



Преобразования графиков тригонометрических функций

Как из базовых синуса, косинуса, тангенса и котангенса получить новый график без лишних построений.



Преобразования — быстрый способ «прочитать» формулу

Тригонометрические функции описывают периодические процессы и встречаются в математике, физике, информатике и инженерных задачах. Преобразования помогают получать новые графики из базовых, не строя всё с нуля. Для 10 класса это умение напрямую связано с анализом амплитуды, периода и сдвигов.



Базовые графики как основа преобразований

.01

График $y = \sin x$ проходит через начало координат, имеет амплитуду 1 и период 2π . Эти свойства остаются «эталон», относительно которого мы будем применять преобразования и переносить их смысл на другие функции.

.02

График $y = \cos x$ также имеет амплитуду 1 и период 2π , но в точке $x = 0$ принимает значение 1. Тем самым смещение и фазовый сдвиг легко читаются по положению относительно оси Oy .

.03

Графики $y = \tan x$ и $y = \cot x$ имеют период π . Они не ограничены сверху и снизу: при приближении к определённым точкам значения растут по модулю, поэтому привычных максимумов и минимумов нет.

.04

Для $\tan$ и $\cot$ характерны вертикальные асимптоты. Именно они задают «разрывы» графика и определяют, как повторяются ветви функции при переходе к следующему промежутку.

Параметры формулы и их влияние на график

Параметры a , b , c , d управляют размером, ориентацией и положением графика. В результате по одной формуле становится возможным предсказать ключевые характеристики.

Понимание роли каждого параметра сводит задачу к последовательной «настройке» графика: сначала форма и масштаб, затем сдвиг, затем ориентация по знаку.

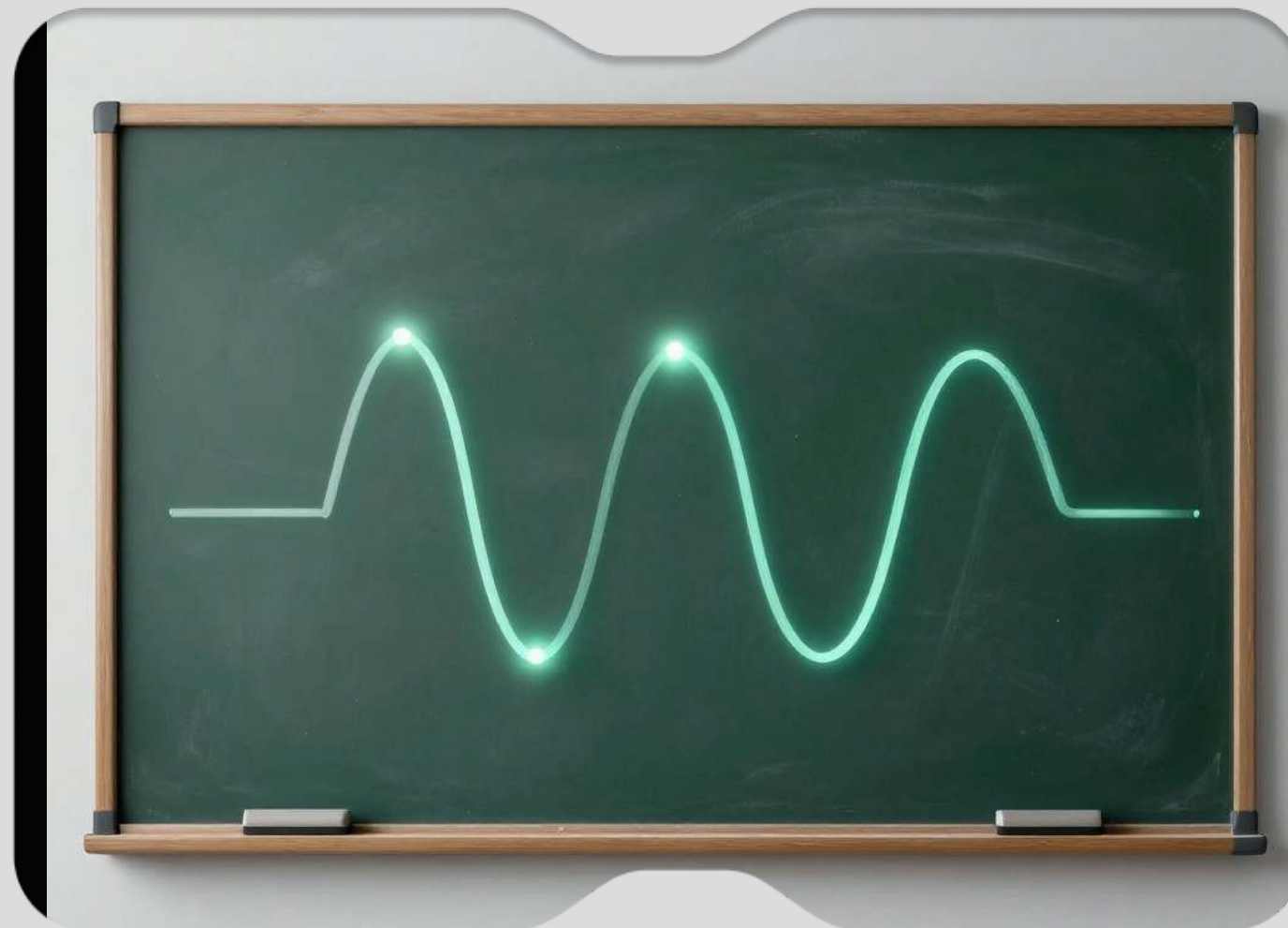
Параметр	Вид преобразования	Результат для графика
a	Вертикальное растяжение/сжатие и отражение	Меняет высоту и знак
b	Горизонтальное растяжение/сжатие	Меняет частоту повторения
c	Сдвиг по оси Ox	Смещение вдоль оси x
d	Сдвиг по оси Oy	Смещение вдоль оси y

