

File Edit Search Help

Векторы, средняя линия и медианы треугольника

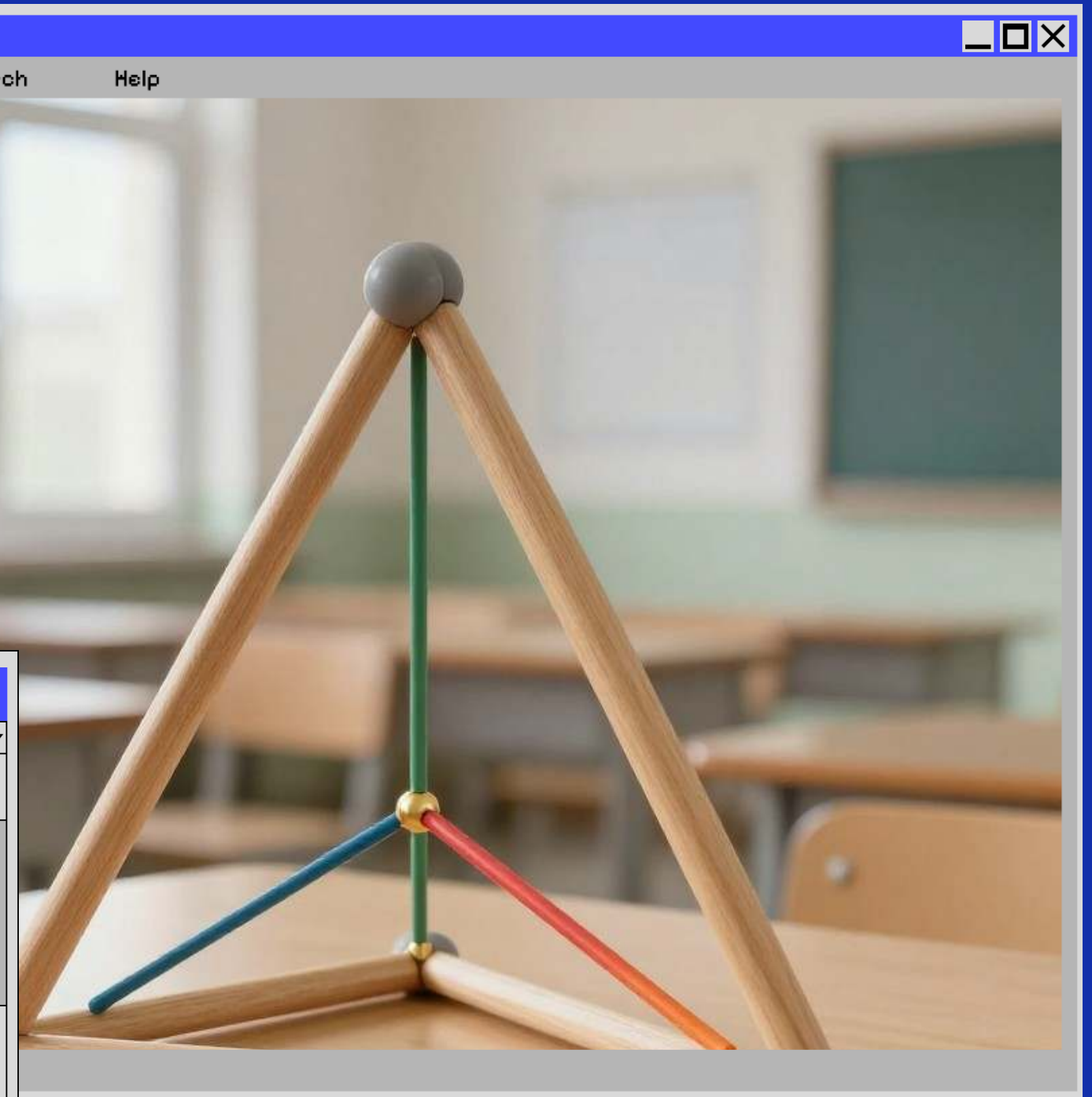
Разберём, как векторы задают направление, а средняя линия и медианы дают точные связи в треугольнике.

