

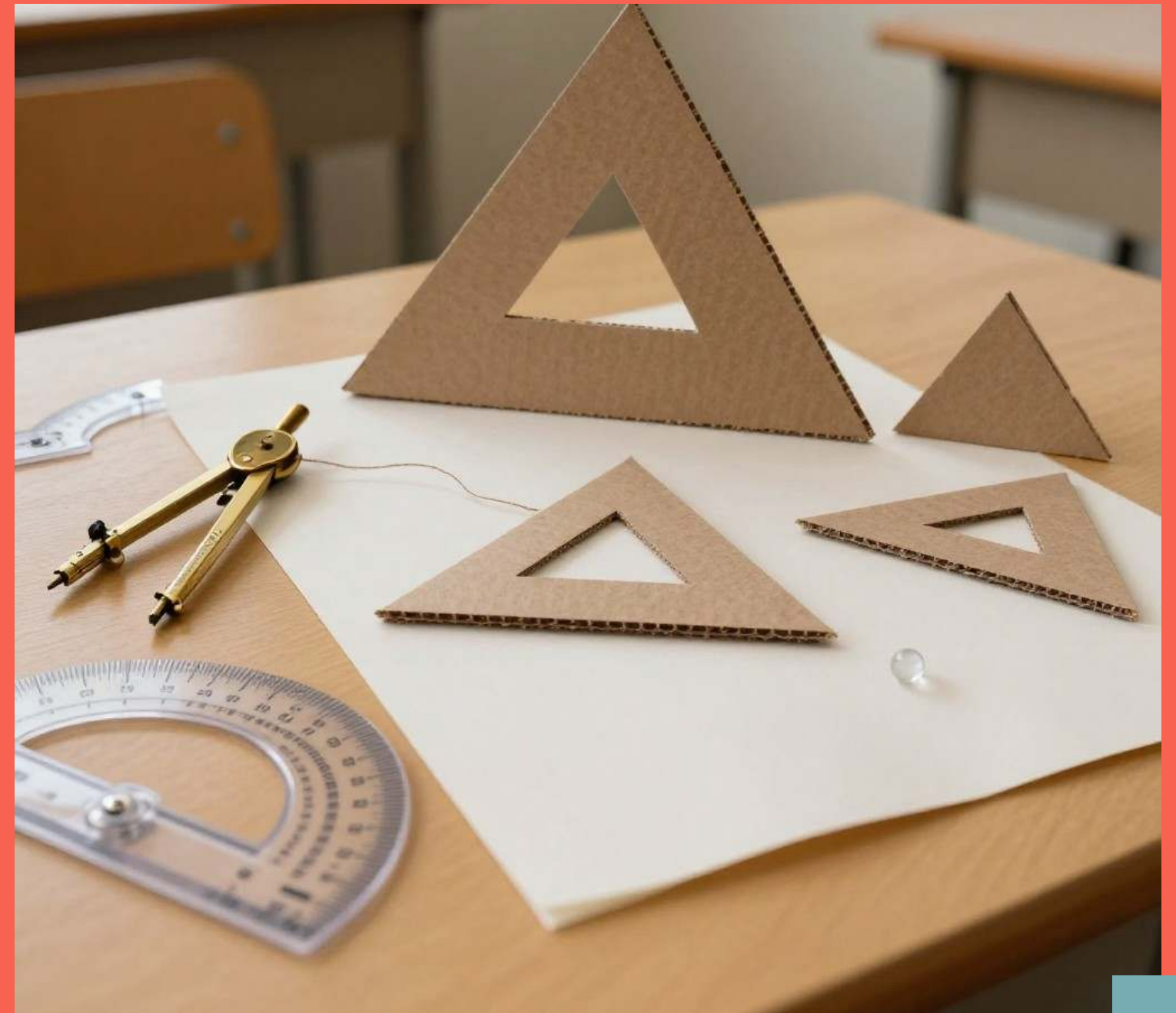
Значения тригонометрических функций некоторых углов

Точные значения для 0° , 30° , 45° , 60° и 90°



Зачем нужны точные значения в геометрии

Точные значения помогают быстро решать задачи о треугольниках, окружности и координатах. Углы 30° , 45° и 60° связаны с простыми построениями, а 0° и 90° показывают крайние случаи функций.



Какие функции рассматриваются и как они определяются

1

Синус

Синус угла в прямоугольном треугольнике показывает отношение противолежащего катета к гипотенузе. Это удобный способ связать угол с длинами сторон и получить значение без измерений наугад.

