фигуры так, что расстояния между любыми двумя точками остаются прежними. Поэтому длины отрезков не меняются.

Углы и периметр

При таком преобразовании сохраняются величины углов и периметр фигуры. Это значит, что новая фигура полностью совпадает с исходной по форме и размеру.

Та же фигура, другое положение

После изометрии фигура может оказаться в другом месте плоскости или повернуться иначе, но она остаётся равной исходной и подходит для точного сравнения.



Три основных вида изометрий на плоскости

Параллельный перенос

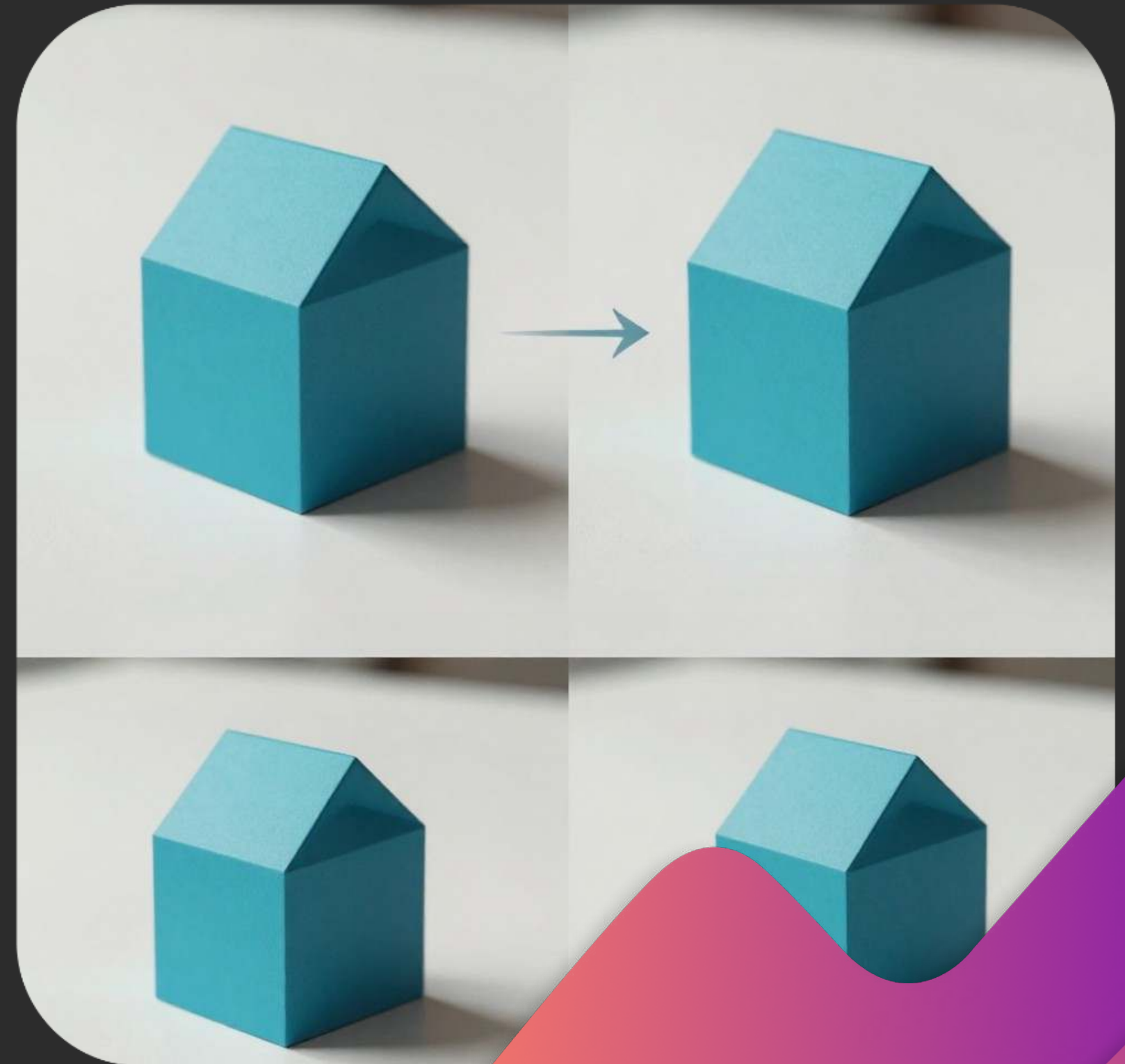
Все точки фигуры сдвигаются на одно и то же расстояние в одном направлении. Форма, размеры и ориентация фигуры при этом сохраняются.