Ok

Почему эти темы изучают вместе

Ok

Они помогают работать с треугольником через «направление» и «деление отрезков». Векторы учат сравнивать направления, средняя линия связывает середины сторон, а медианы приводят к центру пересечения трёх линий — важной внутренней точке.



Что такое вектор

- 1 Вектор — это отрезок, у которого есть направление: выделяют начало и конец. Поэтому важны не только размеры, но и то, «куда» направлен отрезок.
- 2 У равных векторов совпадают длина и направление. Нулевой вектор имеет длину 0 и не задаёт перемещения.
- 3 В школьных задачах векторы используют, чтобы сравнивать отрезки по направлению, записывать перемещения и находить параллельные направления.

Координаты вектора на плоскости

1

Если $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то координаты вектора AB равны $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Это показывает, как меняется положение при движении по оси x и по оси y .

2

Числа в скобках удобно читать как «сдвиг» по каждой координате: первый компонент отвечает за горизонталь, второй — за вертикаль.

3

Длину вектора AB находят по формуле $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Так можно проверять расстояния и сравнивать направления по координатам.

Алгоритм решения с координатами и векторами

Пошаговый план: данные → выбор объектов → расчёты → вывод

Ok

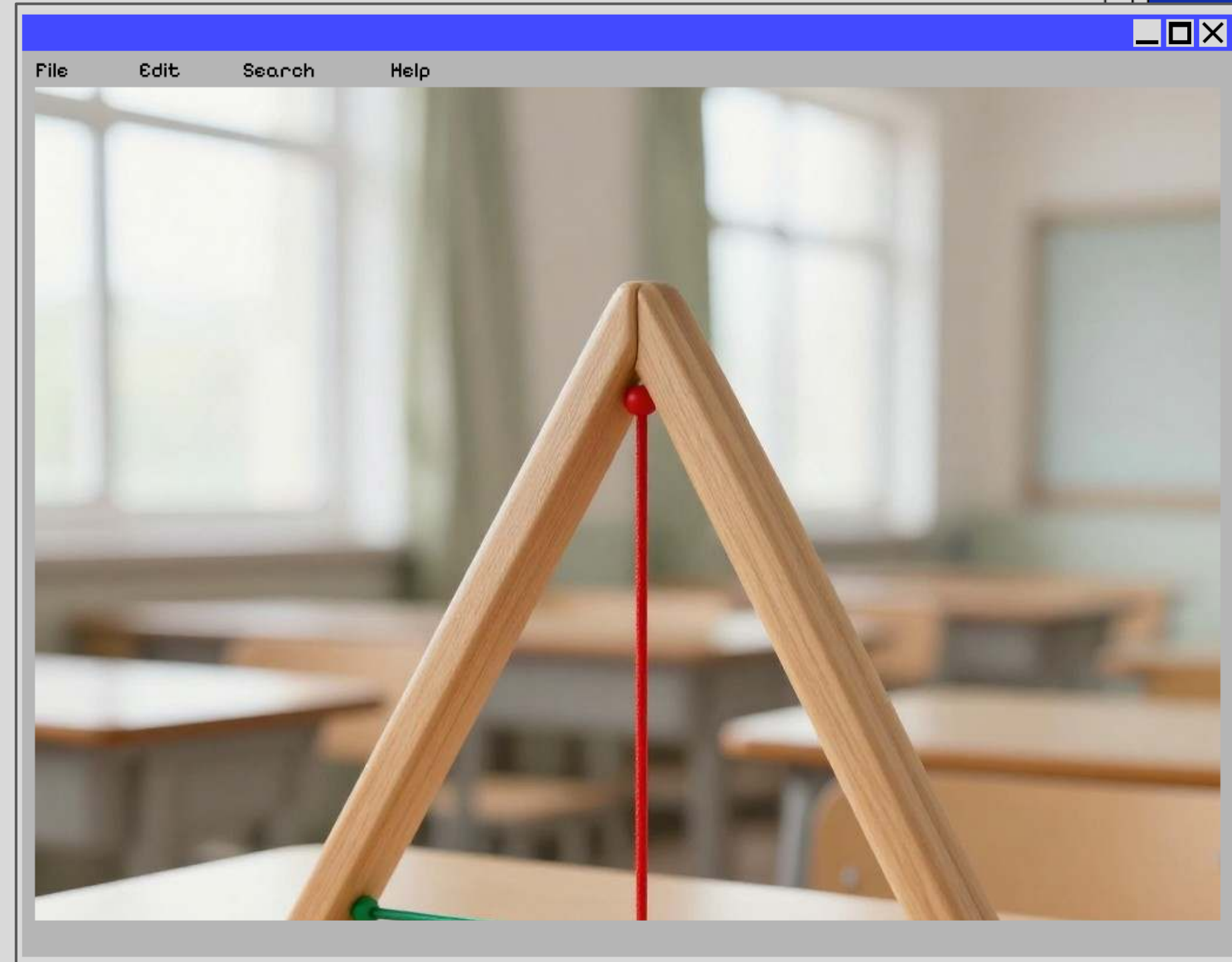
Основные элементы треугольника

Что обычно обозначают в треугольнике

В треугольнике рассматривают вершины, стороны и углы. Отдельно выделяют медианы, высоты и биссектрисы — именно эти отрезки помогают решать разные виды задач.

Почему важны середины и медианы

Медиана соединяет вершину с серединой противоположной стороны. В обозначениях удобно использовать A, B, C и середины сторон M, N, P , а также помнить о точке пересечения медиан внутри треугольника.



12 см

Если третья сторона равна 12 см, то
средняя линия будет 6 см.

Средняя линия — ключ к вычислениям: она
связана с третьей стороной простым
правилом «в два раза меньше».

Ok

Свойства средней линии треугольника

Коротко собраны факты, которые позволяют быстро находить неизвестные длины и проверять параллельность.

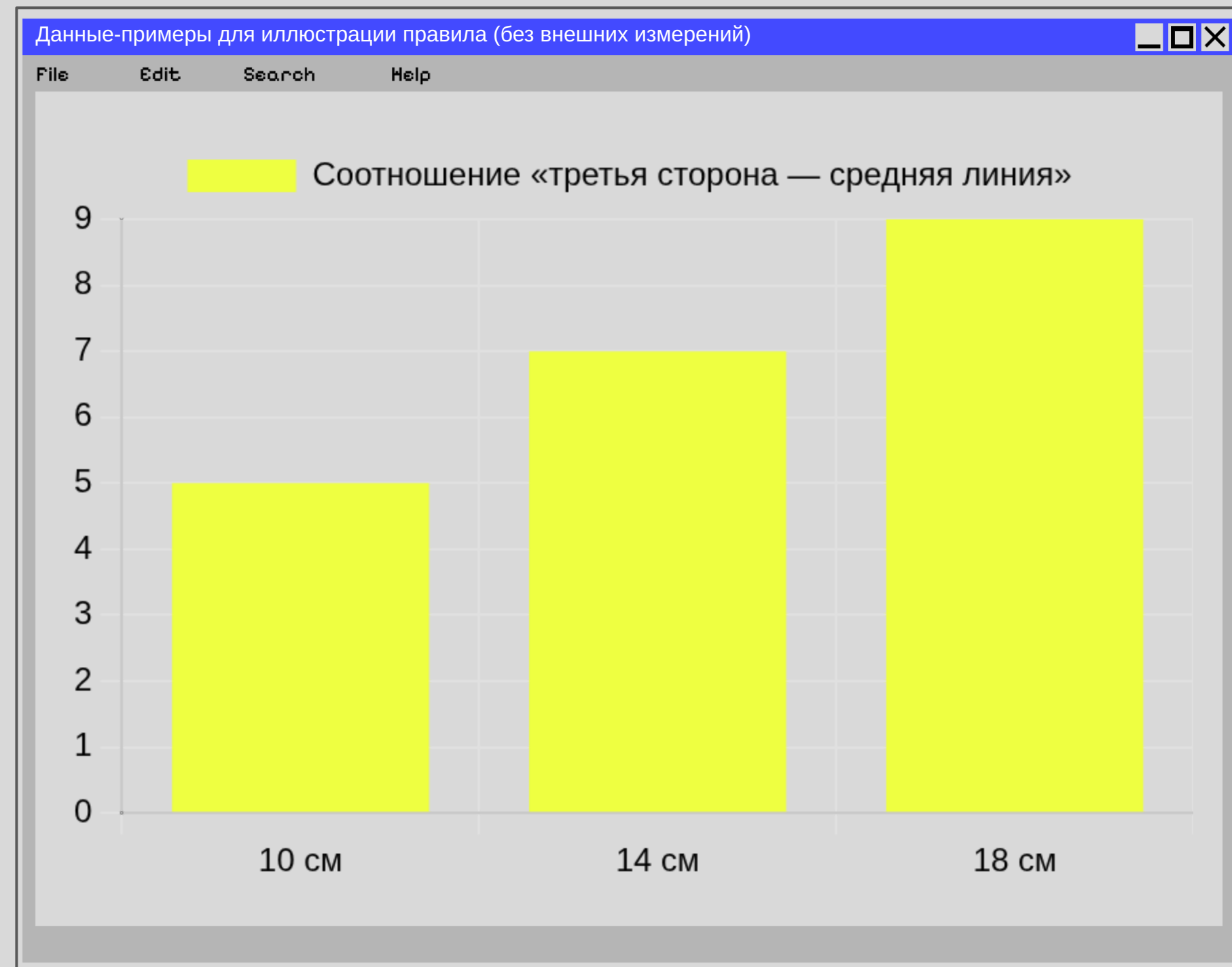
Все свойства работают вместе: сначала устанавливают параллельность, затем используют правило «половина» для точного вычисления.

