

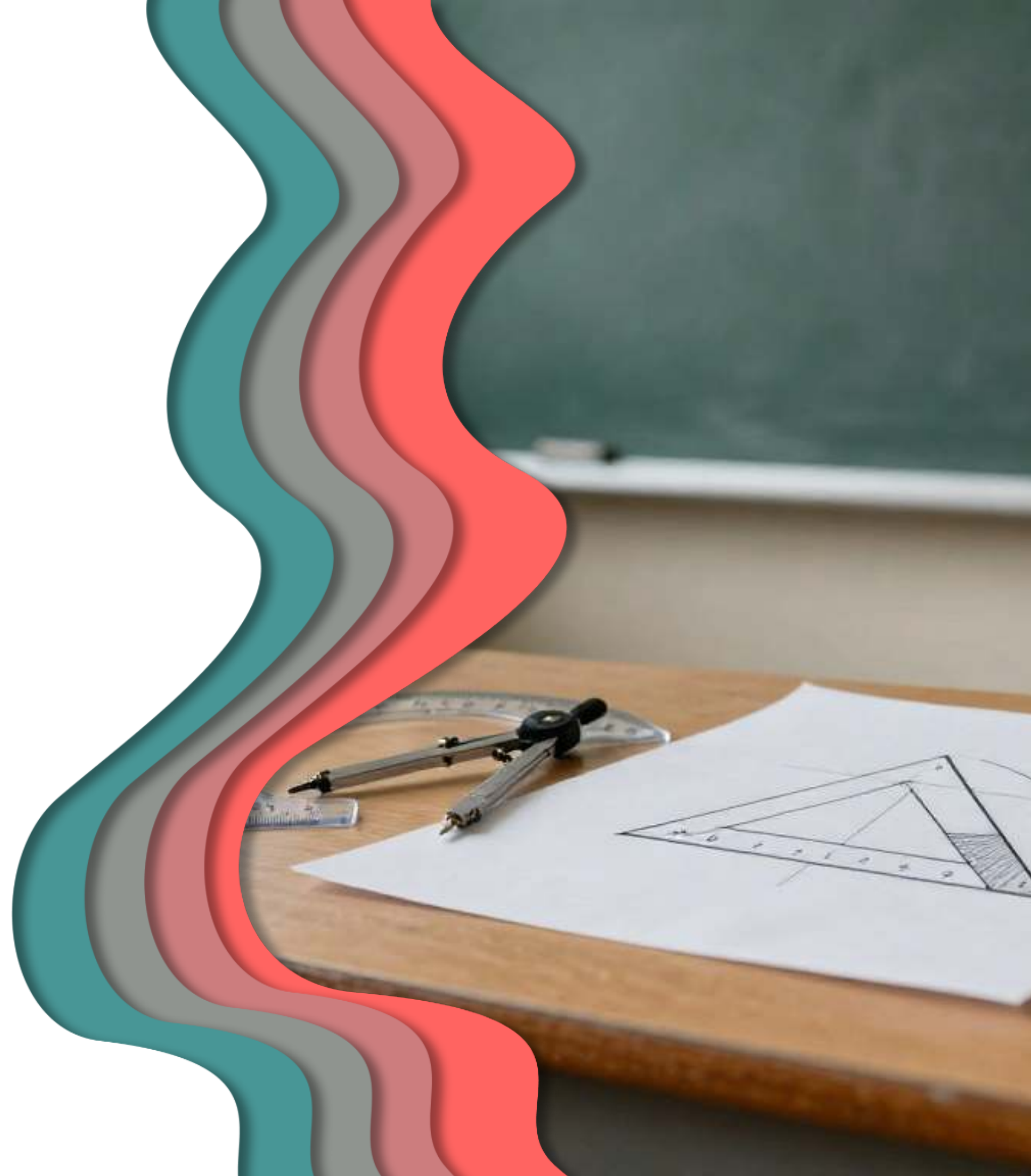
Теорема косинусов: как находить стороны и углы любого треугольника

Формула для любого треугольника: стороны
и углы связаны точно.



Зачем нужна теорема косинусов в 8 классе

Во многих задачах треугольник не бывает прямоугольным, поэтому одной теоремы Пифагора недостаточно. Теорема косинусов помогает находить и стороны, и углы в любых треугольниках, если известны нужные данные.



Для треугольника ABC есть три равносильные записи, и это удобно при решении задач.

Школьный курс геометрии, 8 класс

3

формулы позволяют работать с любой стороной треугольника.

Обозначения сторон и углов в треугольнике

Сторона и противоположный угол

Сторона a всегда лежит напротив угла A , сторона b — напротив угла B , а сторона c — напротив угла C . Это правило помогает не перепутать буквы в формуле.