Поворот

Фигура вращается вокруг заданной точки на определённый угол. Расстояния между точками не меняются, поэтому после поворота получается та же фигура.

Осевая симметрия

Каждая точка переходит на другую сторону от оси на таком же расстоянии. Фигура зеркально отражается, но её размеры и углы сохраняются.



Что сохраняют изометрия и гомотетия



На диаграмме видно, что одни свойства сохраняются полностью, а другие — только частично или с изменением масштаба.

Изометрия сохраняет все свойства без исключений, а гомотетия оставляет неизменными форму и углы, но меняет размеры и площадь.

Гомотетия: изменение размера без искажения

1. 1. Подобная фигура

Гомотетия переводит исходную фигуру в подобную ей. У новой фигуры сохраняются все углы, а соответствующие стороны становятся пропорциональными.

2. 2. Увеличение и уменьшение

Если коэффициент гомотетии больше 1, фигура увеличивается. Если коэффициент меньше 1, она уменьшается, но её форма остаётся прежней.

3. 3. Без искажений

Гомотетия не ломает рисунок и не меняет его пропорций. Именно поэтому одна и та же фигура может быть изображена крупнее или мельче.



Коэффициент гомотетии и результат преобразования

k	Результат
2	увеличение в 2 раза
$\frac{1}{2}$	уменьшение в 2 раза
-1	симметрия относительно центра

Свойства гомотетии из школьного курса геометрии

Таблица показывает, как знак и модуль коэффициента влияют на размер фигуры и её положение относительно центра.

Модуль коэффициента задаёт изменение размера, а отрицательный знак меняет расположение фигуры на противоположное относительно центра.

Как строят гомотетию на плоскости

Построение начинается с центра гомотетии и продолжается по лучам к вершинам фигуры.



Подобие фигур как результат гомотетии



Равные углы

После гомотетии соответствующие углы остаются равными, поэтому фигуры сохраняют один и тот же вид. Это главное условие подобия, по которому сравнивают геометрические объекты.



Пропорциональные стороны

Длины соответствующих сторон изменяются в одно и то же число раз. Благодаря этому можно находить неизвестные отрезки, если известен коэффициент преобразования.