Свойства средней линии треугольника		
File Edit Search Help		
Признак	Что известно	Зависимость по длине
Что соединяет	Середины двух сторон	—
Параллельность	Третьей стороне	—
Длина средней линии	—	Равна половине третьей стороны
Обратная задача	По средней линии находим сторону	Третья сторона = 2·(средняя линия)

Примеры длины средней линии

Для каждой пары видно одно и то же правило: средняя линия ровно вдвое короче третьей стороны.

Диаграмма подтверждает общий закон средней линии: её длина составляет половину длины третьей стороны.



Почему средняя линия параллельна третьей стороне

- 1 Пусть M и N — середины сторон AB и AC . Тогда $AM = 1/2 \cdot AB$ и $AN = 1/2 \cdot AC$. Отрезки равны половинам соответствующих сторон треугольника.
- 2 Когда боковые стороны треугольника делятся одинаково (пополам), получается отрезок MN , «направление» которого совпадает с направлением третьей стороны BC .
- 3 Следовательно, $MN \parallel BC$, а также $MN = 1/2 \cdot BC$. Это основание для многих доказательств о параллельности и длинах.

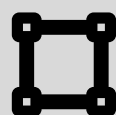
Задачи, в которых используется средняя линия



Находим неизвестные длины

Если в условии известна третья сторона и задан треугольник, средняя линия позволяет сразу получить нужную длину: достаточно взять половину. Обратная ситуация тоже решается умножением на два.

Ok



Проверяем параллельность

Когда отрезок соединяет середины двух сторон, его можно проверить на параллельность третьей стороне. По свойству средней линии направления совпадают, значит, параллельность доказывается без дополнительных измерений.

Ok



Точно считаем по сторонам

Средняя линия связывает стороны одной формулой, поэтому вычисления получаются аккуратными. Это помогает находить периметры и длины составных отрезков, если фигуры собраны по серединам.

Ok



Сравниваем периметры фигур

Иногда сравнивают периметры двух фигур: одна построена по серединным отрезкам другой. Поскольку каждую нужную сторону можно выразить через среднюю линию, получается строгое соотношение периметров.

