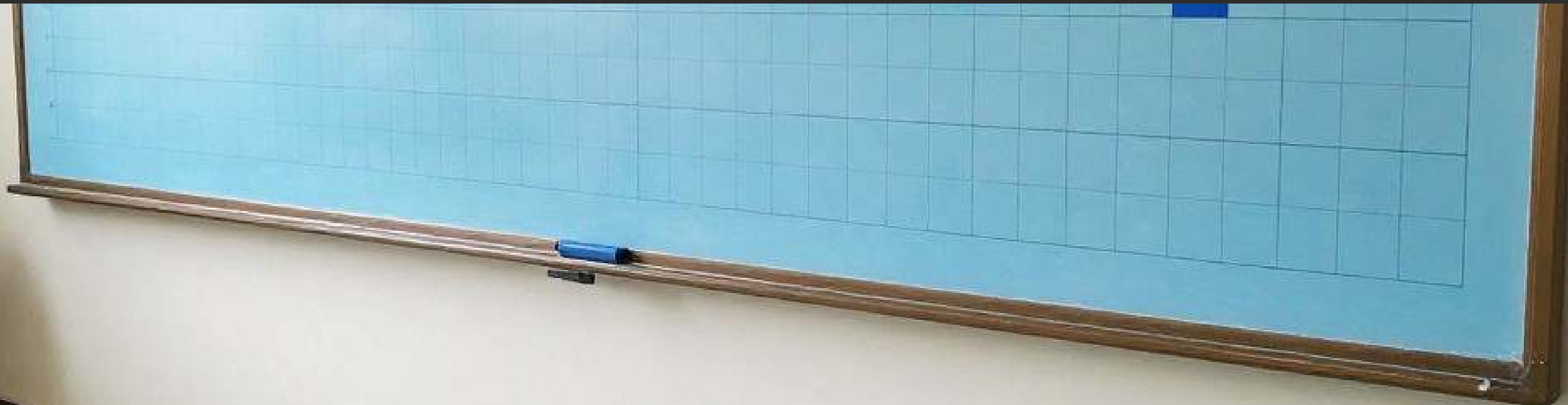


Системы неравенств на плоскости

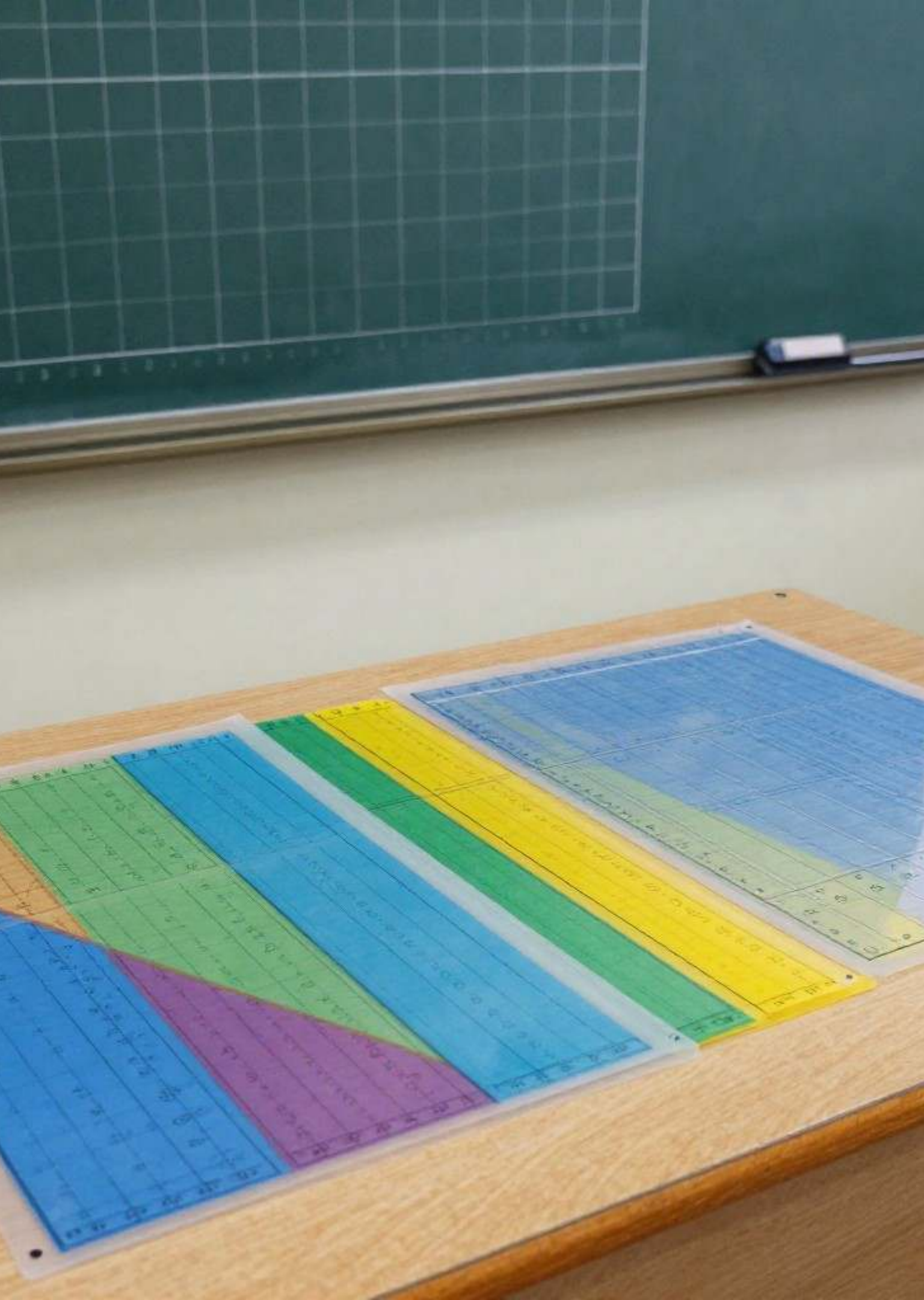
На плоскости отвечают не точки, а целые области решений.



