

Площадь криволинейной трапеции и определённый интеграл

как найти площадь под кривым графиком точно?



От геометрии к интегралу

Задача о площади под кривой показала, что привычных формул планиметрии недостаточно. Именно она привела математику от разрозненных геометрических приёмов к общему аппарату анализа, который объединяет суммирование, производные и первообразные.



Что называют криволинейной трапецией

Границы области

Криволинейная трапеция — это часть плоскости, ограниченная графиком функции $y=f(x)$, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$.

Пересечение с осью

Когда график пересекает ось Ox , одну и ту же фигуру приходится рассматривать по частям, чтобы не смешивать участки разных знаков.

Положительная высота

Если на отрезке $[a; b]$ функция неотрицательна, область лежит выше оси Ox , а её площадь совпадает с положительным значением интеграла.

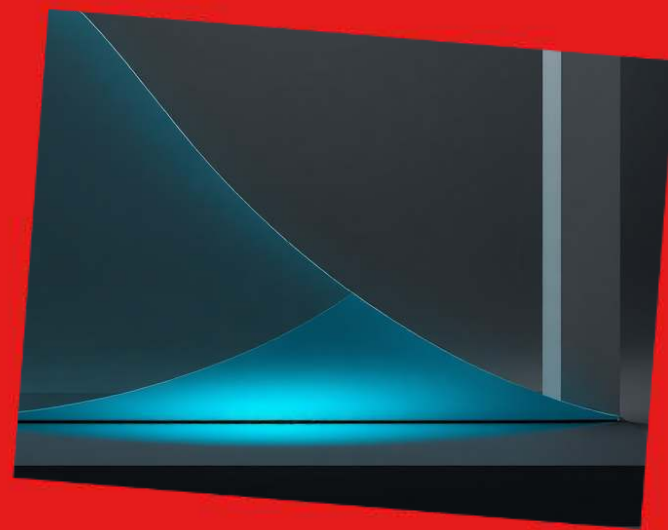
Интеграл и площадь

Определённый интеграл даёт алгебраическую сумму, а геометрическая площадь требует учёта только величин без знака.

Что важно в школе

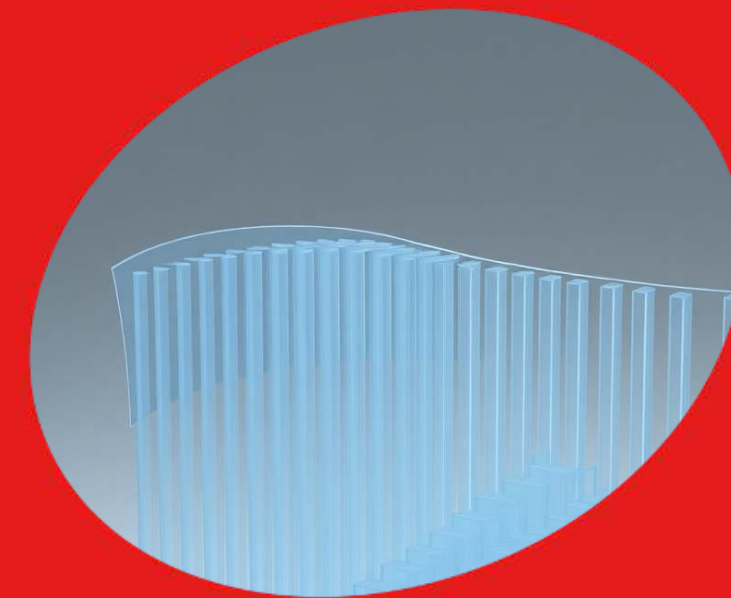
Поэтому на уроках нужно уметь отличать вычисление интеграла от нахождения именно площади фигуры под графиком.