Ok

Середина отрезка в координатах

Даны точки $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$; нужно найти середину M и дальше построить среднюю линию или медиану.

Ok

Медиана треугольника

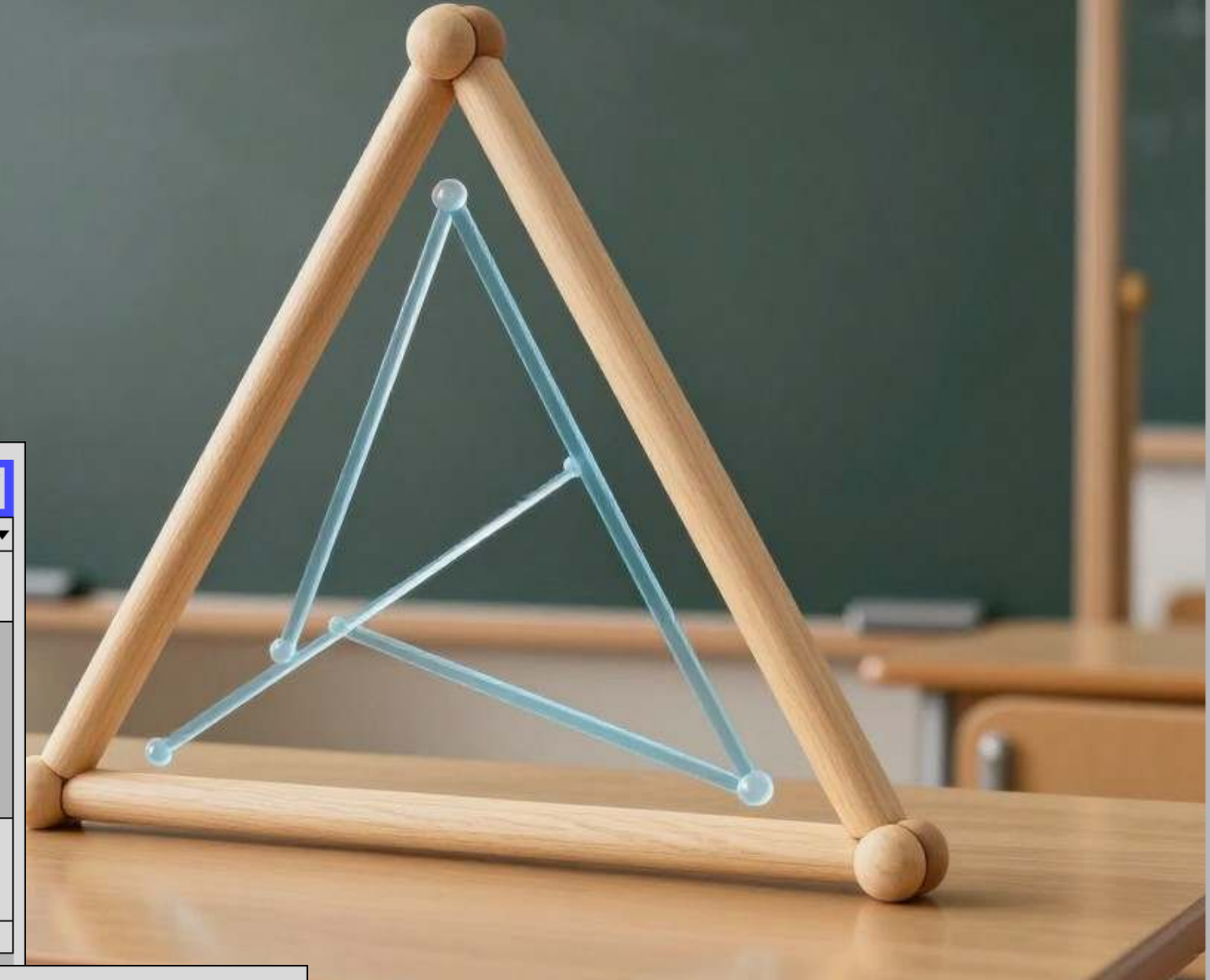
- 1 Медиана треугольника — это отрезок, который соединяет вершину с серединой противоположной стороны. Обозначают её обычно так: из вершины A к середине стороны BC .
- 2 У любого треугольника три медианы: по одной из каждой вершины. Несмотря на то, что они идут в разные стороны, медианы имеют важное «общее» свойство — всегда пересекаются в одной точке внутри треугольника.
- 3 Эта точка пересечения помогает находить отношения между частями и упрощает вычисления. Поэтому медианы применяют, когда нужно связать длины разных отрезков, не прибегая к лишним построениям.

