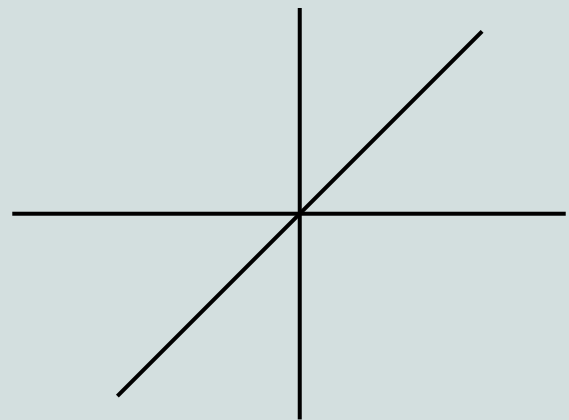


Десятичные и натуральные логарифмы: общая идея и формула перехода



Как связаны $\lg x$ и $\ln x$, и зачем нужна формула перехода?

Зачем изучать логарифмы в 10 классе



Логарифмы продолжают тему показательных функций и помогают преобразовывать выражения, решать уравнения и неравенства, а также понимать связь между разными основаниями и дальнейшим изучением функций.

Определение логарифма и условия существования

01

Смысл определения

Логарифм отвечает на вопрос, в какую степень нужно возвести основание, чтобы получить заданное число. Запись $\log_a b = c$ эквивалентна равенству $a^c = b$.

02

Условия для основания

Основание логарифма должно быть положительным и отличным от единицы: $a > 0, a \neq 1$. Иначе показатель степени перестаёт задавать однозначную и корректную обратную операцию.

03

Условия для аргумента

Аргумент логарифма в действительных числах обязан быть положительным: $b > 0$. Поэтому выражения с нулём и отрицательными числами не имеют значения в обычной школьной области.

04

Частные основания

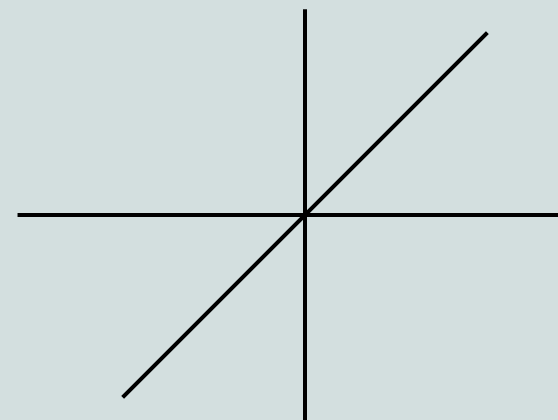
Десятичный логарифм $\lg x$ имеет основание 10, а натуральный логарифм $\ln x$ — основание e . Эти обозначения закрепились как стандартные и используются чаще всего.

05

Почему это важно

Ограничения на основание и аргумент объясняют, почему логарифмы не определены для всех чисел подряд. Именно эти условия нужно проверять перед любым преобразованием.

Так удобно работать с числами в десятичной записи, оценивать порядок величины и быстро интерпретировать большие и малые значения.



10

— именно это основание лежит в основе десятичного логарифма.

Натуральный логарифм $\ln x$



Основание e

Натуральный логарифм строится по основанию $e \approx 2,718281828$. Это число является одной из ключевых констант математики и встречается во многих моделях роста и убывания.



Непрерывные процессы

Натуральный логарифм особенно полезен в задачах о непрерывном росте, сложных процентах и экспоненциальных моделях, где изменения описываются не шагами, а непрерывно.



Обратная операция

Функции $\ln x$ и e^x взаимно обратны: одна восстанавливает аргумент другой. Поэтому $\ln$ удобно использовать там, где нужно перейти от степени к исходному числу.