2

Косинус

Косинус равен отношению прилежащего катета к гипотенузе. Он описывает, насколько «горизонтально» направлена сторона относительно выбранного угла, и часто используется вместе с синусом.

3

Тангенс

Тангенс выражается как отношение синуса к косинусу. Поэтому его удобно находить после того, как уже известны синус и косинус нужного угла, особенно для опорных значений.

4

Котангенс

Котангенс — это отношение косинуса к синусу. Важно помнить об особых случаях: если в знаменателе получается ноль, значение не определено, как для $\tan 90^\circ$ и $\cot 0^\circ$.

Едини́чная окру́жность и координаты точек

— Координаты точки

На единичной окружности каждой величине угла соответствует точка с координатами $(\cos \alpha; \sin \alpha)$. Так геометрия сразу превращается в удобный способ находить точные значения.

— Оси координат

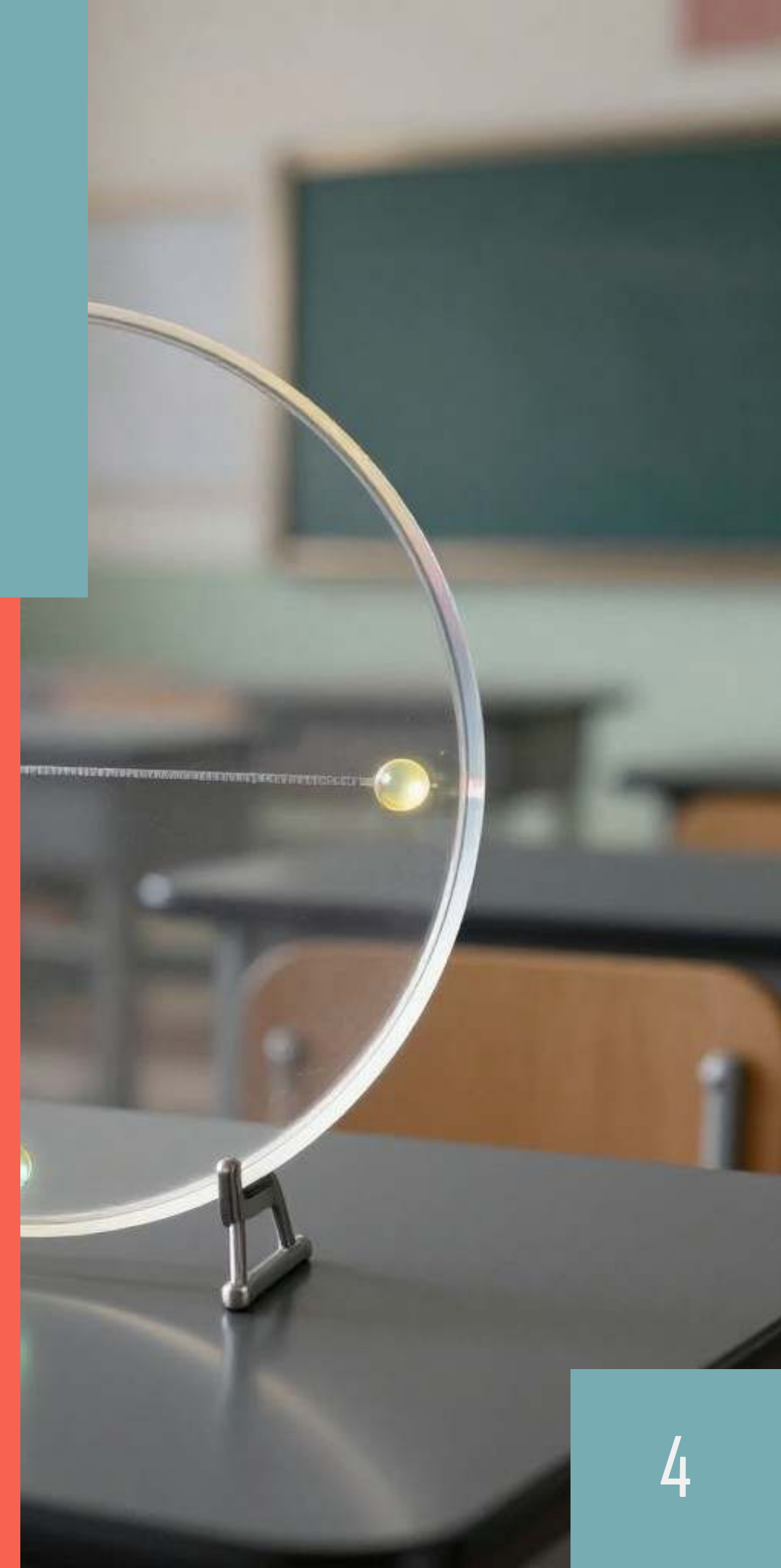
Для углов 0° , 90° , 180° и 270° точки попадают на оси. Поэтому один из координатных показателей равен нулю, а другой принимает значение 1 или -1 .