Что нужно знать заранее

Линейное неравенство с двумя переменными задаёт область, а не одно число. В системе нужно выполнить все условия сразу, поэтому ответом становится общая часть этих областей.





Что такое система неравенств

Несколько условий

Система состоит из двух или более неравенств, которые рассматриваются одновременно. Каждое из них ограничивает свою область на координатной плоскости.

Точка решения

Решением считается любая точка, которая подходит всем неравенствам сразу. Если хотя бы одно условие нарушено, точка не входит в ответ.

Общая область

При одном неравенстве ищут одну полуплоскость. В системе нужно выделить их общую часть, то есть пересечение всех подходящих областей.

Графический смысл

Такой способ позволяет описывать целые фигуры на плоскости. Поэтому важно уметь читать график и проверять точки подстановкой.

Одно неравенство — одна область

1. Одна полуплоскость

Неравенство вида $ax+by \leq c$ или $ax+by > c$ задаёт целую полуплоскость. Это значит, что решений бесконечно много, и они заполняют часть плоскости.

2. Граница области

Граница этой области — прямая $ax+by=c$. Она показывает, где заканчивается одна сторона и начинается другая.

3. Входит ли прямая

Если знак нестрогий, прямая входит в решение. При строгом знаке сама граница не принадлежит множеству решений.



Как строится граничная прямая

Построить равенство

Сначала заменяют неравенство на равенство и строят прямую $ax+by=c$. Так получают линию, которая делит плоскость на две части.

Выбрать тип линии

Для $\leq$ и $\geq$ линия рисуется сплошной, потому что граница входит в ответ. Для $<$ и $>$ используют пунктир, показывающий исключение границы.

Понять запись

По виду линии сразу видно, включается ли граница в множество решений. Это помогает не забыть важную деталь при записи ответа.

Как выбрать нужную сторону



1. Выбрать точку

Возьмите проверочную точку, часто $(0; 0)$, если она не лежит на прямой. Она помогает быстро понять, какая сторона подходит.



2. Проверить знак

Подставьте координаты точки в неравенство. Если знак верен, то нужная полуплоскость находится по эту сторону границы.