Школьные преобразования

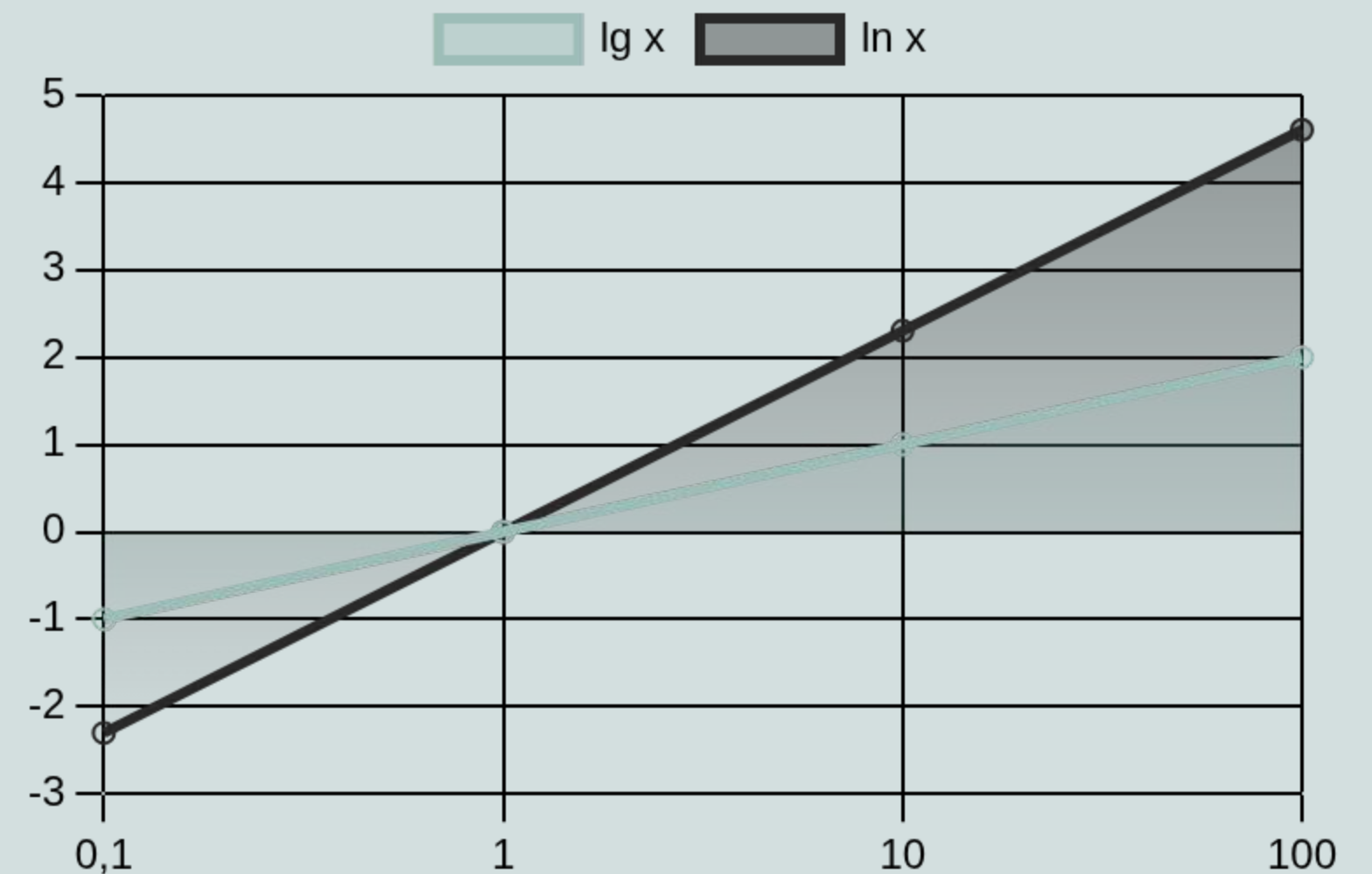
В алгебре $\ln x$ часто выбирают как удобную форму для преобразования формул, сокращения выражений и перехода к более гибким вычислительным приёмам.