Где расположен угол

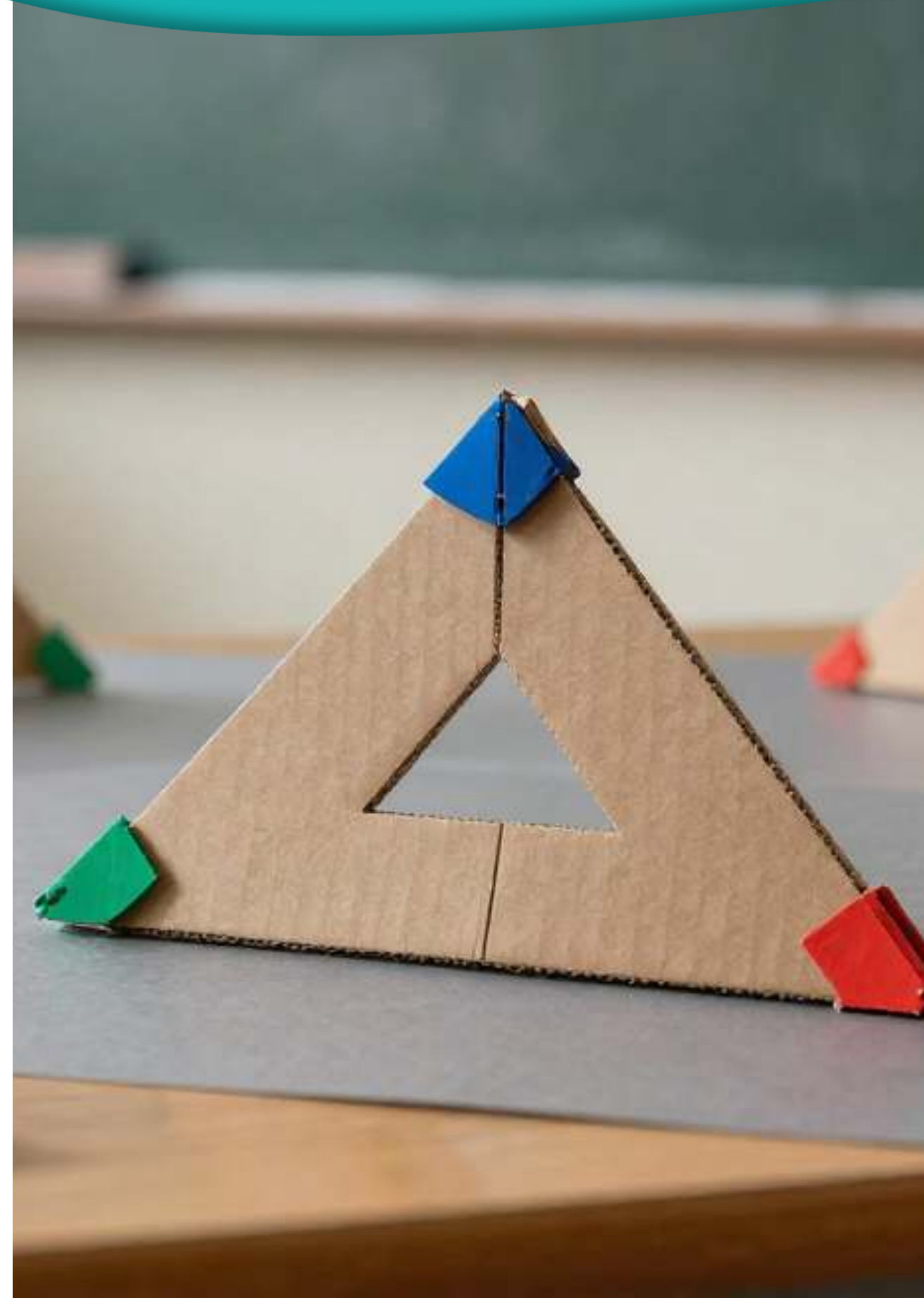
Угол A находится между сторонами b и c , угол B — между a и c , а угол C — между a и b . Именно эти две стороны входят в запись формулы вместе с выбранным углом.

Почему важна схема

Если перед решением внимательно посмотреть на рисунок, становится проще выбрать нужную формулу и избежать ошибки в подстановке. Особенно это полезно в задачах с несколькими похожими обозначениями.

Что проверять сначала

Перед вычислениями нужно определить, какая сторона неизвестна и какой угол связан с ней напрямую. Тогда решение идёт по понятному пути, без лишних проб и исправлений.