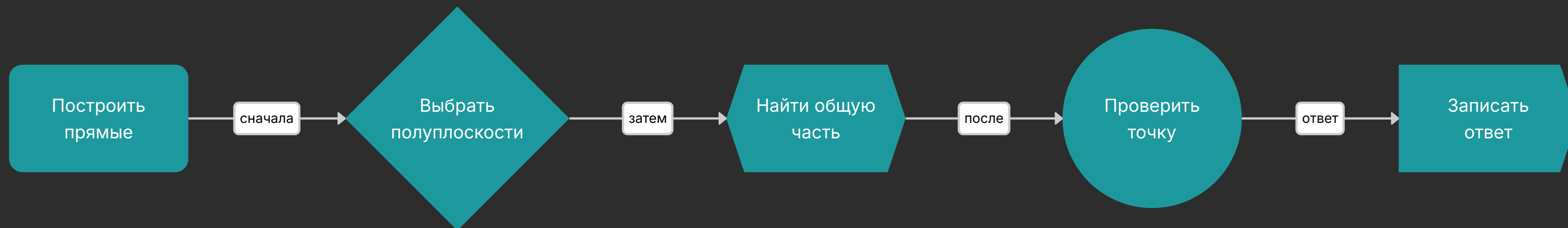


3. Отметить сторону

Если неравенство не выполняется, закрашивают противоположную сторону прямой. Так выбирают именно ту область, где все точки дают верный ответ.

Алгоритм решения системы

Пошаговый переход от каждого неравенства к общему множеству решений



Как выглядит ответ

1.

Что является ответом

Ответ записывают как множество точек, подходящих всем условиям сразу. Это может быть область на плоскости, а не одна линия и не одно число.

2.

Как формулируют ответ

В записи используют слова «пересечение областей» или «множество решений». Иногда ответ описывают словами: все точки выделенной фигуры, кроме границы или вместе с ней.

3.

Как проверить точку

Любую выбранную точку можно проверить подстановкой. Если она подходит каждому неравенству, значит действительно лежит в области решений.



Пример 1: пересекающиеся области

Область с двумя границами

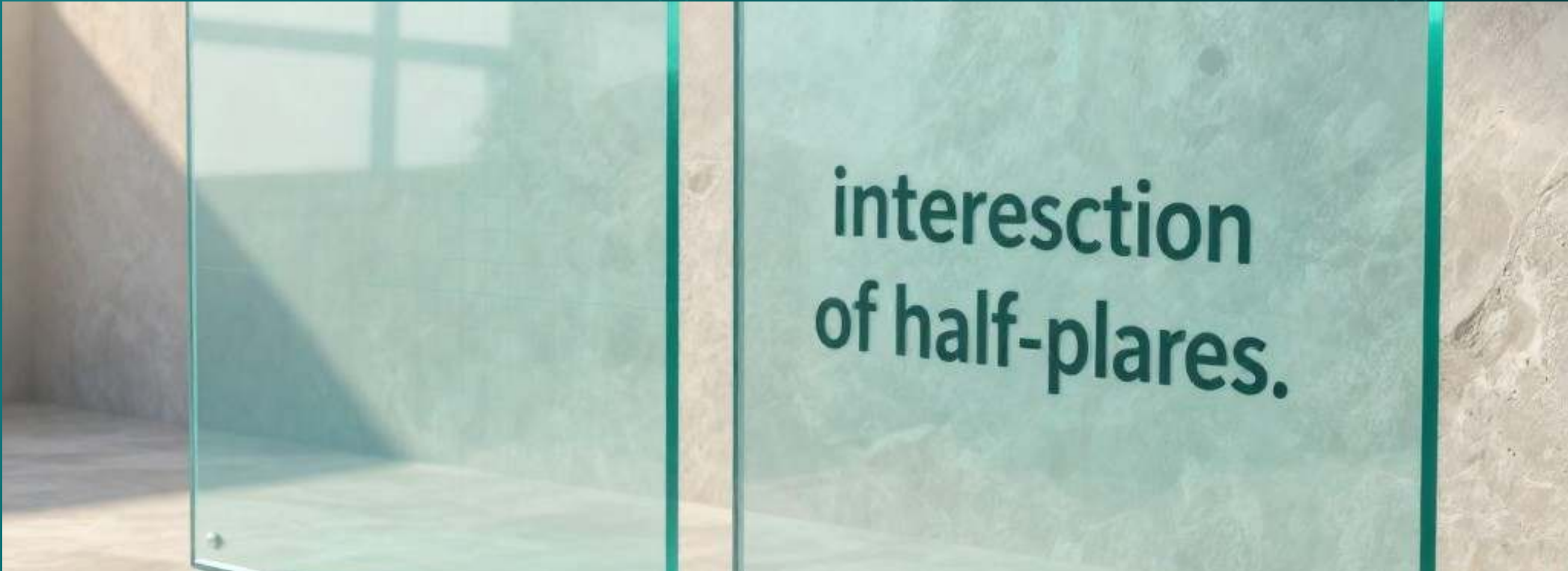
Условие $x+y \leq 4$ означает точки ниже прямой $x+y=4$, а $x \geq 1$ — точки справа от вертикальной прямой $x=1$. Вместе они образуют фигуру с двумя границами, которая уходит вверх и вправо. Точка $(2; 1)$ подходит обоим условиям, поэтому попадает в решение.