Макеты и модели

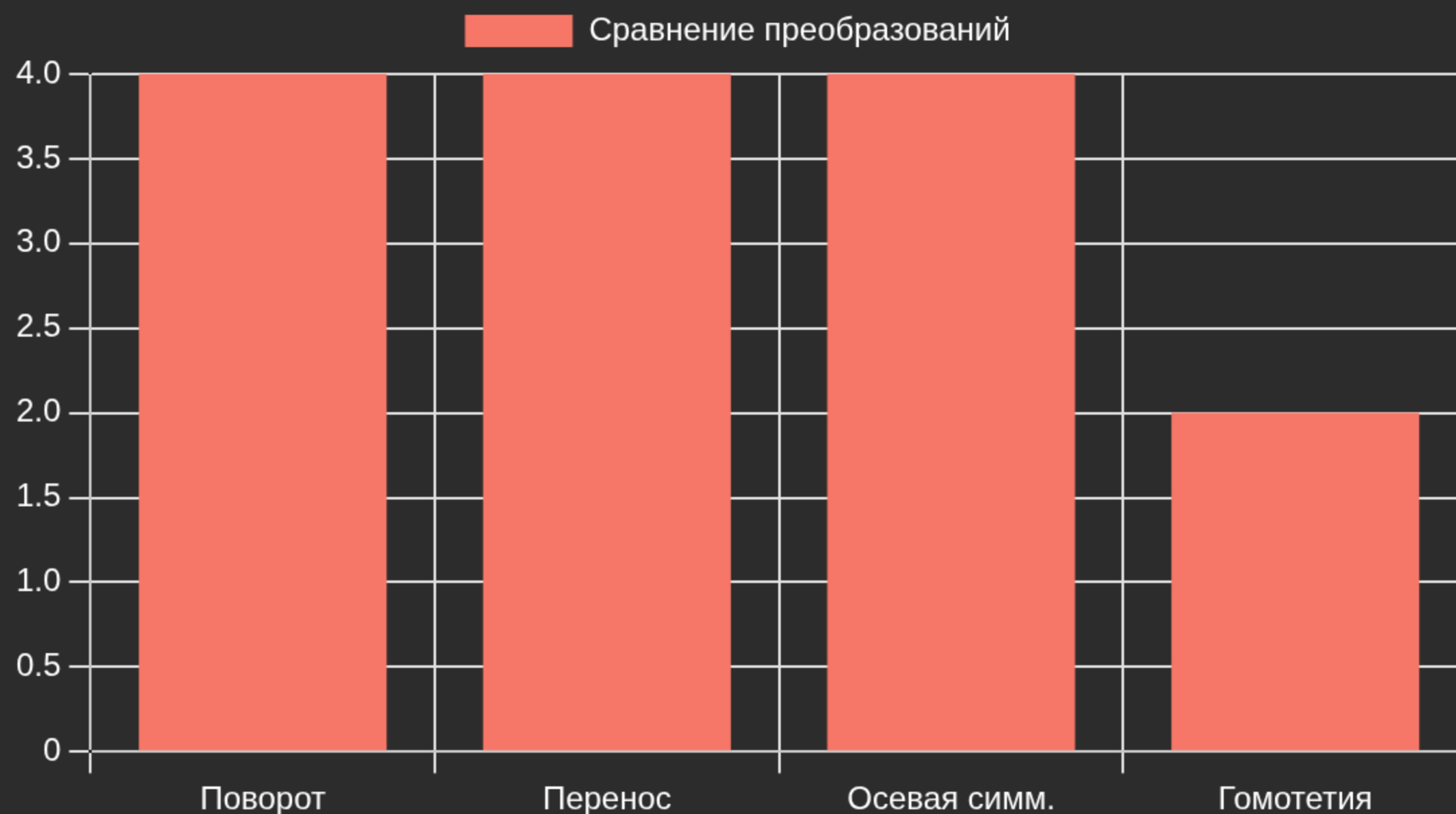
Подобие хорошо видно в уменьшенных моделях зданий и предметов. В таких макетах форма сохраняется, а размеры специально уменьшают по одному правилу.



Схемы в масштабе

Карты, планы и чертежи помогают сравнивать реальные объекты, не измеряя их напрямую. Подобие делает схему узнаваемой, даже если её размер сильно отличается от оригинала.

Поворот, перенос, симметрия и гомотетия



Первые три преобразования не меняют размер фигуры, а гомотетия позволяет целенаправленно изменять масштаб.