Сравнение графиков $\lg x$ и $\ln x$

Обе функции растут одинаково по форме, но отличаются вертикальным масштабом: $\ln x$ всегда примерно в 2,3 раза больше $\lg x$.

Графики имеют общую структуру и одну асимптоту, а различие сводится к выбору основания и масштаба значений.

Свойство $\ln x = \lg x \cdot \ln 10$; $\ln 10 \approx 2,3026$



Свойства логарифмов, одинаковые для любых оснований

Нулевой и единичный логарифм



Для любого допустимого основания выполняется $\log_a 1 = 0$ и $\log_a a = 1$. Эти равенства отражают простейшие случаи определения и помогают быстро проверять вычисления.

Произведение



Логарифм произведения раскладывается в сумму: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$. Это свойство особенно полезно при разложении чисел на множители и упрощении выражений.

Частное



Логарифм частного выражается как разность: $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$. Благодаря этому деление можно заменить более удобным вычитанием логарифмов.

Степень



Логарифм степени равен произведению показателя на логарифм: $\log_a(x^k) = k \cdot \log_a x$. Именно это свойство позволяет выносить показатели перед логарифмами.

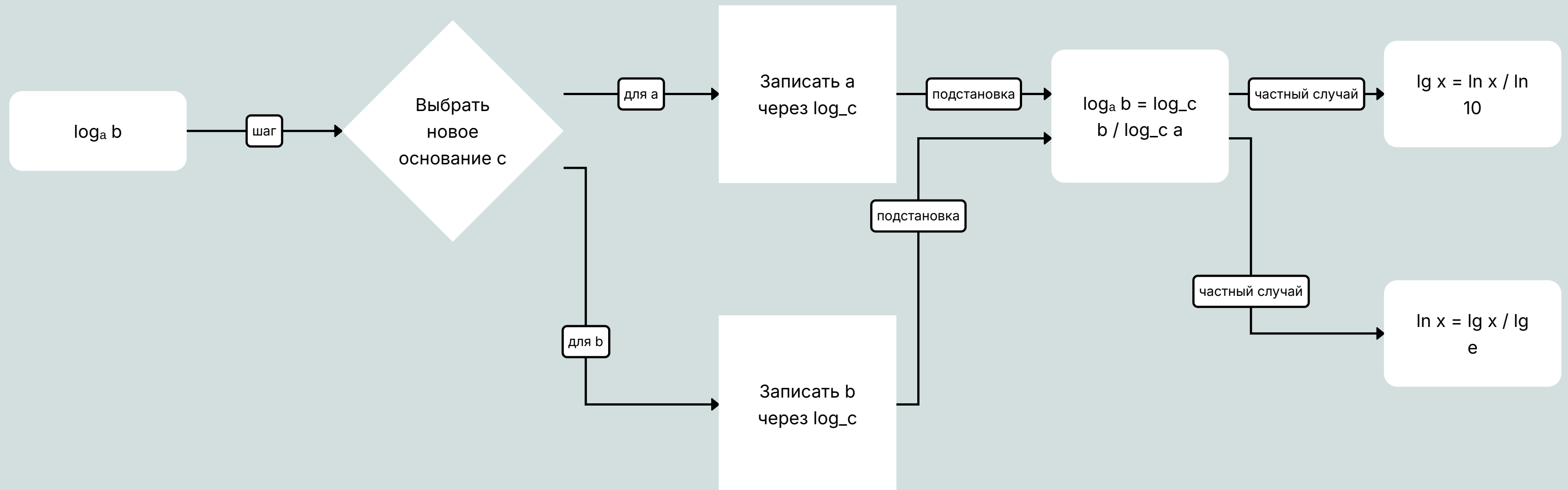
Практический смысл



Все перечисленные свойства работают при соблюдении области определения и позволяют преобразовывать сложные формулы в более короткие и понятные записи.

Переход к новому основанию

Схема показывает, как выражение с одним основанием переписывается через другое.