a region with two boundaries.

Пересечение полуплоскостей

На рисунке видно, что линии пересекаются и делят плоскость на несколько частей. Нужна только та часть, где одновременно выполняются оба неравенства. Именно поэтому решение — не одна линия, а целая заштрихованная область.



**interesection
of half-plares.**

Пример 2: область между прямыми

Первая граница

Неравенство $y > x$ означает точки выше диагонали $y = x$. Это одна из границ полосы, внутри которой должны оказаться все подходящие точки.

Вторая граница

Неравенство $y < 2$ задаёт область ниже горизонтальной прямой $y = 2$. Вместе с предыдущим условием получается промежуток между двумя линиями.

Общая область

Общая часть двух полуплоскостей образует широкую полосу. Она тянется бесконечно, потому что обе границы продолжаются во все стороны.

Проверка точек

Точка $(1; 1,5)$ лежит выше $y = x$ и ниже $y = 2$, значит подходит. Точка $(1; 2,5)$ нарушает второе условие и не является решением.

Пример 3: пустое множество

Параллельные границы

Для неравенств $x+y < 1$ и $x+y > 3$ граничные прямые параллельны, поэтому подходящие полуплоскости не накладываются друг на друга. Общих точек у них нет, значит решений не существует.

Нет общей части

На рисунке одна область лежит ниже прямой $x+y=1$, а другая — выше прямой $x+y=3$. Между ними остаётся пустой промежуток, который и показывает отсутствие пересечения.

Проверка точкой

Если подставить любую точку, хотя бы одно из двух неравенств нарушится. Это удобный способ быстро проверить, что система задаёт пустое множество, а не скрытую узкую область.