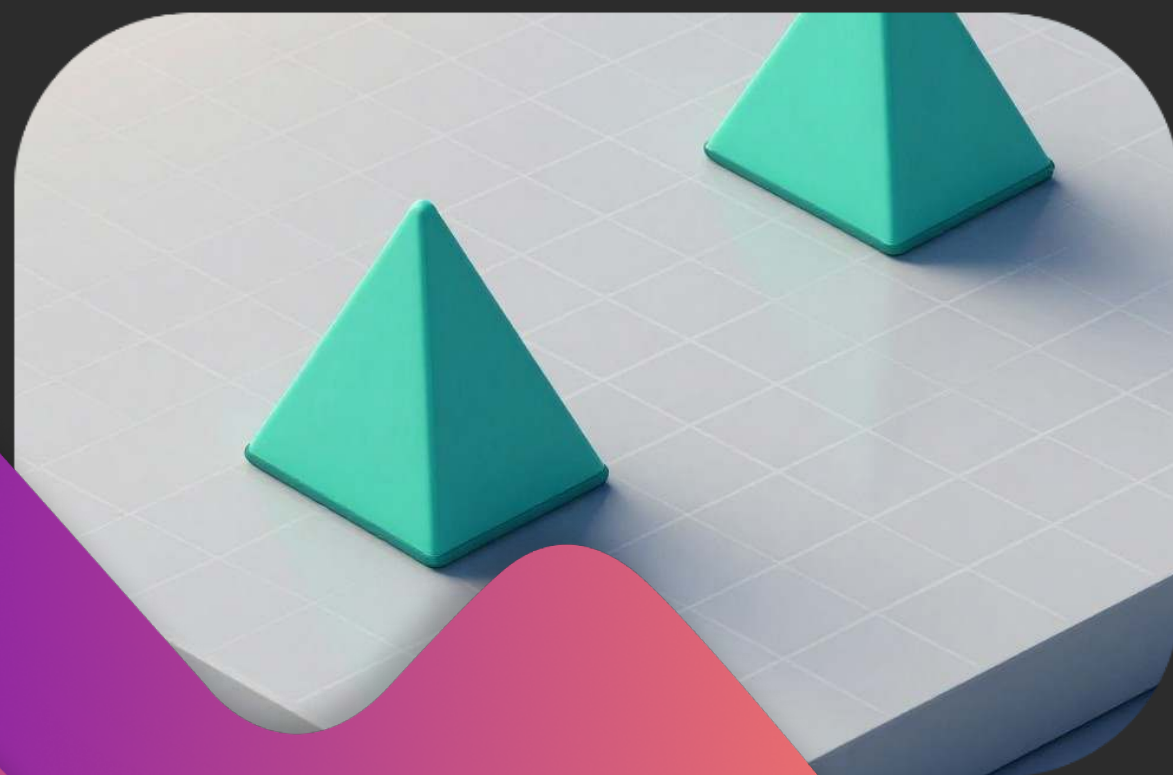
Поворот, перенос и симметрия относятся к изометриям; гомотетия выделяется тем, что сохраняет форму, но изменяет размер.