— Опорные положения

Углы 30° , 45° и 60° занимают характерные места на окружности. Их удобно запоминать через симметрию, потому что значения синуса и косинуса у них связаны.

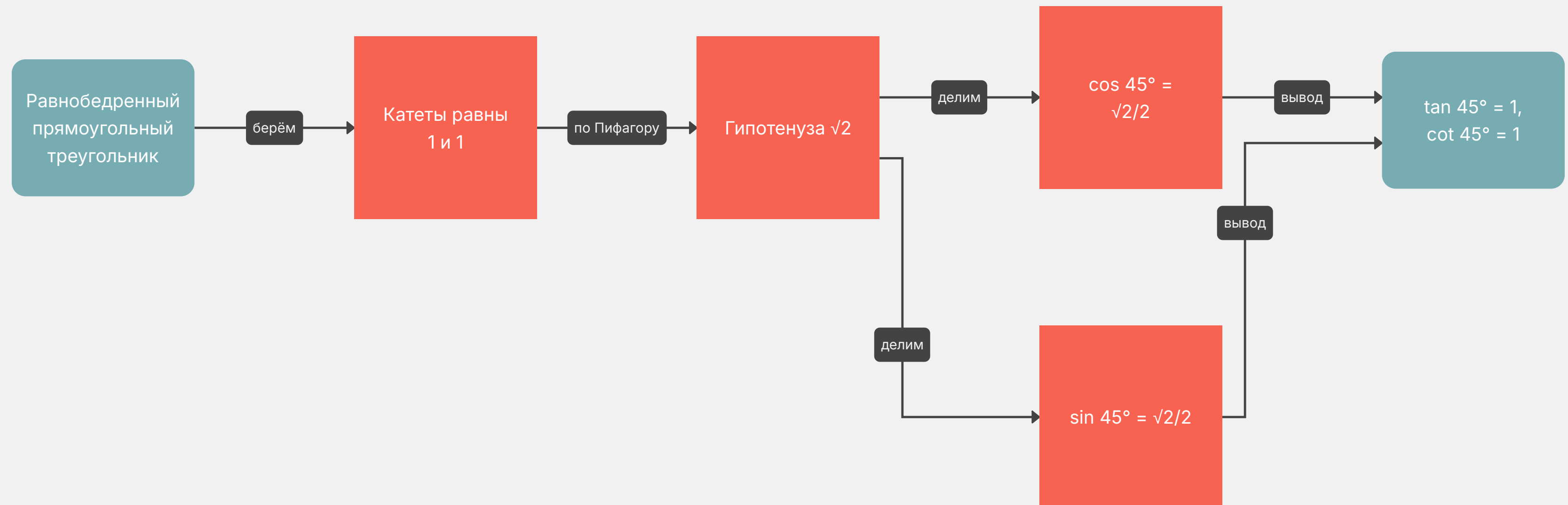
— Связь с таблицей

Едини́чная окру́жность помогает не заучивать таблицу механически. Достаточно понимать, где находится точка, чтобы восстановить нужные значения и проверить правильность ответа.



Как получают значения для угла 45°

Равнобедренный прямоугольный треугольник показывает, почему $\sin$ и $\cos 45^\circ$ одинаковы.



Как получают значения для углов 30° и 60°

Высота равностороннего треугольника делит его на два прямоугольных треугольника.



Точные значения основных углов

Таблица помогает увидеть основные значения сразу и сравнить их между собой.

Достаточно знать три опорных угла, чтобы восстановить всю таблицу и не запутаться в особых случаях.

Школьные определения тригонометрических функций для опорных углов 0° , 30° , 45° , 60° и 90°

Угол	sin	cos	tan	cot
0°	0	1	0	не опр.
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	не опр.	0

Что происходит в первой четверти

В первой четверти синус, косинус, тангенс и котангенс имеют положительный знак. Это делает первые примеры проще и помогает сосредоточиться на самих значениях, а не на знаке.
Все значения положительны



Угол 0° начинается на положительной полуоси Ox , а 90° соответствует направлению вверх по оси Oy . Эти точки удобно использовать как границы для понимания движения по окружности.
Начало и конец дуги



Именно углы первой четверти чаще всего встречаются в школьных задачах на точные значения. Здесь проще всего применять таблицу и связывать её с прямоугольным треугольником.
Основные задания