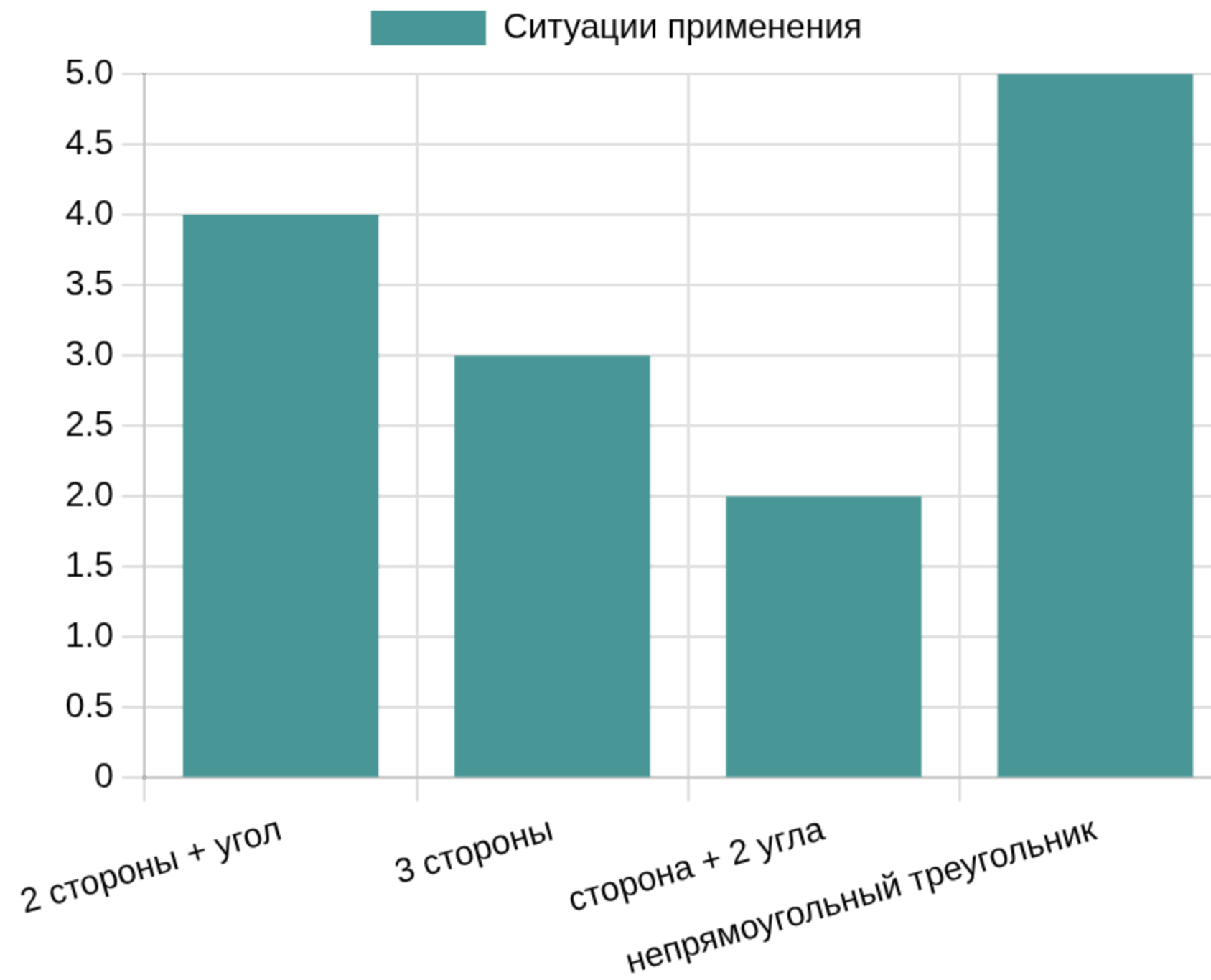


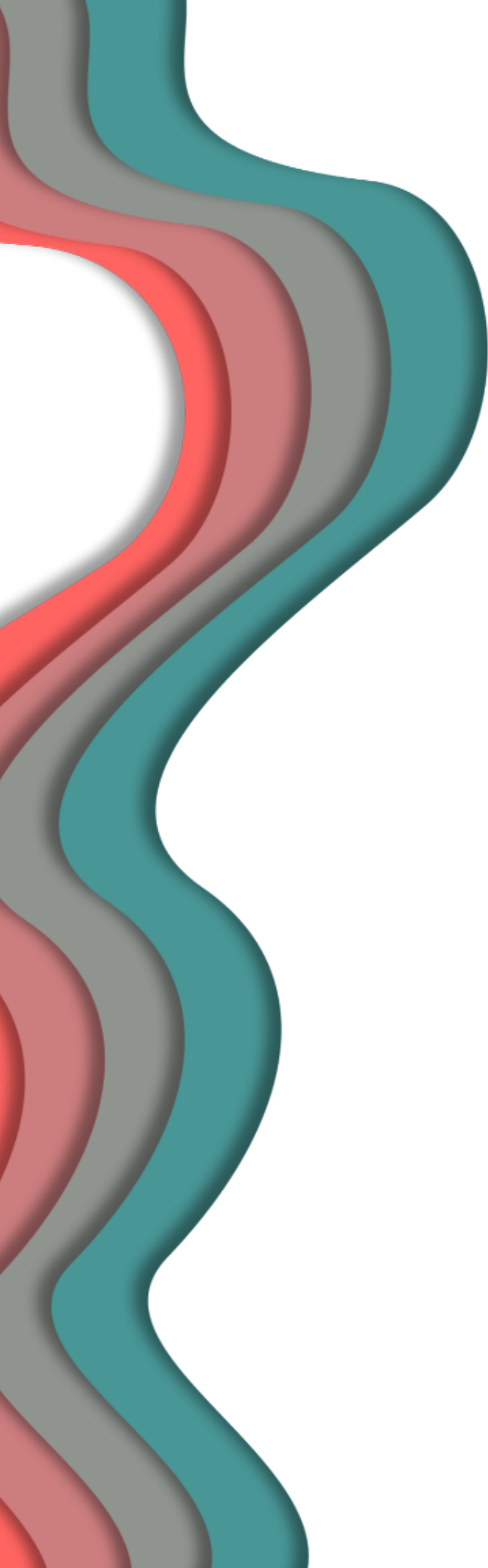
Когда теорема косинусов применяется чаще всего

Эта схема показывает, в каких задачах формула особенно удобна и почему её выбирают вместо других способов.

Чаще всего теорема нужна, когда требуется связать стороны и угол в непрямоугольном треугольнике.

Обобщение типовых задач по геометрии, 8 класс





Связь теоремы косинусов с теоремой Пифагора

01

Прямой угол

Если один из углов треугольника равен 90° , то его косинус равен 0. В формуле теоремы косинусов исчезает добавочный член с косинусом, и остаётся привычное равенство для прямоугольного треугольника.

02

Частный случай

Получается, что теорема Пифагора — это не отдельное правило, а частный случай более общей формулы. Поэтому теорема косинусов работает и там, где Пифагор уже не подходит напрямую.

Алгоритм нахождения неизвестной стороны

Последовательность шагов при решении задачи по двум сторонам и углу между ними

Это значение показывает, как угол между сторонами влияет на длину третьей стороны и почему ответ нужно извлекать через корень.

Учебный пример по теме «Теорема косинусов»

67

получается после подстановки чисел
в формулу.

Основные виды задач по теореме косинусов

Таблица помогает быстро выбрать нужную формулу в зависимости от того, что известно в условии.

Главное — сначала определить набор известных данных, а уже потом выбирать формулу и порядок действий.