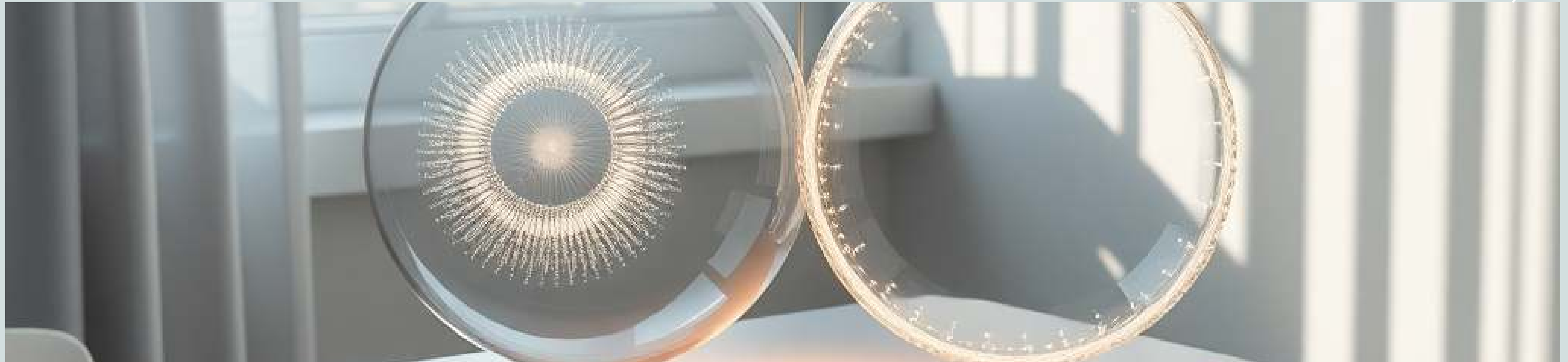
Формула перехода на конкретных примерах

Таблица показывает, как одно и то же значение можно вычислить через разные основания, сохраняя общий принцип преобразования.

Если в числителе и знаменателе используется одно и то же новое основание, значение логарифма не меняется.

Выражение	Преобразование	Результат
$\log_2 8$	$\ln 8 / \ln 2$	3
$\lg 5$	$\ln 5 / \ln 10$	—
$\ln 100$	$\lg 100 \cdot \ln 10$	$2 \ln 10$
$\log_3 81$	$\lg 81 / \lg 3$	4

Число e и связь натурального логарифма с показательной функцией



Константа e

Число $e \approx 2,71828$ возникает в задачах непрерывного роста и связано с пределом $(1 + 1/n)^n$ при $n \rightarrow \infty$. Оно играет особую роль в математике.

Взаимная обратность

Функции $y = e^x$ и $y = \ln x$ взаимно обратны. Это значит, что одна функция восстанавливает аргумент, который был преобразован другой.

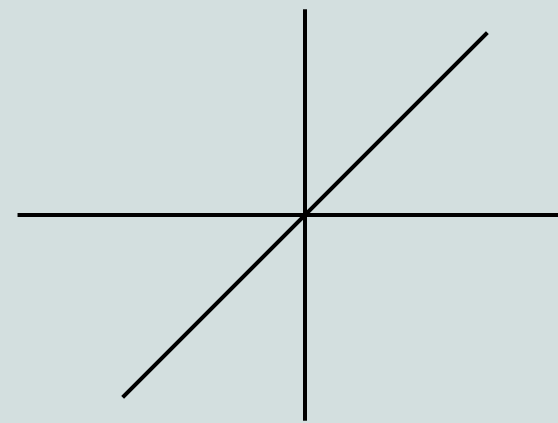
Связь с анализом

Натуральный логарифм особенно важен в математическом анализе, где он помогает описывать производные, интегралы и непрерывные модели изменения величин.