Учебный материал по теме преобразований графиков тригонометрических функций (школьный курс, 10 класс).

Горизонтальный сдвиг графика



В записи $y = f(x - c)$ график смещается вправо на c , а в записи $y = f(x + c)$ — влево на c . Форма сохраняется: меняется лишь горизонтальное положение всех точек, включая нули и экстремумы.



Например, для $y = \sin(x - \pi/2)$ нули, максимумы и минимумы оказываются на $\pi/2$ правее, чем у базовой $\sin x$. Смысл сдвига — изменение фазы, а не амплитуды и не периода.

Влияние коэффициента a на амплитуду

При $y = a \cdot \sin x$ амплитуда равна $|a|$, а период сохраняется равным 2π — меняется только «высота» колебаний.

Коэффициент a управляет вертикальным масштабом: при $|a|$ увеличивается размах, при уменьшении — сокращается, а повторяемость по x остаётся той же.

Вычисления по формуле $y = a \cdot \sin x$ (базовые свойства синуса).

Отражение относительно осей координат

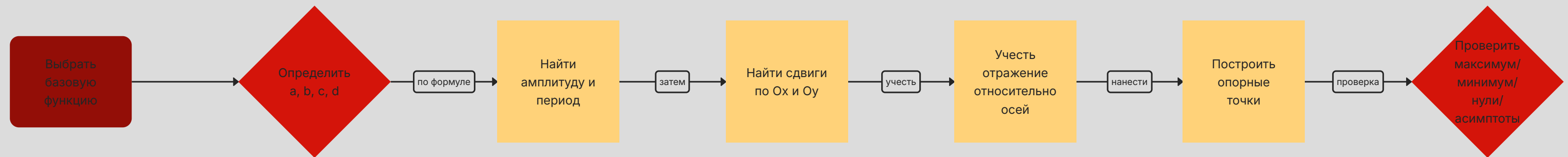
● Если $a < 0$, то график $y = a \cdot f(x)$ получается отражением относительно оси Ox . То есть все значения функции меняются на противоположные: «верх» становится «низом» при сохранении x .