История одного совпадения

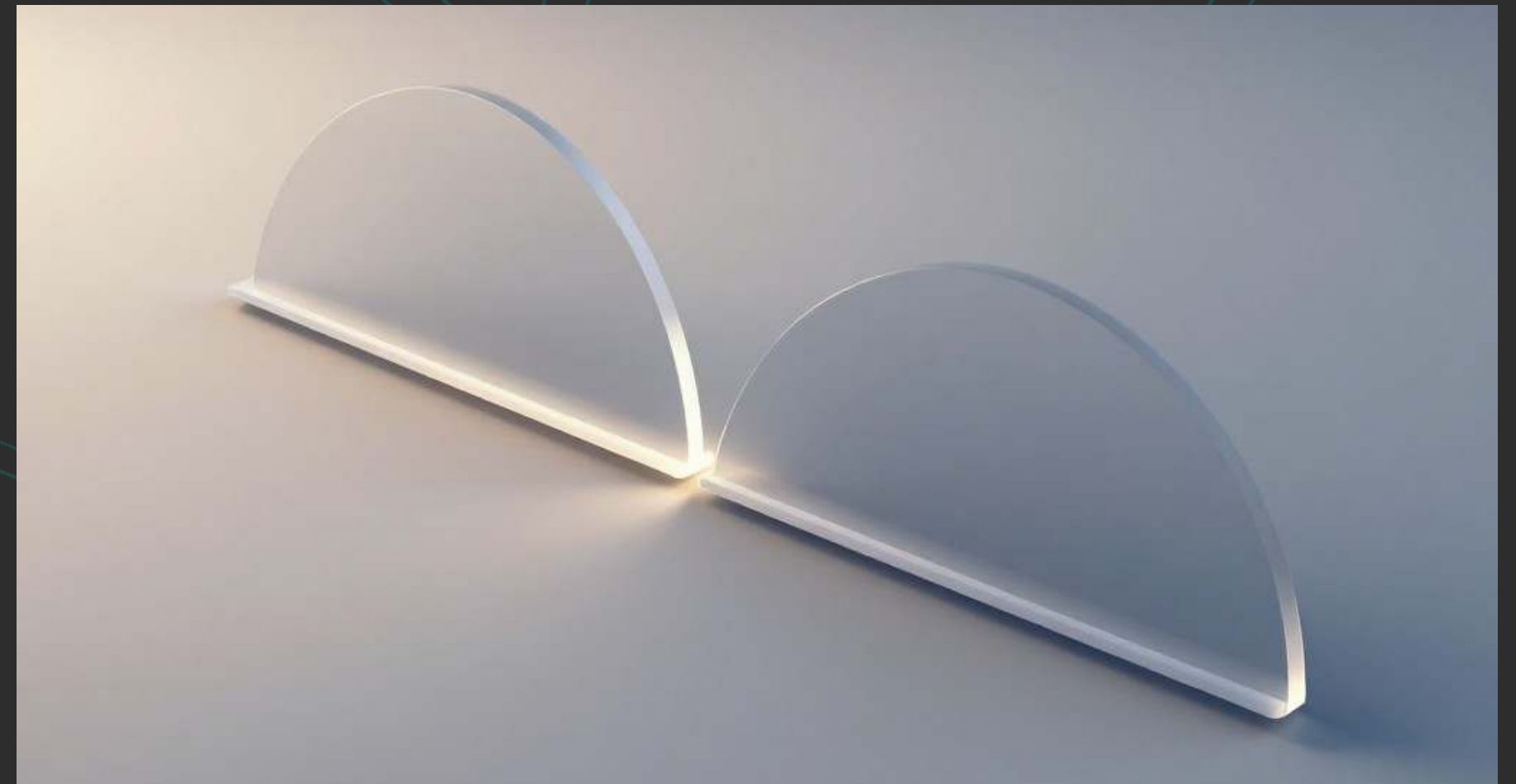
Сжатие до линии

Когда $x+y \leq 2$ и $x+y \geq 2$ записаны вместе, обе полуплоскости «сжимают» ответ к одной и той же границе. В итоге остаются только точки прямой $x+y=2$, без площади внутри.



Общая граница

Такой случай легко заметить на чертеже: две закрашенные области совпадают только по общей линии. Всё, что находится выше или ниже неё, уже не удовлетворяет хотя бы одному условию.