Типовые задачи школьного курса геометрии

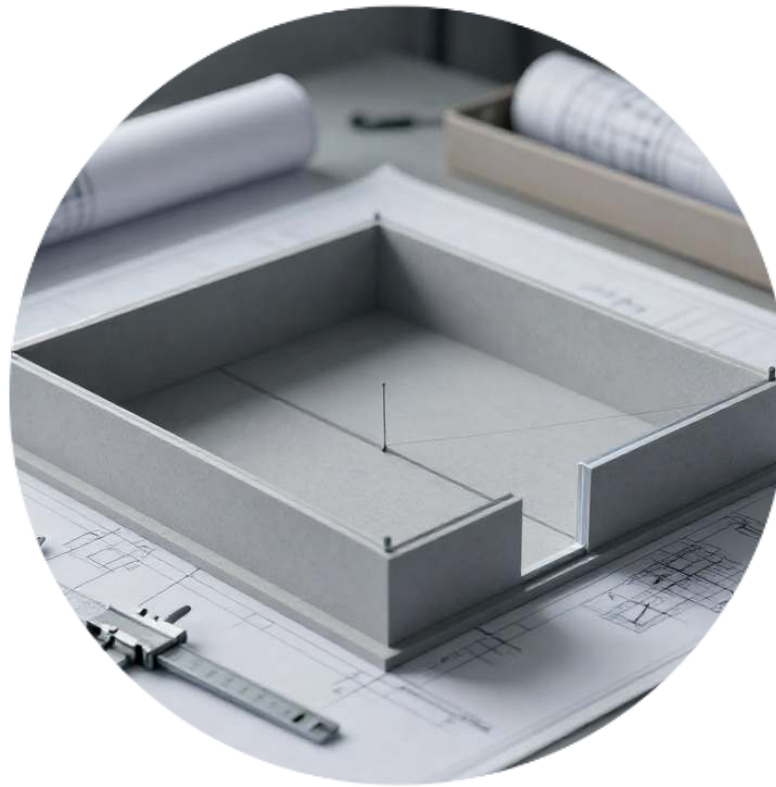
Известно	Найти	Формула
2 стороны, угол	3-ю сторону	для стороны
3 стороны	угол	$\cos A$
сторона, 2 угла	сторону	сначала 3-й угол

Где в жизни встречается эта теорема



На карте и на местности

Если нужно узнать расстояние между двумя точками, до которых трудно измерить путь напрямую, помогают две известные стороны и угол между ними. Так геометрия становится полезной в картографии и при простых измерениях на местности.



В строительных чертежах

На плане здания или участка часто приходится связывать отрезки, которые не образуют прямой угол. Теорема косинусов помогает проверить размеры и понять, совпадает ли расчёт с чертежом, прежде чем что-то строить или размечать.



В навигации и маршрутах

При движении по маршруту иногда нужно оценить сокращённое расстояние между точками, а не длину пути по дорогам. Тогда треугольник на схеме позволяет вычислить нужную величину точно и без лишних измерений.

Как найти угол по трём сторонам

01 Найдите нужную формулу

Если известны все три стороны, сначала выбирают формулу для угла: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Она связывает искомый угол с тремя длинами треугольника.

02 Подставьте значения

Затем аккуратно подставляют числовые данные вместо букв и считают числитель и знаменатель отдельно. Важно не перепутать стороны, стоящие рядом с нужным углом, иначе получится неверный косинус.

03 Переведите косинус в угол

После вычисления значения косинуса угол находят с помощью калькулятора или таблицы тригонометрических значений. Полученный ответ обязательно записывают в градусах и проверяют, что он лежит между 0° и 180° .