● Замена x на $-x$ в выражении $y = f(-x)$ соответствует отражению относительно оси Oy . Для четных функций это не меняет график, а для нечетных — переставляет его симметрично и меняет знак значений.

● У $\cos x$ функция четная: $\cos(-x) = \cos x$, поэтому отражение относительно Oy оставляет график без изменений. У $\sin x$ функция нечетная: $\sin(-x) = -\sin x$, значит отражение меняет расположение относительно оси Oy .

Алгоритм построения преобразованного графика

Порядок действий помогает избежать типичных ошибок при чтении параметров a , b , c , d .



Как меняется период при коэффициенте b

.01

Для функций $y = \sin(bx)$ и $y = \cos(bx)$ период равен $2\pi/|b|$. Значение $|b|$ напрямую определяет, как часто повторяется рисунок по оси x .

• .02

Для $y = \operatorname{tg}(bx)$ и $y = \operatorname{ctg}(bx)$ период равен $\pi/|b|$. Здесь частота повторения также зависит только от величины $|b|$, но меняется характерная сетка разрывов и асимптот.

• .03

Если $|b|$ увеличивается, график «сжимается» по оси Ox : он укладывает больше колебаний на том же промежутке. При уменьшении $|b|$ — происходит растяжение, а основная форма ветвей сохраняется.

Сравнение нескольких преобразований синуса

Функция	Амплитуда	Период	Сдвиг
$y = \sin x$	1	2π	нет
$y = 2\sin x$	2	2π	нет
$y = \sin(2x)$	1	π	нет
$y = \sin(x - \pi/2) + 1$	1	2π	вправо на $\pi/2$, вверх на 1

Сопоставление показывает, как амплитуда, период и сдвиг меняются при изменении коэффициентов и аргумента.

Разные параметры отвечают за разные эффекты: a меняет амплитуду, b — период, c задаёт сдвиг по x , а d — перенос по y без изменения периода и амплитуды.

Свойства преобразований графиков $y = a \cdot \sin x$ и $y = \sin(x - c) + d$.

Вертикальный сдвиг графика



В формуле $y = f(x) + d$ весь график смещается по вертикали: при $d > 0$ он поднимается, при $d < 0$ — опускается. Для $y = \sin x + 1$ средняя линия становится $y = 1$.



При вертикальном сдвиге амплитуда и период не меняются: сохраняются размах и частота колебаний. Меняются лишь значения по высоте — каждая точка графика получает одно и то же приращение d .

Сравнение периодов при изменении b

Вычислено по школьным формулам периода тригонометрических функций ($\sin$, $\cos$, $\tan$) на основе параметра b , без дополнительных исходных данных.

На графике видно, что коэффициент b управляет частотой повторения: период сжимается при $|b| > 1$ и растягивается при $|b| < 1$.

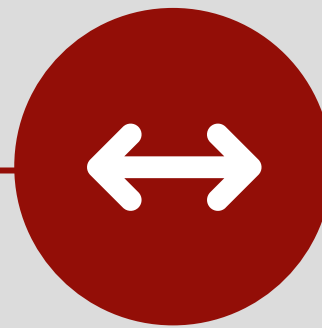
Сравнение для синуса и тангенса подтверждает формулы: $T(\sin, \cos) = 2\pi/|b|$, а $T(\tan, \cot) = \pi/|b|$. Значит, форма сохраняется, меняется только масштаб по оси Ox .

Особенности преобразований графика тангенса



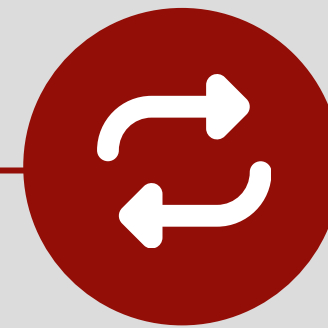
Вертикальные асимптоты

У функции $y = \operatorname{tg} x$ вертикальные асимптоты задаются уравнениями $x = \pi/2 + k\pi$, где $k \in \mathbb{Z}$. Это не «дырки», а линии, к которым график стремится при подходе к ним.