Роль в школьной алгебре

В 10 классе $\ln x$ нужен прежде всего для преобразований формул, удобного перехода между основаниями и более гибкой работы с логарифмическими выражениями.

Чтобы не вычислять $\ln x$ заново,
достаточно умножить $\lg x$ на этот
коэффициент и получить
хорошую оценку.



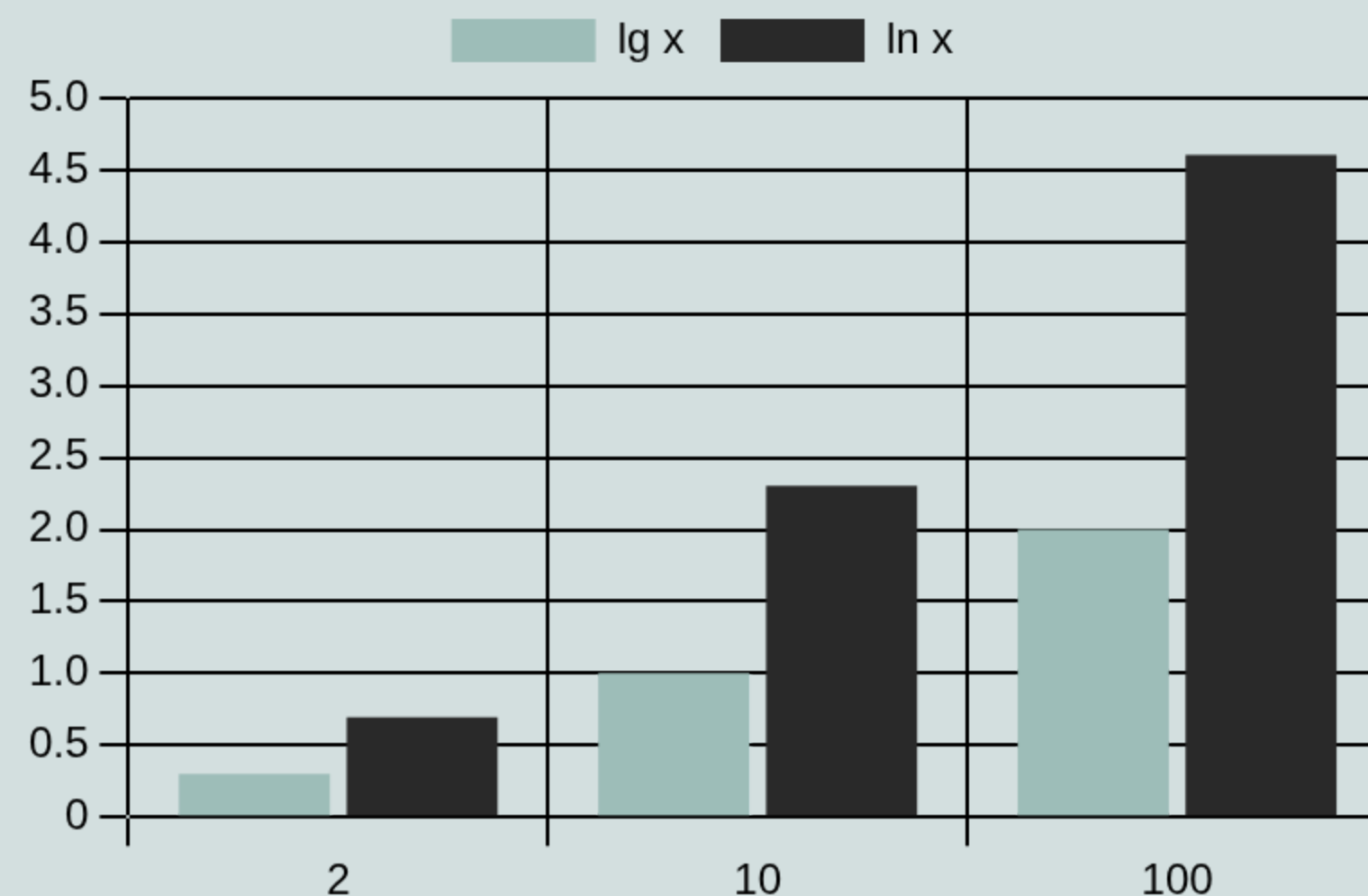
2,3026

— это коэффициент, позволяющий
быстро перевести десятичный
логарифм в натуральный.