Если значение найдено верно, оно должно соответствовать положению угла на окружности и известным правилам знаков. Такой быстрый контроль помогает заметить ошибку до сдачи решения.
Проверка ответа

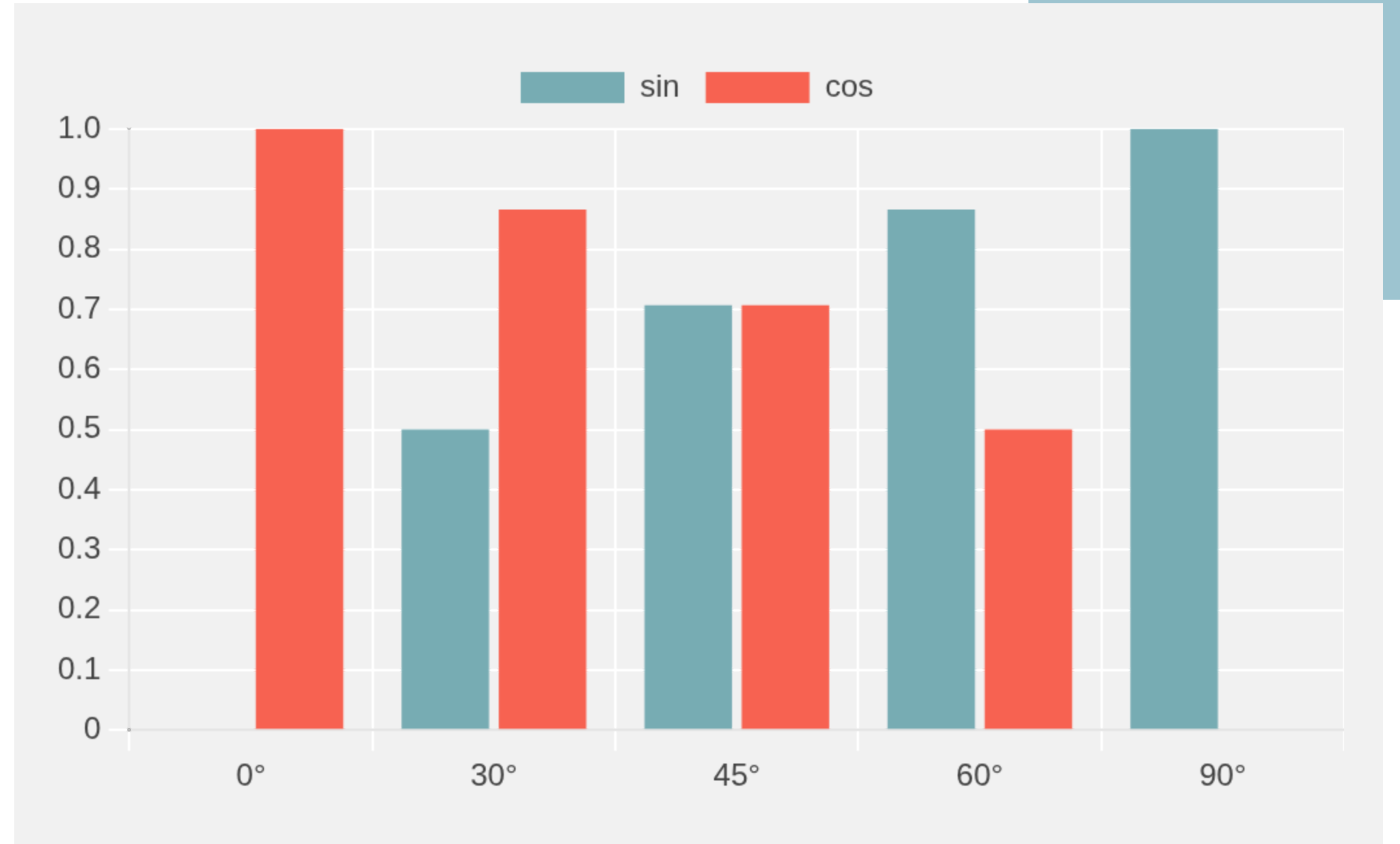


Синус и косинус у опорных углов

Диаграмма показывает, как значения постепенно меняются при переходе от 0° к 90° .

У 45° столбцы равны, а у 30° и 60° они меняются местами. Это удобно для запоминания и самопроверки.

Точные значения синуса и косинуса для углов 0° , 30° , 45° , 60° и 90°



Тангенс и котангенс через синус и косинус

Основные формулы

Тангенс удобно находить как отношение $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$, а котангенс — как $\cos \alpha$ к $\sin \alpha$. Эти формулы связывают новые значения с уже известными синусом и косинусом.