Геометрическая схема области под графиком



Область между линиями

На схеме хорошо видно, как график функции располагается между вертикальными границами $x=a$ и $x=b$. Ось Ox задаёт нижнюю опору для построения фигуры, а заштрихованная часть показывает искомую область. Такая картинка помогает сразу связать запись интеграла с геометрическим образом.



От полосок к сумме

Вертикальные разбиения на узкие прямоугольные полосы иллюстрируют основную идею: сложить площади очень маленьких участков. Чем тоньше такие полосы, тем точнее приближение к истинной площади. Именно так интуиция о сумме бесконечно малых частей приводит к определённому интегралу.

Основные формулы для вычисления площади

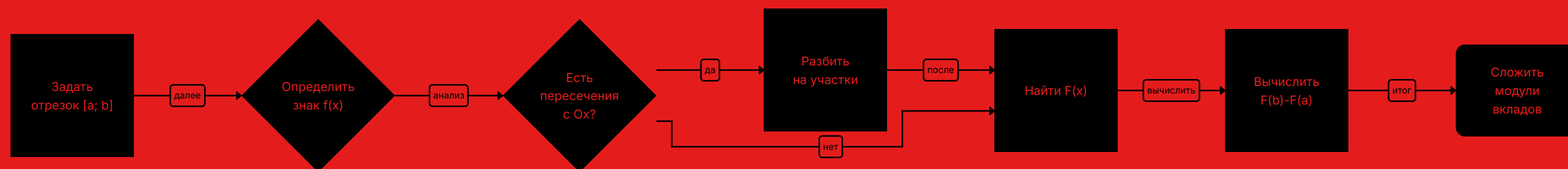
Ниже сведены самые важные случаи, с которыми встречаются в школьных задачах по определённому интегралу.

Интеграл можно понимать как предельную сумму площадей узких прямоугольников; знак функции определяет, совпадает ли результат с геометрической площадью.

Ситуация	Формула	Смысл
$f(x) \geq 0$	$S = \int_a^b f(x) dx$	Площадь положительна
$f(x) \leq 0$	$S = -\int_a^b f(x) dx$	Берём модуль
Меняет знак	$S = \int f(x) dx$	Считаем по частям
Разбиение	$S \approx \sum f(x_i) \Delta x$	Приближение суммы