Сдвиг по оси x

Если в аргументе стоит $(x - c)$, то все асимптоты сдвигаются синхронно с графиком на c . Так сохраняется локальное поведение между соседними ветвями тангенса.



Масштабирование множителем b

При замене x на bx асимптоты либо сближаются, либо расходятся, а период становится $\pi/|b|$. При этом у $\tan$ нет максимумов и минимумов: функция неограничена.

Амплитуда и средняя линия у синуса и косинуса

Вычислено из заданных функций $y = \sin x + 2$ и $y = 3\cos x - 1$ по определениям $\max/\min$ и формуле амплитуды $|a|$.

Для $\sin x + 2$ амплитуда равна 1, а средняя линия $y = 2$. Для $3\cos x - 1$ амплитуда равна 3, так как $a = 3$ меняет размах значений.

Диаграмма показывает: средняя линия задаёт «уровень», вокруг которого происходят колебания, а размах определяется модулем коэффициента a . Поэтому сравнение $\max$ и $\min$ сразу раскрывает амплитуду.

Типичные ошибки при преобразовании графиков



Путают знак в сдвиге

Частая ошибка — смешивать записи $f(x - c)$ и $f(x) + c$. Первая меняет положение по оси Ox , а вторую понимают как вертикальный сдвиг по Oy , поэтому направления смещений оказываются перепутанными.



Неверный смысл сдвига по Ox

При чтении формулы неверно выбирают сторону перемещения: в записи $f(x - c)$ график сдвигается вправо на c , а в $f(x + c)$ — влево. В результате опорные точки попадают не в те координаты.



Игнорируют знак коэффициента a

Если коэффициент a отрицательный, отражение относительно оси Ox обязательно учитывают. Без этого легко построить график с правильным периодом и амплитудой, но зеркально неправильной ориентацией.

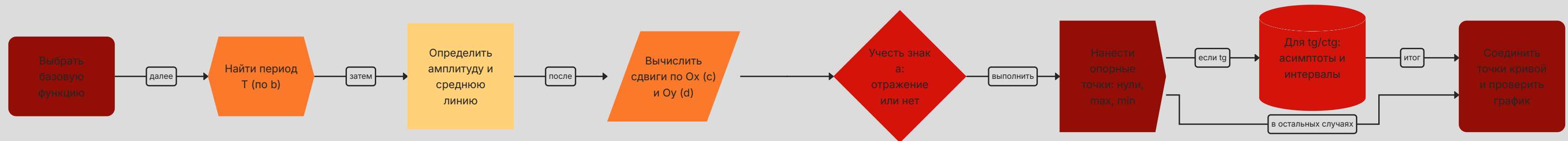


Ошибаются с периодом при $b \neq 1$

При $b \neq 1$ период вычисляют по формулам через модуль $|b|$. Нередко путают, как именно меняется T , особенно при переходе от синуса/косинуса к тангенсу/котангенсу.

Алгоритм построения по опорным точкам

Логическая последовательность для функций вида $y = a \cdot f(b(x - c)) + d$ и для ветвей tg/ctg .