Точка пересечения медиан

Ok

1 Точка пересечения медиан называется центром тяжести, или центроидом. Она делит каждую медиану в отношении 2:1, если считать расстояния от вершины к противоположной стороне.

2 То есть участок от вершины до точки пересечения в два раза длиннее, чем участок от точки пересечения до середины соответствующей стороны. На рисунке удобно показывать три медианы и одну общую точку внутри треугольника.



Отношение частей медианы

Теоретическое свойство точки пересечения медиан

File Edit Search Help

Медиана	Отношение частей
AG	$AG:GM = 2:1$
BG	$BG:GN = 2:1$
CG	$CG:GP = 2:1$

В треугольнике ABC при G — точке пересечения медиан выполняется одинаковое отношение 2:1 для всех трёх медиан. Это позволяет быстро находить длины частей, если известна длина медианы.

Центр тяжести делит каждую медиану на две части так, что от вершины участок вдвое больше участка до середины стороны.

Наглядное отношение 2:1 на медиане

На диаграмме одна и та же медиана мысленно разделена на три равные по шкале части: две идут от вершины до G, одна — от G до середины стороны.

Такое деление повторяется для всех трёх медиан, поэтому достаточно знать отношение 2:1, чтобы находить неизвестные части без сложных построений.



Как связать медианы и векторы

Ok

- 1 Если вершины треугольника заданы координатами, середины сторон можно находить по формуле координат. Это даёт точки, через которые затем проводят медианы.
- 2 Далее становится возможным вычислить координаты точки пересечения медиан и проверить, что она лежит на каждой медиане. При таком подходе удобно опираться на точные координаты, а не на измерения рисунка.
- 3 Векторный взгляд помогает формально описывать направления отрезков: медиана задаётся вектором от вершины к найденной середине. Так проще контролировать, что вычисления согласуются с геометрическим смыслом.
- 4 Проверка отношения 2:1 подтверждает ключевое свойство центроида: его положение зависит сразу от всех трёх вершин, а не только от одной стороны или угла.

Примеры применения в задачах



Средняя линия в «длинах»

Если нужно найти неизвестные стороны или отрезки внутри треугольника, средняя линия помогает получить скрытые длины. Она связана с третьей стороной строгим соотношением: половина длины.



Медианы и «особая точка»

Когда требуется определить внутреннюю точку или проверить пропорции, используют медианы и их пересечение. Центроид задаёт отношение 2:1 между частями каждой медианы.



Координатные середины и построения

На координатной плоскости можно находить середины сторон, затем строить средние линии и медианы. Так легче доказывать параллельность и находить длины через формулы, опираясь на вычисления.



Сравнение по длине и форме

В задачах прикладного характера свойства средней линии и медиан позволяют сравнивать части треугольника. Часто это сводится к аккуратным вычислениям длин и к выводу о том, как изменяются периметры.

Алгоритм решения задач по теме

Опираемся на середины сторон, свойства средней линии и отношение 2:1 для точки пересечения медиан.

Ok

Главные выводы урока

Ok

Векторы помогают записывать направление и длину отрезков, а также удобно работать с координатами. Средняя линия соединяет середины двух сторон, параллельна третьей и равна половине её длины. Медианы пересекаются в одной точке и делят каждую медиану в отношении 2:1.