Пример 5: строгий и нестрогий знаки

1. Пунктирная граница

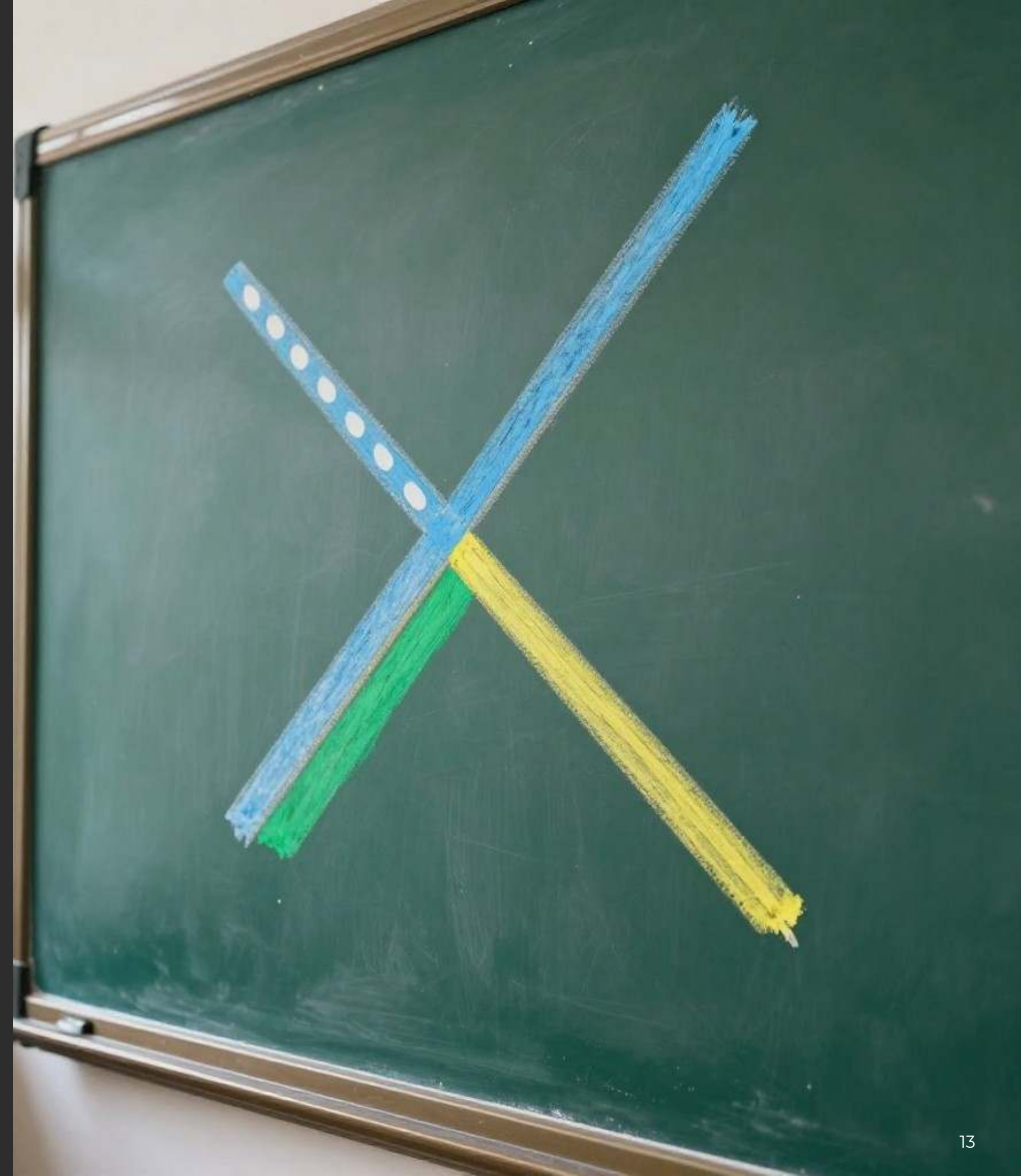
Неравенство $x+2y>4$ задаёт область выше прямой $x+2y=4$. Поскольку знак строгий, сама граница не входит в ответ и на рисунке проводится пунктиром.

2. Сплошная граница

Неравенство $y \leq x-1$ задаёт все точки на прямой $y=x-1$ и ниже неё. Здесь граница входит в решение, поэтому линия рисуется сплошной.

3. Проверка ответа

Общая часть двух полуплоскостей — это область, где выполняются оба условия сразу. Проверка точки $(3; 1)$ подтверждает решение, а точка $(1; 1)$ показывает, что одна из границ выбрана неверно.



Вертикальные и горизонтальные границы

1. Вертикальная линия

Если в неравенстве отсутствует y , получается вертикальная граница, например $x=2$ или $x>0$. Такая прямая делит плоскость на левую и правую полуплоскости.

2. Горизонтальная линия

Если в неравенстве отсутствует x , появляется горизонтальная граница, например $y=-1$ или $y\leq 3$. Она делит плоскость на верхнюю и нижнюю части.

3. Выбор типа линии

Сначала строят саму прямую, затем проверяют, входит ли она в ответ. Сплошная линия соответствует нестрогим знакам, пунктирная — строгим.

4. Проверка стороны

После этого подставляют проверочную точку и отмечают нужную сторону. Так даже самые простые границы становятся понятными и быстро приводят к ответу.

Типичные ошибки

В таблице собраны самые частые промахи при решении систем неравенств. Они помогают заранее проверить чертёж, знак неравенства и форму записи ответа.

Главное — не путать знак, тип границы и саму область решения: каждый элемент влияет на итог.