Разница значений $\lg x$ и $\ln x$ на одних и тех же x

На диаграмме видно, что при росте аргумента обе функции увеличиваются, но натуральный логарифм сохраняет примерно один и тот же масштабный коэффициент относительно $\lg x$.

Для одинаковых x значения $\ln x$ стабильно больше $\lg x$ примерно в 2,3 раза, что согласуется с формулой перехода.



Учебные значения: $\lg 2 \approx 0,301$; $\ln 2 \approx 0,693$; $\lg 10 = 1$; $\ln 10 \approx 2,303$; $\lg 100 = 2$; $\ln 100 \approx 4,605$.

Типичные ошибки при работе с логарифмами



Неверная область определения

Логарифм нельзя брать от нуля и отрицательных чисел в действительных числах. Перед вычислением всегда проверяют, что аргумент строго положителен, иначе выражение не имеет смысла.



Путаница с показательной формой

Запись $\log_a b$ и выражение a^b означают разные операции. Первая отвечает на вопрос о показателе степени, а вторая сразу вычисляет степень числа.



Ошибочное правило для суммы

Свойства логарифмов работают для произведения, частного и степени, но не для суммы. Поэтому $\log_a(x+y)$ нельзя заменять на $\log_a x + \log_a y$.



Неполный переход к основанию

При смене основания в формуле должны появляться и числитель, и знаменатель. Если изменить только одну часть дроби, преобразование станет неверным и исказит результат.



Пропуск проверки ответа

После преобразований полезно сверить, удовлетворяет ли итоговое выражение условиям определения. Такая проверка помогает заметить потерю ограничений и избежать формально правильного, но неверного ответа.

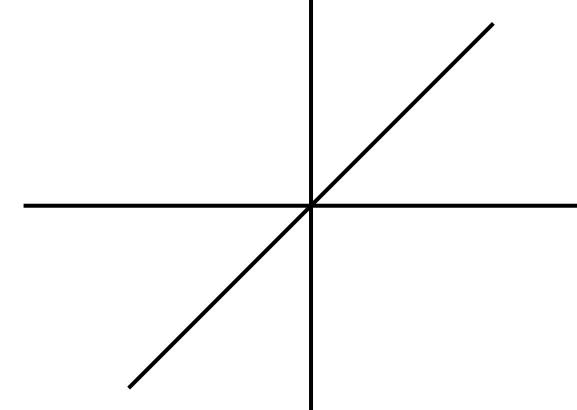
Десятичный и натуральный логарифмы: сравнение

Признак	$\lg x$	$\ln x$	Общее
Основание	10	$e \approx 2,71828$	$x > 0$
Опорные значения	$\lg 1 = 0$	$\ln 1 = 0$	Возрастает

Сравнение показывает, что $\lg x$ и $\ln x$ отличаются только основанием, но совпадают по области определения и общей логической роли в алгебре.

Обе функции устроены одинаково по смыслу: это обратные функции к соответствующим показателям, поэтому различие связано лишь с выбором основания.

Примеры вычислений с использованием формулы перехода



01

Десятичный через натуральный

Если известны $\ln 2$ и $\ln 10$, то $\lg 2$ удобно находить как отношение этих величин. Такой способ особенно полезен, когда калькулятор или таблица дают только натуральные логарифмы.

02

Логарифм большого числа

Для $\lg 50$ можно сначала перейти к натуральному логарифму, а затем разделить на $\ln 10$. Это уменьшает число преобразований и позволяет использовать разложение 50 на множители.