Сравнение свойств преобразований фигур по школьному курсу геометрии

Пример на координатной плоскости

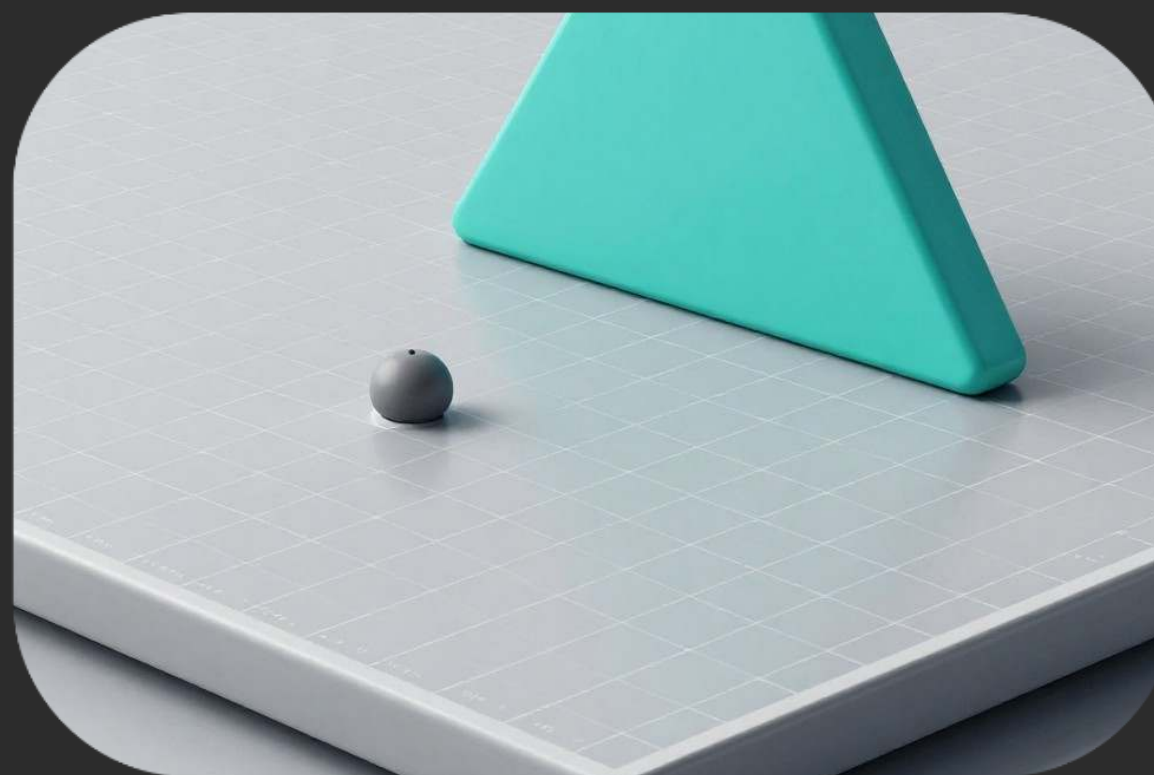
Треугольник сдвигается вправо и вверх

Точки $A(1,1)$, $B(3,1)$ и $C(2,3)$ можно перенести на 4 клетки вправо и 2 клетки вверх. Тогда каждая вершина окажется в новой точке, а сам треугольник сохранит прежний вид и размеры, только сменит положение на плоскости.



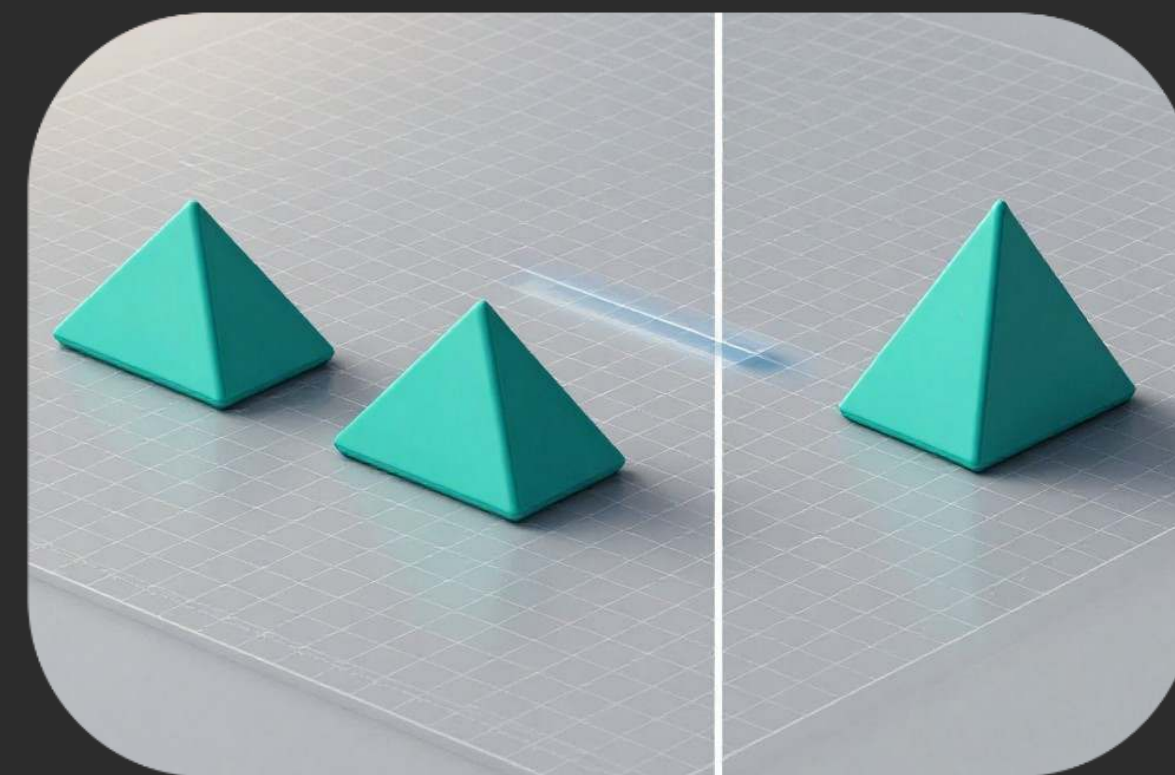
Та же фигура, но больше

Если выполнить гомотетию с центром в начале координат и коэффициентом 2, каждая координата удвоится. Треугольник перейдёт в $A(2,2)$, $B(6,2)$ и $C(4,6)$, то есть станет больше, но останется похожим на исходный.