Угол 30°

Для 30° получаем $\tan 30^\circ = \sqrt{3}/3$, а $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$. Эти значения легко проверить, подставив в отношения точные значения синуса и косинуса из таблицы.

Угол 45°

Когда угол равен 45° , синус и косинус одинаковы. Поэтому и $\tan 45^\circ = 1$, и $\cot 45^\circ = 1$ — это самый простой опорный случай.

Угол 60°

Для 60° значения меняются местами по сравнению с 30° . Отсюда $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, а $\cot 60^\circ = \sqrt{3}/3$, что удобно запомнить как зеркальную пару.

Особые случаи

При 90° тангенс не определён, потому что $\cos 90^\circ = 0$. При 0° не определён котангенс, так как $\sin 0^\circ = 0$, и деление на ноль невозможно.

Знаки функций на осях и в четвертях

— Первая четверть

Если угол расположен в первой четверти, то его синус и косинус положительны. Поэтому для опорных углов 30° , 45° и 60° знаки ответов всегда совпадают с ожиданиями из таблицы.

— Ось Ox

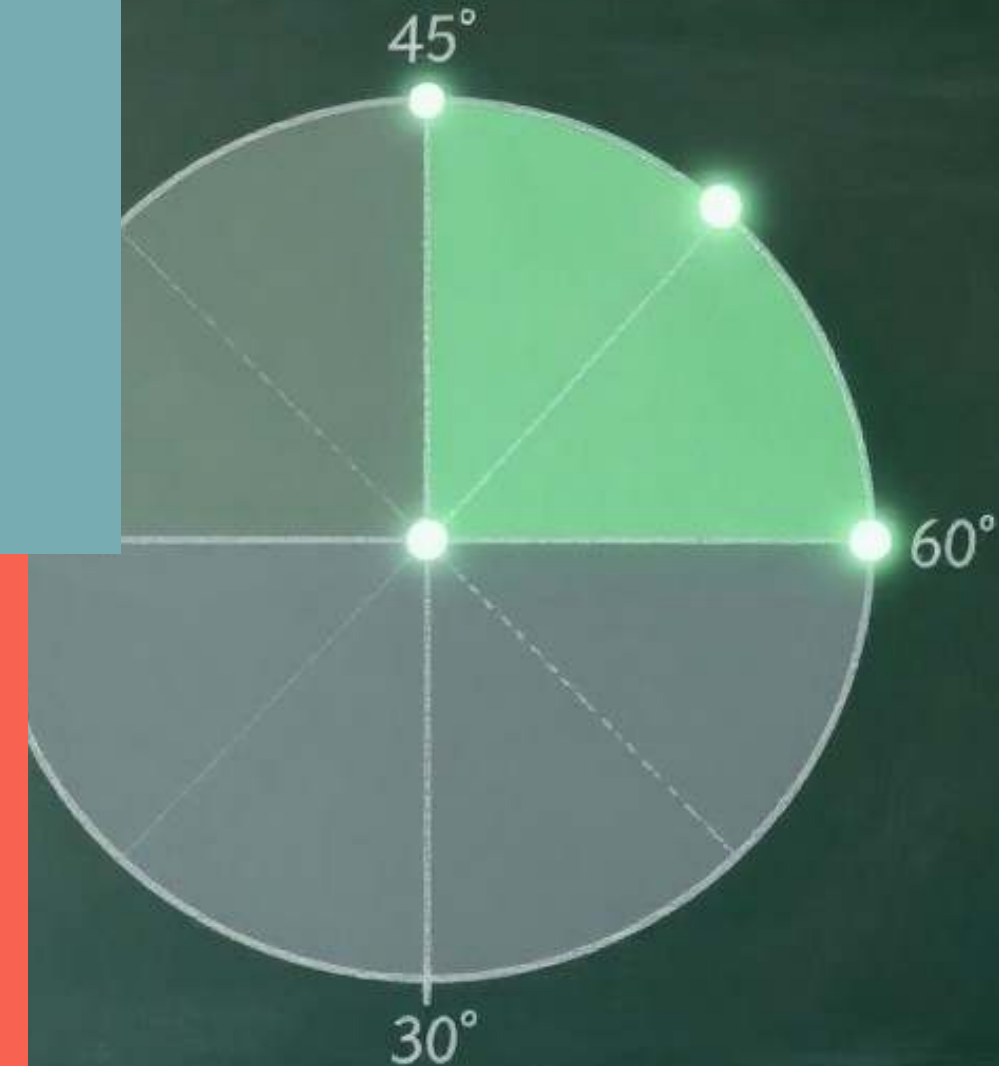
На оси Ox точка имеет нулевую ординату, значит $\sin \alpha = 0$. При этом $\cos \alpha$ принимает значение 1 или -1 , в зависимости от направления отсчёта на окружности.