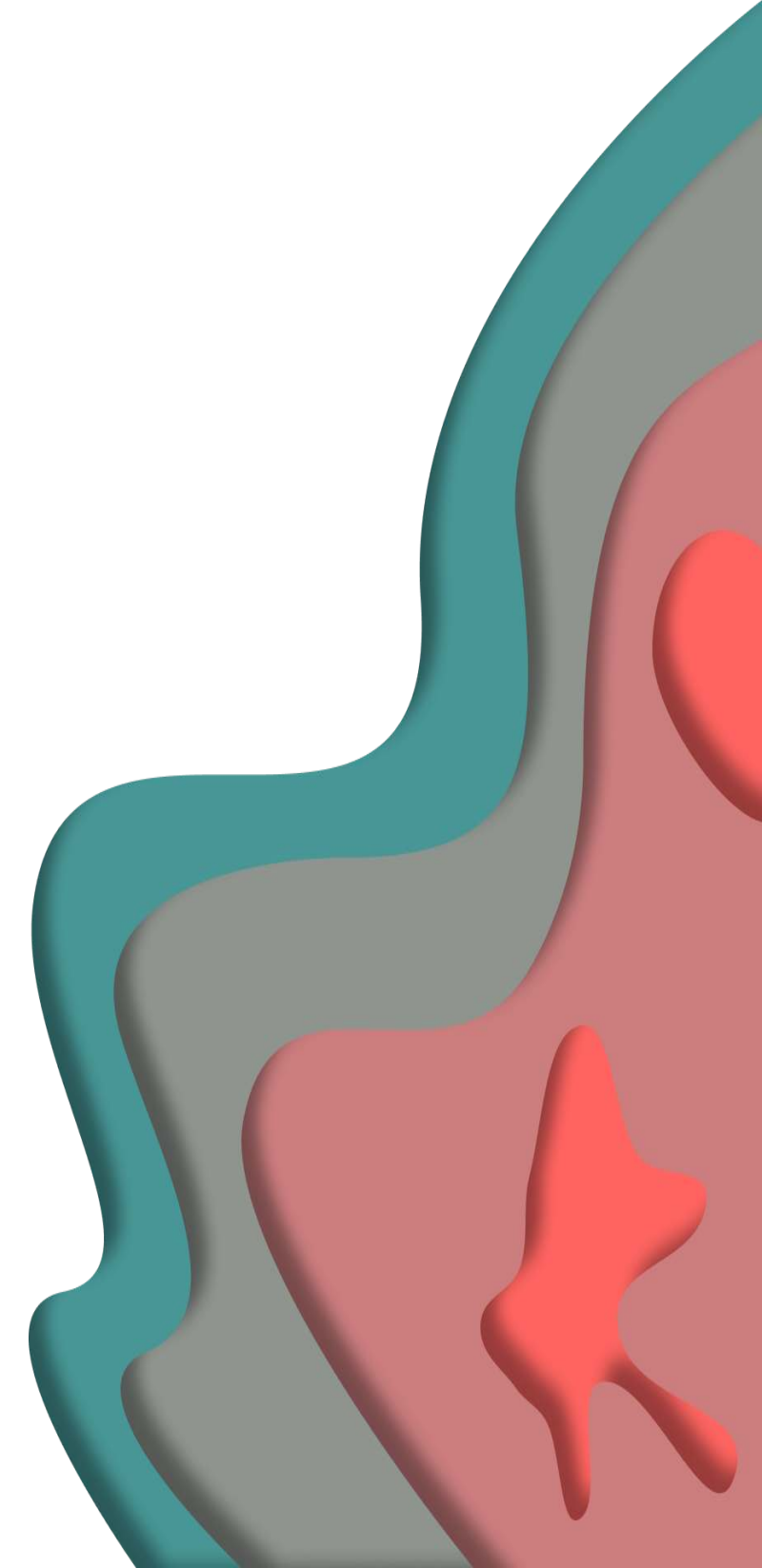
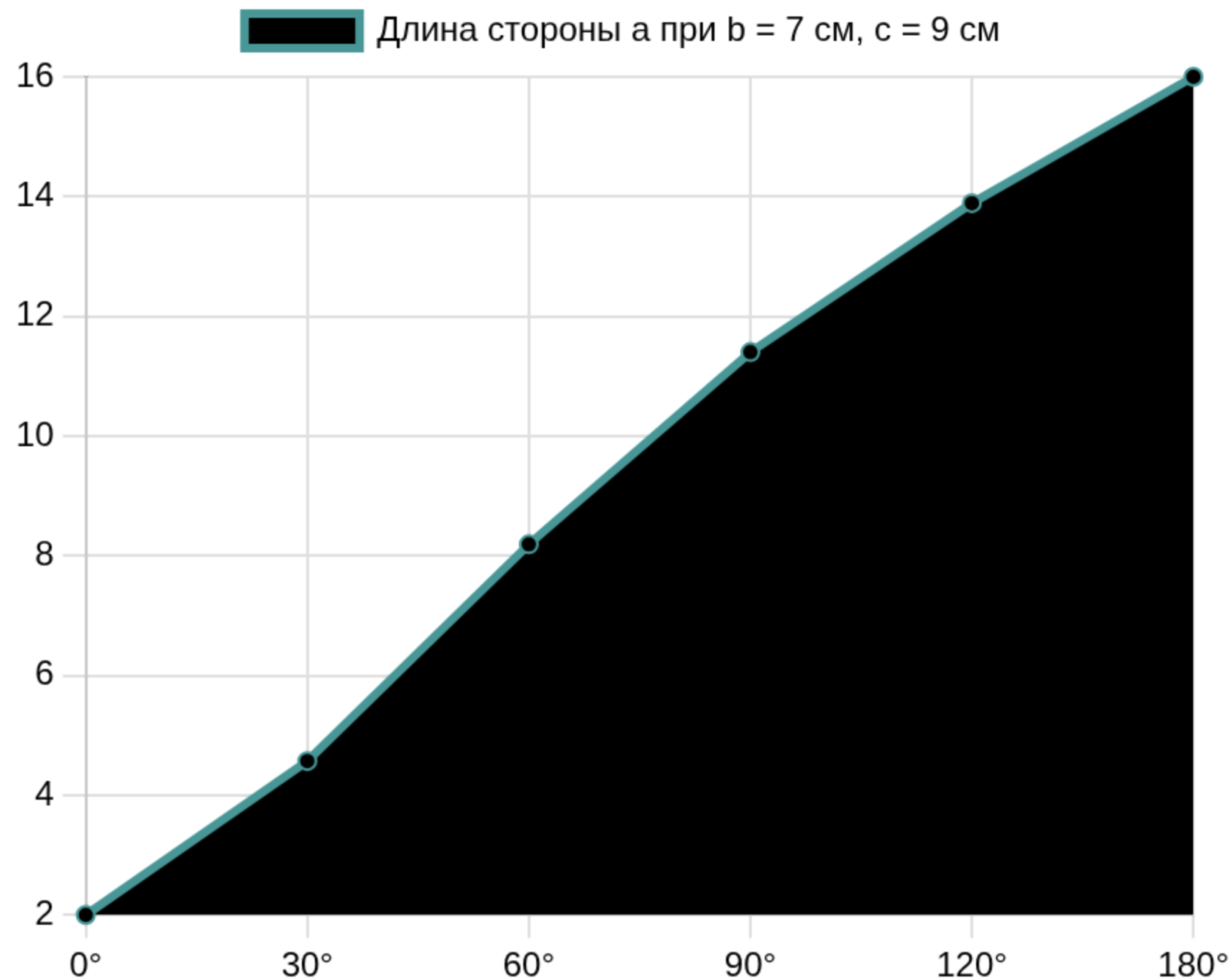


Как меняется сторона при изменении угла

Для одних и тех же сторон треугольника длина третьей стороны зависит только от угла между ними и меняется плавно, без скачков.

Чем больше угол между сторонами, тем длиннее противоположная сторона. Это соответствует уменьшению косинуса при росте угла.

Расчёт по формуле теоремы косинусов при $b = 7$ см и $c = 9$ см; значения вычислены для углов 0° , 30° , 60° , 90° , 120° и 180° .



Типичные ошибки при решении задач

- **Путают стороны и углы**

Частая ошибка — брать не ту сторону напротив нужного угла. Перед вычислениями полезно отметить на рисунке, какая буква соответствует какой вершине, чтобы не перепутать обозначения.