Два разных эффекта

Этот пример удобно показывает различие между преобразованиями. Параллельный перенос только перемещает фигуру, а гомотетия изменяет её размеры относительно центра. Поэтому координаты меняются по-разному, хотя в обоих случаях фигура остаётся узнаваемой.



Как действует отрицательная гомотетия

1. Выбирают центр

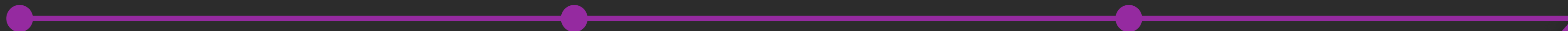
Сначала отмечают центр гомотетии. От него проводят лучи к вершинам исходной фигуры, чтобы задать направление преобразования.

2. Учитывают знак коэффициента

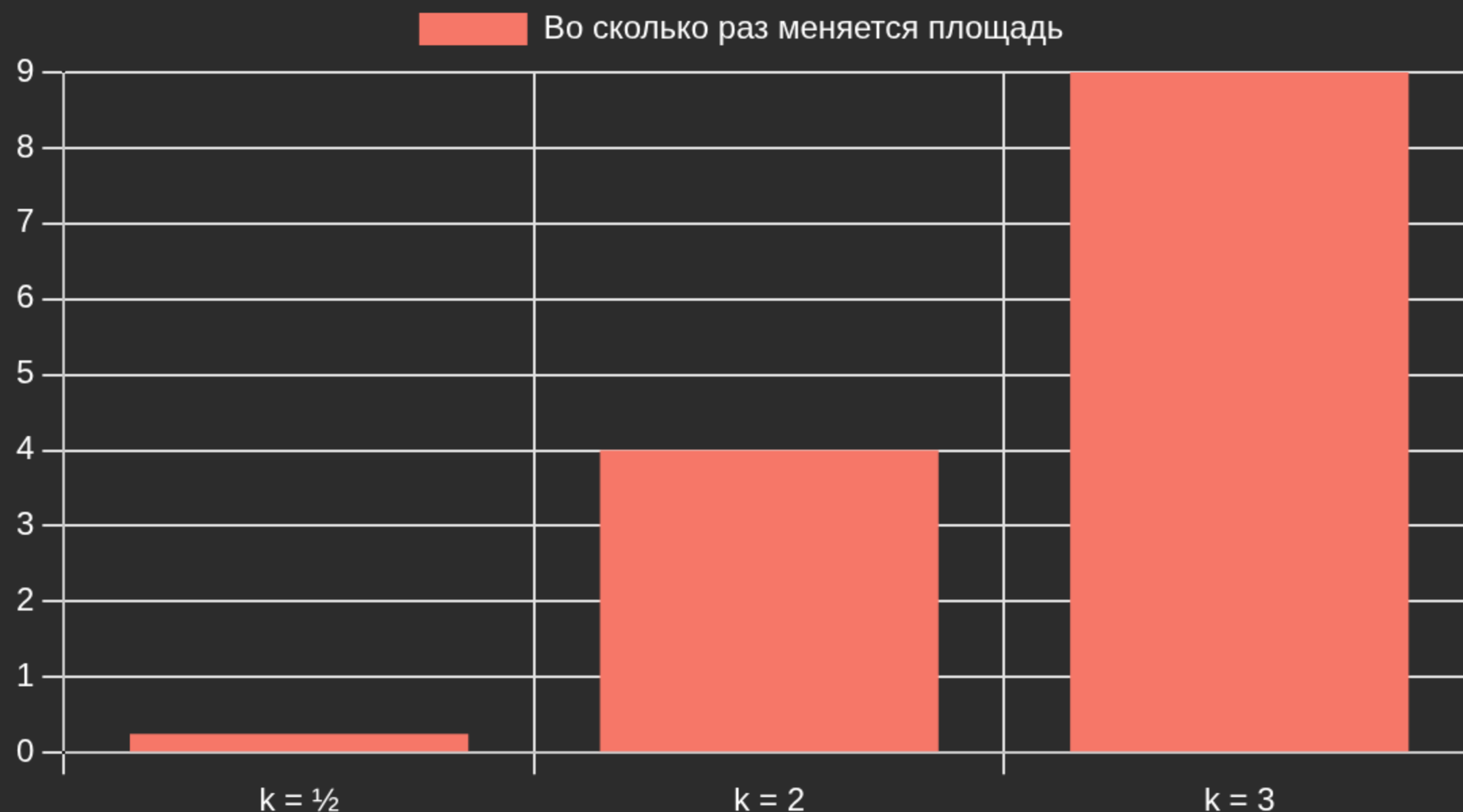
При отрицательном коэффициенте новые точки откладывают на тех же лучах, но в противоположную сторону от центра. Расстояние берут по модулю коэффициента.