— Ось Oy

На оси Oy точка имеет нулевую абсциссу, поэтому $\cos \alpha = 0$. В таких случаях синус показывает, насколько далеко точка поднята вверх или опущена вниз.

— Проверка ответа

Знание знаков помогает быстро заметить ошибку: даже верное по величине значение может оказаться неверным по знаку. Это особенно полезно в задачах, где угол выходит за пределы первой четверти.



Как меняются значения при повороте на 90°

При повороте точки по единичной окружности на 90° удобно сравнивать значения синуса, косинуса и тангенса для четырёх основных направлений.

При повороте на 90° синус и косинус как будто меняются местами, а нули и единицы переходят в соседние положения. Тангенс не определяется там, где косинус равен нулю.

Единичная окружность и определения тригонометрических функций

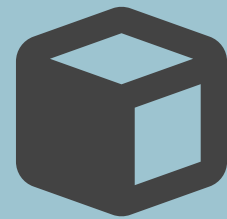
Угол	sin	cos	tan
0°	0	1	0
90°	1	0	не определён
180°	0	-1	0
270°	-1	0	не определён

Связь точных значений с прямоугольными треугольниками



Треугольник 45°

Равнобедренный прямоугольный треугольник даёт самый простой образец для запоминания. Если катеты равны 1, то гипотенуза равна $\sqrt{2}$, а значит синус и косинус одинаковы.



Треугольник 30° и 60°

Если равносторонний треугольник разделить высотой, получаются катеты 1 и $\sqrt{3}$ при гипотенузе 2. Этот шаблон сразу даёт точные значения для обоих острых углов.



Быстрое запоминание

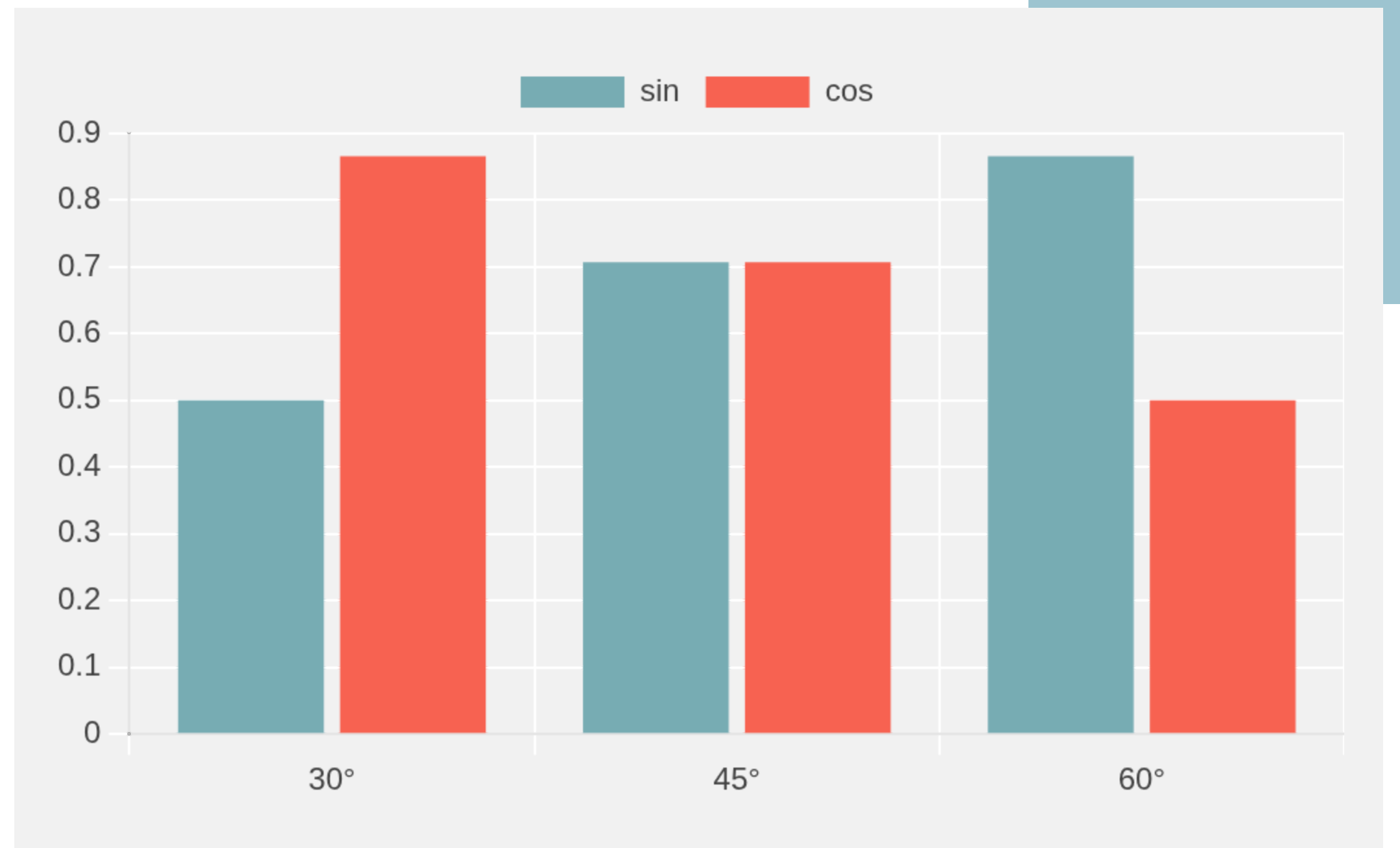
Два треугольника покрывают почти всю тему: один объясняет угол 45° , другой — пару 30° и 60° . Достаточно помнить их стороны, чтобы восстановить все основные значения без калькулятора.