Связь с реальными периодическими процессами



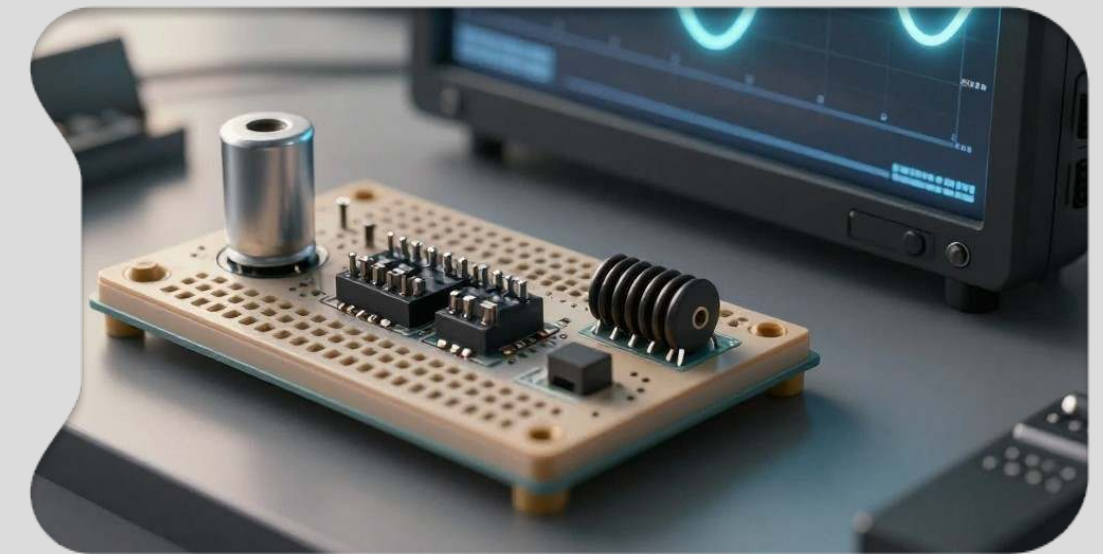
Колебания груза на пружине и маятника

Когда тело колеблется, его смещения во времени повторяются — как у синуса и косинуса. Амплитуда соответствует «силе размаха», период связан с частотой, а сдвиг фазы помогает учесть, в какой момент стартовали колебания. На графике это видно сразу.



Звук как периодический сигнал

В простейших случаях звуковая волна может вести себя как синусоида: значения громкости меняются циклически. По графику легко соотнести высоту сигнала с амплитудой и время повторения с периодом. Смещение по оси x отражает фазу: когда именно начинается цикл.



Электрические сигналы в цепях

Напряжение на некоторых элементах меняется периодически, поэтому его удобно описывать тригонометрическими графиками. Вертикальный сдвиг соответствует постоянной составляющей, а масштаб по оси x — изменению частоты. Даже небольшие преобразования формулы помогают предсказать, как изменится осциллограмма.

Сравнение базовых тригонометрических функций

Логическое обобщение свойств из школьной теории:
периодичность, асимптоты, ограниченность значений,
симметрия и влияние параметров a и b .

Радар здесь упрощён до суммарных признаков: $\sin$ и $\cos$ ограничены и периодичны, а $\tan$ и $\cot$ имеют вертикальные асимптоты и неограниченные значения.

Диаграмма подчёркивает различие: наличие асимптот и неограниченность связаны именно с тангенсом и котангенсом, тогда как синус и косинус в школьном курсе ведут себя «мягко» и остаются в пределах от -1 до 1 .

Пример полного преобразования синуса

В таблице показано, как последовательное применение коэффициента a , сдвига аргумента и вертикального сдвига изменяет характеристики графика: амплитуду, период и положение относительно осей.

Параметры работают согласованно: амплитуда становится 2, по x график сдвигается вправо на $\pi/2$, а вертикальный сдвиг добавляет 1. Период сохраняется равным 2π .

Шаг	Действие	Результат
1	База	$y = \sin x$
2	Умножить на 2	$y = 2\sin x$
3	Сдвиг аргумента вправо на $\pi/2$	$y = 2\sin(x - \pi/2)$
4	Вертикальный сдвиг +1	$y = 2\sin(x - \pi/2) + 1$

Построено на основе заданного набора преобразований из условия примера (без внешних данных).

Преобразования, которые «читаются» по формуле

Преобразования графиков тригонометрических функций задаются параметрами a , b , c , d и позволяют получать новый график из базового. Амплитуда, период, сдвиги и отражения определяют его вид в рамках школьного курса. Эти правила нужны для уравнений, анализа графиков и работы с периодическими явлениями.