3. Получают симметричную фигуру

В результате фигура оказывается по другую сторону от центра и сохраняет подобие. При $k = -1$ она превращается в центрально-симметричное изображение.



Как меняется площадь при гомотетии



Свойство гомотетии: $S' = k^2 \cdot S$; значения взяты из примеров $k = \frac{1}{2}, 2, 3$.

Площадь меняется быстрее, чем длины сторон. Поэтому даже небольшое увеличение фигуры заметно влияет на её размер.

Площадь зависит от квадрата коэффициента: чем больше $|k|$, тем сильнее рост площади; при уменьшении сторон площадь падает особенно быстро.

Сравнение основных свойств преобразований

Преобразование	Длины	Углы	Размер
Изометрия	сохраняются	сохраняются	не меняется
Гомотетия	умножаются на k	сохраняются	меняется
Перенос	сохраняются	сохраняются	не меняется

Краткая таблица помогает увидеть, что именно сохраняется, а что меняется при разных преобразованиях фигур.

Изометрии сохраняют и форму, и размер, а гомотетия сохраняет форму, но задаёт новый масштаб.

Основные свойства изометрий и гомотетии из школьного курса геометрии.

Где встречаются изометрии и гомотетия в жизни

Узоры и орнаменты

В декоративных узорах часто повторяют одну и ту же фигуру без изменения размеров. Такие изображения удобны для сравнения, потому что расстояния и углы остаются прежними.

Чертежи и схемы

На чертежах детали изображают точно по форме, но в другом положении. Здесь важны изометрии: они позволяют перемещать фигуру, не искажая её геометрию.

Карты и планы

Карты, планы зданий и схемы улиц обычно уменьшают в одном масштабе. Это пример гомотетии: объект сохраняет подобие, но становится меньше для удобства работы.