- **Забывают минус в формуле**

В записи теоремы косинусов легко пропустить знак минус перед произведением. Из-за этого значение стороны заметно меняется, поэтому формулу нужно переписывать внимательно и без сокращений.

- **Берут не тот угол**

Иногда в формулу подставляют угол, который не лежит между данными сторонами. Тогда условие задачи не выполняется, и результат перестаёт соответствовать геометрическому смыслу.

- **Слишком рано округляют**

Если округлить косинус или промежуточные вычисления слишком рано, ответ может заметно отличаться. Лучше сохранять больше знаков до самого конца и округлять только итоговый результат.

Теорема косинусов и теорема Пифагора: сравнение

Признак	Пифагора	Косинусов
Вид треугольника	Прямоугольный	Любой
Формула	$c^2 = a^2 + b^2$	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$
Что находит	Сторону	Сторону и угол

Сравнение показывает, чем отличаются две формулы и почему теорема косинусов подходит для более широкого круга задач.

Теорема Пифагора — частный случай теоремы косинусов при угле 90° . Поэтому в не прямоугольных треугольниках используют более общую формулу.

Школьный курс геометрии, 8 класс

Проверка решения задачи по шагам

Последовательность действий при решении задач на теорему косинусов и проверке ответа.

История появления формулы



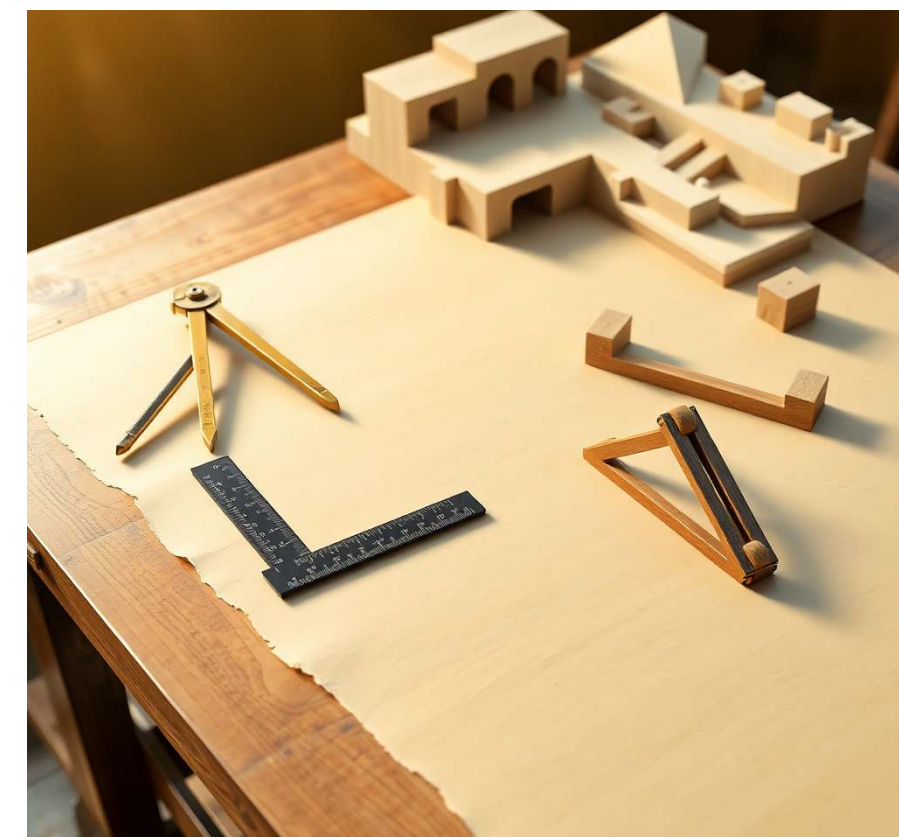
От астрономии к геометрии

Первые идеи, похожие на теорему косинусов, появились в задачах, где нужно было измерять расстояния и углы без прямого доступа к объекту. Особенно часто такие вычисления использовали астрономы, когда работали с положением светил и чертежами неба.



Инструменты землемеров

На практике формула помогала строить карты и проводить измерения на местности. Землемеры использовали углы, длины и чертежи, чтобы находить недоступные отрезки. Рядом с такими записями можно представить линейку, циркуль и старинные измерительные приборы.