Пары дополняющих углов: 30° и 60°

Углы 30° и 60° дополняют друг друга до прямого угла, поэтому их значения тесно связаны и легко восстанавливаются по симметрии.

Синус и косинус у дополняющих углов меняются местами. Угол 45° находится между ними и служит удобной точкой равновесия.

Таблица точных значений для опорных углов; 30° , 45° , 60°



Частые ошибки при работе с таблицей значений

1

Путают $\sin$ и $\cos$

Самая частая ошибка — перепутать значения для 30° и 60° . Полезно помнить, что у меньшего угла синус меньше, а косинус больше, чем у большего.

2

Записывают несуществующее значение

Тангенс 90° нельзя записывать как обычное число, потому что $\cos 90^\circ = 0$. Если делитель равен нулю, отношение не имеет смысла и остаётся не определённым.

3

Ошибаются со знаком

Когда угол выходит за первую четверть, нужно сразу смотреть, какой знак должен иметь функция. Иначе можно получить правильную величину, но неверный ответ.

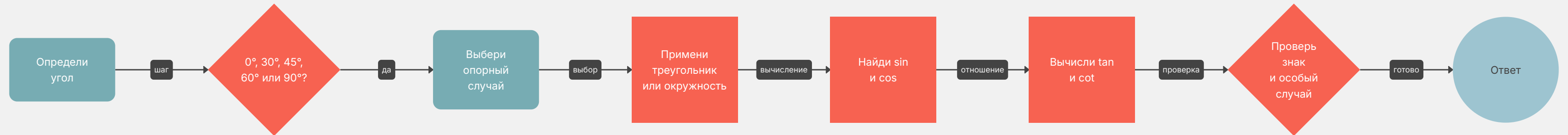
4

Путают равные записи

Записи $\sqrt{3}/3$ и $1/\sqrt{3}$ обозначают одно и то же число. Если это помнить, легче не допустить лишней тревоги при сокращении и преобразовании дробей.

Алгоритм нахождения точного значения угла

Последовательность действий для работы с опорными углами и единичной окружностью



Где встречаются эти значения в жизни и задачах



Высота и тень

На уроках геометрии точные значения помогают находить высоту дерева, столба или здания по длине тени. Когда угол равен 30° , 45° или 60° , вычисления становятся особенно короткими и понятными.



Наклон и построения

В черчении и при работе с планами важно знать, под каким углом идёт линия. Точные тригонометрические значения помогают описывать наклон лестницы, крыши или ramпы без лишних приближений.