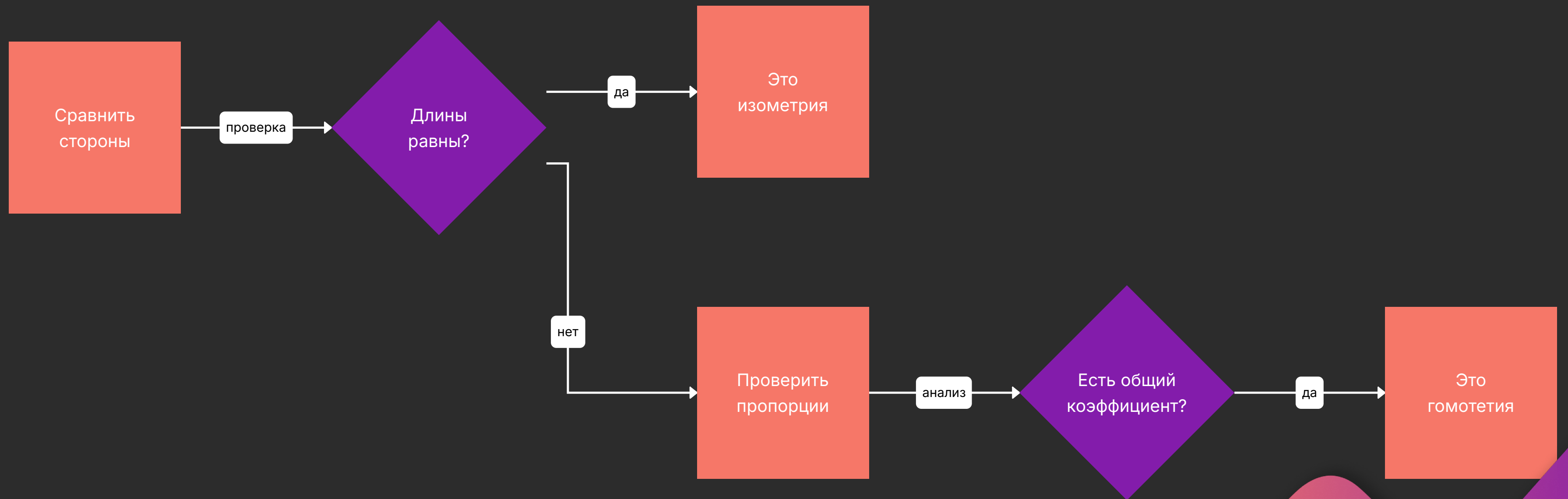
Модели и макеты

Макеты домов, техники и предметов помогают увидеть целое в уменьшенном виде. Все части модели пропорциональны оригиналу, поэтому здесь хорошо заметно действие коэффициента масштаба.



Проверка: изометрия или гомотетия?

Схема сравнения длин, углов и коэффициента изменения размеров



Типичные ошибки при изучении темы

1.

Путают равенство и подобие

Если фигуры выглядят одинаково, это ещё не значит, что они равны. При подобии углы совпадают, но длины сторон могут быть разными, поэтому нужно внимательно сравнивать размеры.

2.

Неверно считают площадь

Частая ошибка — умножать площадь на коэффициент k . На самом деле при гомотетии площадь меняется в k^2 раз, потому что изменяются сразу две стороны фигуры.

3.

Не учитывают знак

Отрицательный коэффициент переносит фигуру на другую сторону от центра. Если забыть про знак, можно получить верное уменьшение или увеличение, но неправильное расположение.

4.

Ошибаются на клетчатой бумаге

При работе по клеткам легко перепутать перенос, поворот и гомотетию. Чтобы не ошибиться, нужно отдельно проверять расстояния, направление и отношение соответствующих сторон.

Масштаб карты как пример гомотетии

Город на листе бумаги

Карта города — это уменьшенная модель местности. На ней улицы, площади и кварталы сохраняют форму, но все расстояния изображены в одном и том же масштабе, чтобы карту было удобно читать и использовать.



Как работает масштаб

Если указан масштаб 1:10 000, то 1 см на карте соответствует 100 м на местности. Это означает, что каждая длина уменьшена одинаково, а направление и взаимное расположение объектов остаются узнаваемыми.



Памятка по формулам и свойствам

Случай	Формула	Что сохраняется
Изометрия	$AB = A'B'$	углы и длины
Гомотетия	$A'B' = k \cdot AB$	углы
Площадь	$S' = k^2 \cdot S$	форма
$k < 0$	ориентация меняется	модуль k

Основные формулы и свойства преобразований фигур из школьного курса геометрии.

Эти записи помогают быстро выбирать нужную формулу при решении задач на преобразования фигур.

Изометрия сохраняет размеры, а гомотетия задаёт общий коэффициент изменения. Формула площади всегда требует квадрата коэффициента.

Что важно запомнить

Изометрии не меняют размеры фигур, а гомотетия сохраняет форму, но задаёт новый масштаб. Если помнить центр, коэффициент и знак, задачи на подобие и построения становятся значительно понятнее.