03

Натуральный через десятичный

Когда удобнее считать через $\lg$, применяют обратную запись: $\ln 5 = \lg 5 \cdot \ln 10$. Здесь формула перехода работает как мост между двумя системами обозначений.

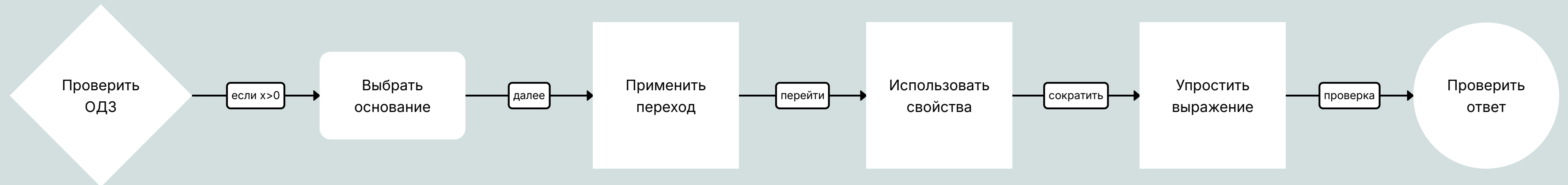
04

Разложение на множители

При вычислении $\ln 50$ полезно записать 50 как $5 \cdot 10$ и использовать свойство логарифма произведения. Тогда выражение упрощается до суммы $\ln 5$ и $\ln 10$ без лишних шагов.

Алгоритм преобразования логарифмического выражения

Последовательность действий при переходе к удобному основанию и упрощении выражения.



Логарифмы в реальных шкалах и моделях



01

Шкала pH: десятичный логарифм в химии

Шкала pH построена так, чтобы удобнее сравнивать кислотность растворов. Изменение значения на одну единицу означает десятикратное изменение концентрации ионов водорода, поэтому десятичный логарифм здесь особенно нагляден и практичен.



02

Непрерывный рост и распад

Натуральный логарифм часто появляется в моделях, где процесс идёт непрерывно: при росте населения, радиоактивном распаде или начислении процентов. Он помогает описывать изменение не по шагам, а как плавную зависимость от времени.