Движение и ориентирование

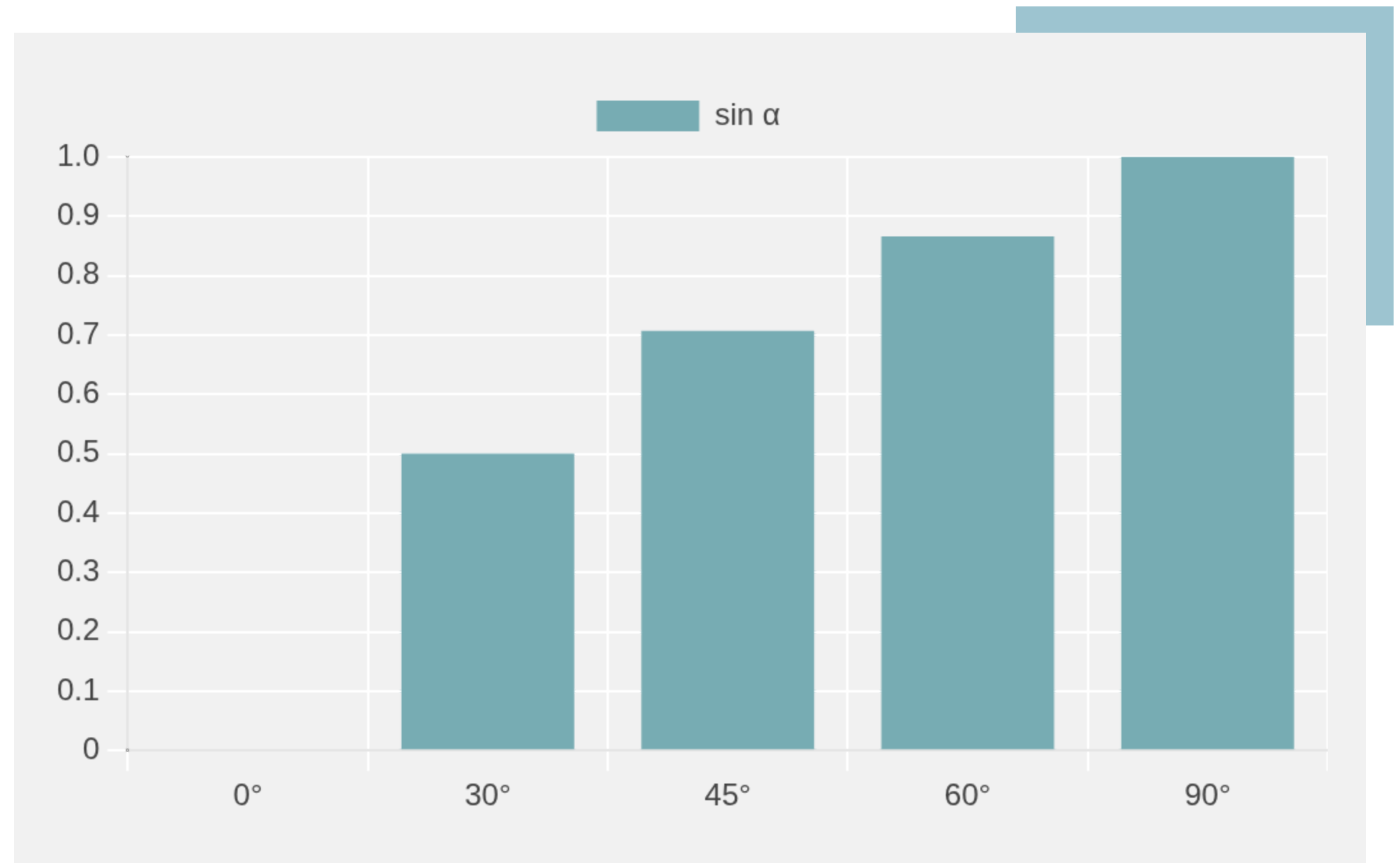
В физике, навигации и компьютерной графике тригонометрия описывает направление движения и положение объектов. Опорные углы удобны тем, что их значения выражаются через простые дроби и корни.

Опорные углы и их особенности

Синус на опорных углах показывает плавный переход от нуля к единице. Это удобно для запоминания порядка значений и проверки ответов.

Все опорные углы образуют одну последовательность: от начала отсчёта до максимума синуса. Симметрия и особые положения позволяют быстро восстановить остальные функции.

Единичная окружность; точные значения для углов 0° , 30° , 45° , 60° и 90°



Краткая таблица для повторения

Эта таблица помогает быстро вспомнить точные значения основных тригонометрических функций для пяти опорных углов без калькулятора.

Достаточно уверенно знать значения для 30° , 45° и 60° , чтобы восстановить всю таблицу. Углы 0° и 90° задают границы и помогают проверять ответы.

Точные значения для опорных углов в школьном курсе геометрии

Угол	sin	cos	tan
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	не определён

Главные выводы по теме

Точные значения для 0° , 30° , 45° , 60° и 90° — это надёжный инструмент для задач по геометрии. Если помнить опорные углы и связи между функциями, ответы находятся быстрее и проверяются увереннее.