Ошибка	Что неверно	Как исправить
Сторона	Не та полуплоскость	Проверить точкой
Линия	Пунктир/сплошная	Сверить знак
Ответ	Только прямая	Искать область

Типичные ошибки при построении и чтении систем неравенств на плоскости.

Мини-практика



Первое задание

Постройте границы для $x + y \geq 3$ и $x \geq 0$, а затем отметьте стороны, где выполняются оба условия. Ищите общую область справа от оси y и выше наклонной прямой.



Тип линии

Проверяйте, входит ли граница в ответ: для нестрогих знаков она остаётся на рисунке, для строгих — нет. Это сразу помогает выбрать правильный тип линии.



Второе задание

Во втором примере сначала изобразите прямую $y = -x + 2$, затем горизонталь $y = -1$. После этого выберите нужные полуплоскости и найдите их пересечение.



Самопроверка

После построения полезно отметить одну точку в каждой предполагаемой области. Такая короткая проверка показывает, действительно ли обе записи системы выполняются одновременно.

Разбор мини-практики

1.

1. Первое пересечение

В первом задании прямая $x+y=3$ задаёт наклонную границу, а неравенство $x \geq 0$ — правую сторону от оси y . Совместное выполнение условий оставляет область в правой верхней части плоскости.

2.

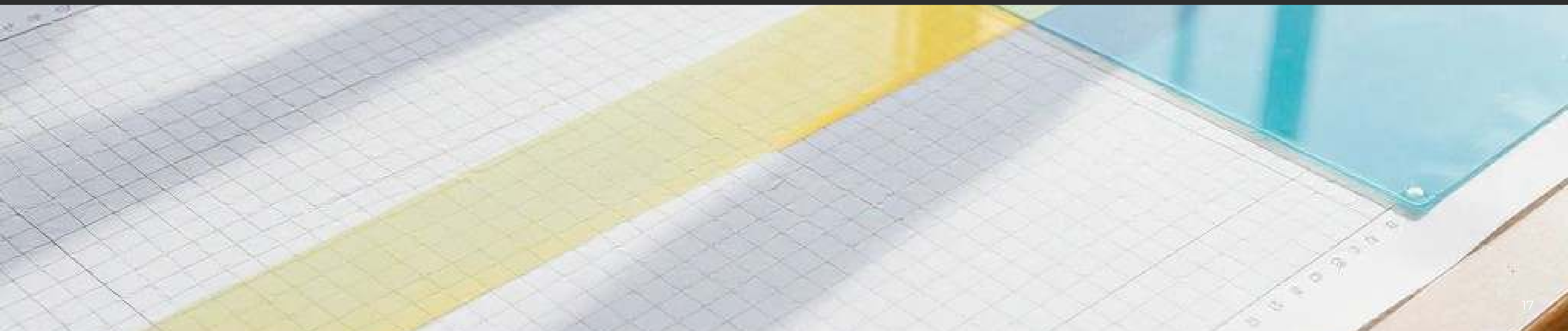
2. Вторая полоса

Во втором задании $y < -x+2$ даёт область ниже наклонной прямой, а $y \geq -1$ — всё, что лежит на горизонтали и выше неё. Вместе они образуют суженную полосу между двумя границами.

3.

3. Итоговая область

Общий ответ строится только там, где обе области совпадают. Поэтому сначала ищут каждую полуплоскость отдельно, а потом отмечают их общую часть как решение всей системы.



Что помогает не ошибиться

Форма области

Если прямые пересекаются, ответ часто имеет форму угла или многоугольника. Когда они параллельны, остаётся полоса либо пустое множество, поэтому важно сразу смотреть на взаимное расположение линий.

Быстрая проверка

Проверочная точка помогает не гадать, а точно выбрать нужную сторону. Достаточно подставить простые координаты, если точка не лежит на границе, и сравнить получившийся знак.

Вид границы

Полезно отдельно следить за видом линии: сплошная означает, что граница входит в решение, а пунктирная — что не входит. Эта мелочь часто решает исход всего построения.

Короткий алгоритм в конце

Последовательность решения на координатной плоскости: от границ к общей области.



Итог: область вместо линии

Системы неравенств с двумя переменными всегда читаются как описание области на плоскости. Если помнить про границу, сторону и пересечение, решение становится понятным даже в более сложных примерах.