03

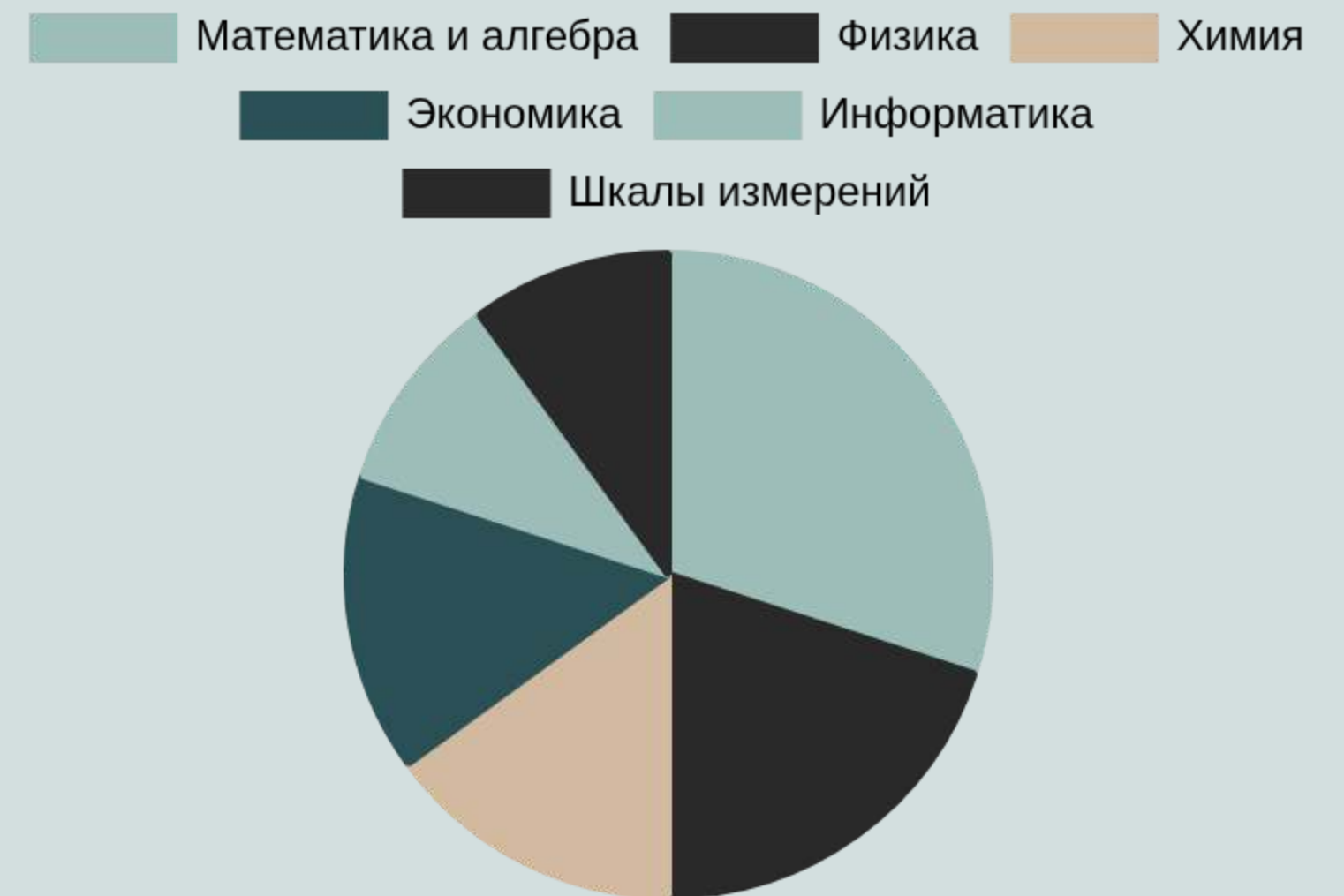
Когда важны относительные изменения

Обе формы логарифма позволяют смотреть не на абсолютную величину, а на масштаб изменения. Именно поэтому логарифмы так полезны в научных и прикладных задачах, где сравнивают порядок величины и характер процесса.

Где чаще встречаются $\lg$ и $\ln$

Распределение отражает не конкуренцию, а разные привычные области применения: $\lg$ связан с десятичными шкалами, а $\ln$ — с непрерывными моделями и функциями.

Обе формы логарифма широко используются, но каждая особенно удобна в своей группе задач, поэтому выбор основания определяется контекстом.



Главные выводы по теме

01

Разные основания

Десятичный и натуральный логарифмы отличаются только основанием: 10 и e . Смысл операции остаётся одинаковым — это способ найти показатель степени по известным числам.

02

Формула перехода

Формула $\log_a b = \log_c b / \log_c a$ позволяет вычислять логарифм через любое удобное основание. Благодаря ей можно свободно переходить между $\lg$ и $\ln$.

03

Общие свойства

Свойства логарифмов не зависят от выбранного основания, если соблюдены условия существования. Именно поэтому преобразования, выученные для одного логарифма, работают и для другого.

04

Выбор по задаче

В школьных примерах удобнее использовать то основание, которое проще для записи и вычислений. Выбор между $\lg$ и $\ln$ определяется не математической разницей, а практической целью.

05

Единая идея

Обе записи помогают описывать одну и ту же обратную связь между степенью и логарифмом. Понимание этой связи делает алгебраические преобразования более осмысленными и уверенными.

Формула перехода делает логарифмы единым инструментом

Формула перехода объединяет $\lg$ и $\ln$ в одну систему, упрощает вычисления и помогает выбирать удобное основание. Это основа для дальнейшей работы с уравнениями, преобразованиями и функциями.