Тригонометрия как общий язык

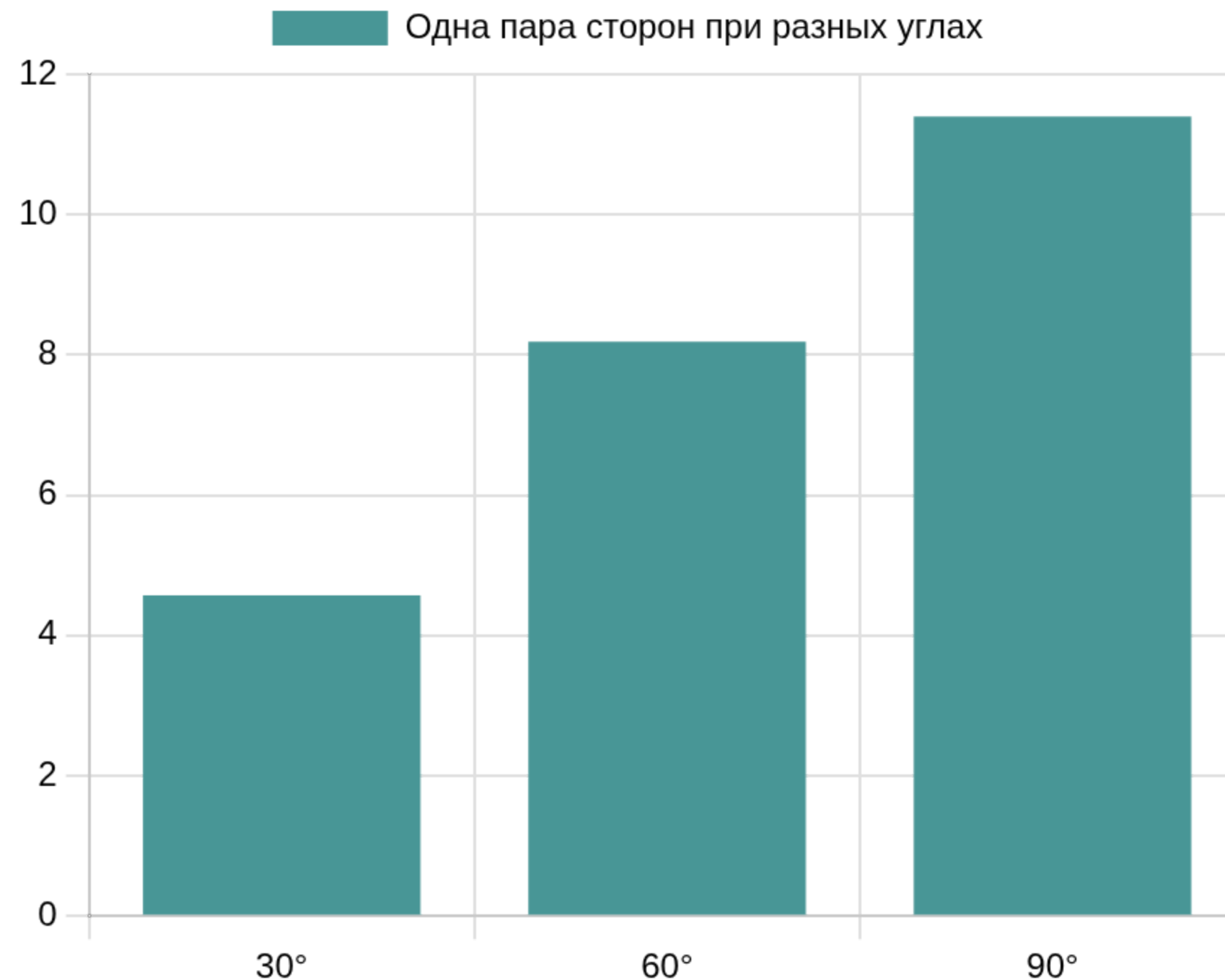
Со временем похожие вычисления были оформлены как часть тригонометрии. Математики разных стран развивали способы описывать треугольники через стороны и углы, поэтому формула стала удобным инструментом для науки, строительства и составления чертежей.

Три примера одного треугольника при разных углах

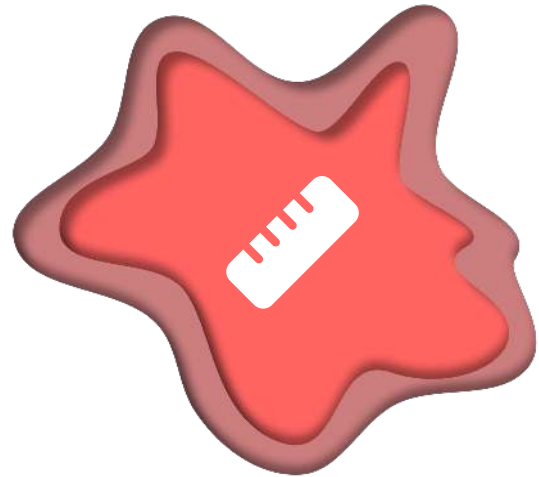
В примере сохранены те же две стороны, меняется только угол между ними, поэтому легко увидеть влияние косинуса на результат.

При увеличении угла противоположная сторона становится длиннее. Данные подтверждают: чем меньше косинус, тем больше итоговая длина.

Расчёт по формуле теоремы косинусов при $b = 7$ см и $c = 9$ см; сравнение для углов 30° , 60° и 90° .

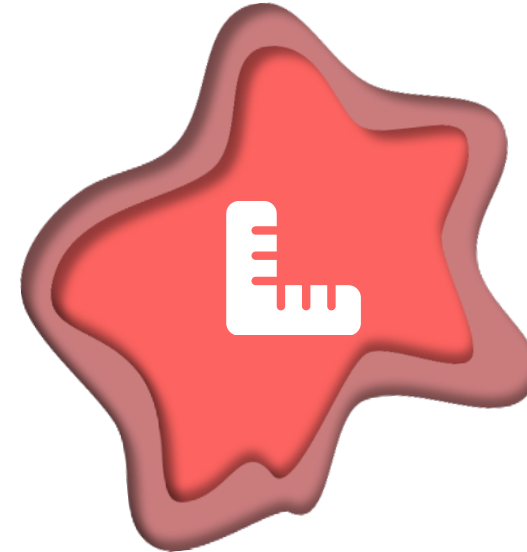


Формулы, которые нужно запомнить



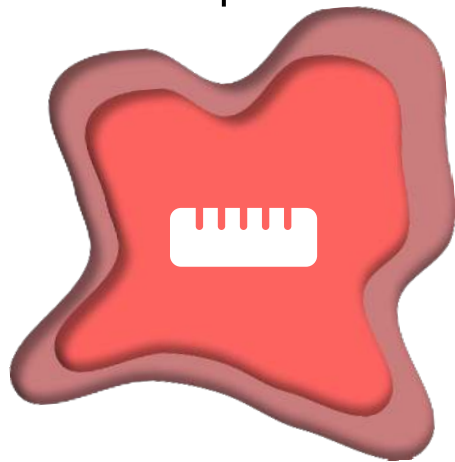
Для стороны a

Если нужна сторона a, используют формулу $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$. Она подходит, когда известны две стороны и угол между ними.



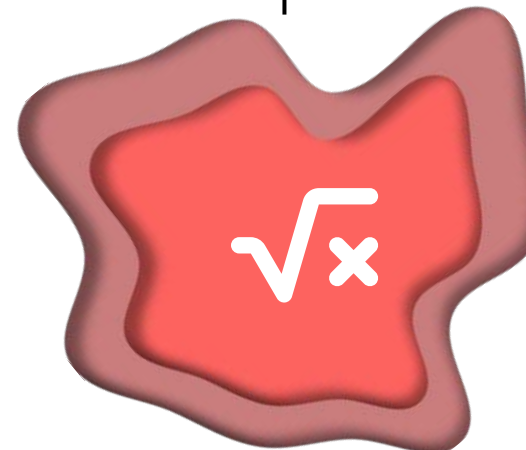
Для стороны b

Аналогично записывают формулу $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B$. Меняются только буквы, но смысл остаётся тем же: выбирают нужную сторону напротив угла.



Для стороны c

Для стороны c применяют выражение $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$. Такая запись помогает решать задачи, где дан другой набор сторон и углов.



Для нахождения угла

Когда известны все стороны, удобно использовать формулу $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2) / 2bc$. После вычисления косинуса находят сам угол по таблице или калькулятору.

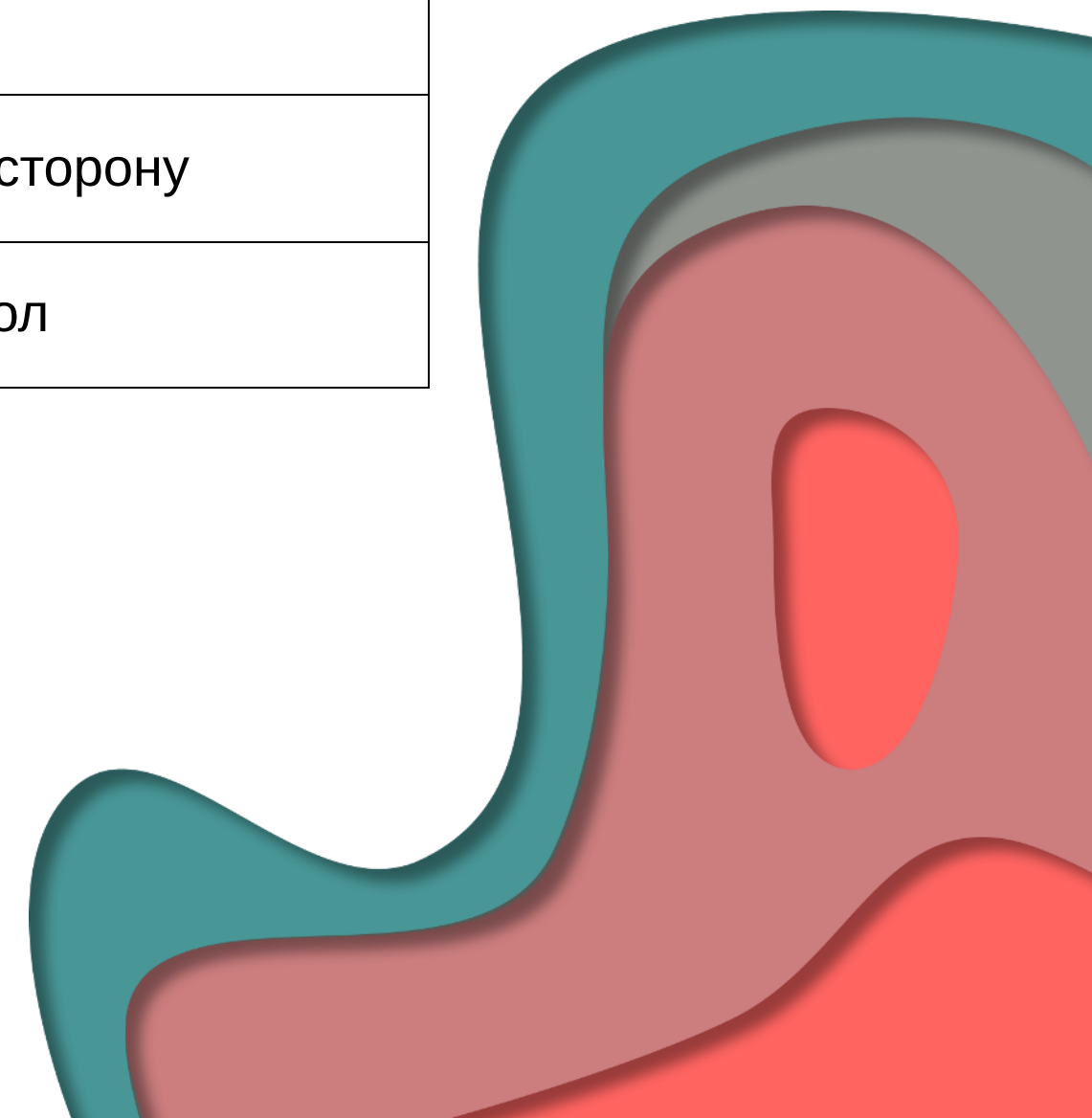
Мини-проверка по теме

Два коротких задания помогут быстро проверить, умеете ли вы применять теорему косинусов для разных типов вопросов.

Первое задание требует найти сторону по двум сторонам и углу между ними, второе — угол по трём сторонам. Формула работает в обе стороны.

Школьные тренировочные задания по теме

Задание	Дано	Найти
1	5 см, 8 см, 120°	Третью сторону
2	6 см, 7 см, 9 см	Один угол



Теорема косинусов помогает видеть треугольник целиком

Эта формула связывает стороны и углы любого треугольника, поэтому позволяет находить неизвестные элементы и проверять построения. Главное — правильно определить, какие данные известны, и выбрать подходящую запись.