Алгоритм нахождения площади по определённому интегралу

Последовательность действий при вычислении площади криволинейной трапеции

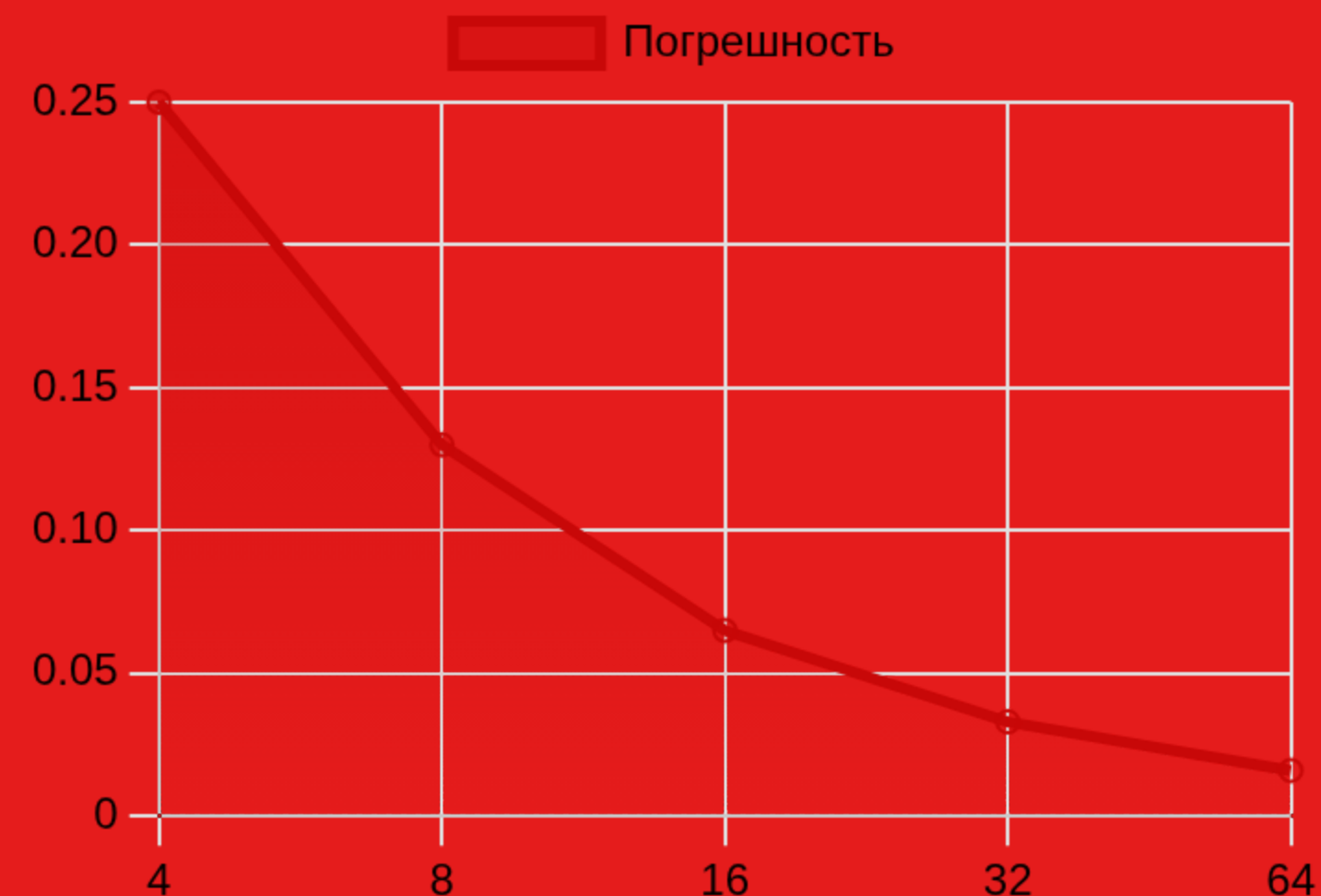


Как число разбиений влияет на точность приближения

При удвоении числа прямоугольников ступенчатая модель заметно приближается к кривой. Это отражает идею, что более мелкий шаг разбиения улучшает оценку площади.

С ростом n ошибка быстро уменьшается: предельный переход делает сумму прямоугольников точным интегралом.

Иллюстративные данные для наглядного графика



Смысл определённого интеграла



Накопление величины

Интеграл описывает накопление, когда небольшие вклады складываются в общий результат. Так выражают путь, массу, работу или объём через сумму бесконечно малых частей.



Геометрический смысл

Если функция неотрицательна, определённый интеграл равен площади под графиком на заданном отрезке. Это делает абстрактную формулу наглядной и удобной для вычислений.



Зависимость от знака

Когда функция принимает отрицательные значения, интеграл становится алгебраической суммой. Поэтому его значение может оказаться положительным, отрицательным или равным нулю.

Формула Ньютона–Лейбница

1. Найти первообразную

Сначала подбирают функцию $F(x)$, для которой производная равна исходной функции $f(x)$. Именно наличие первообразной превращает вычисление интеграла в простой и точный алгебраический шаг.

2. Подставить границы

Затем вычисляют разность $F(b)-F(a)$. Эта операция заменяет трудоёмкое суммирование прямоугольников и сразу даёт значение определённого интеграла на заданном отрезке.

3. Получить точный результат

Формула Ньютона–Лейбница связывает производную и интеграл как взаимно обратные действия. В школьных задачах она является основным способом точного нахождения площади под графиком.

Пример вычисления площади для функции $y=x^2$

1 Записать первообразную

Для функции $y=x^2$ первообразная имеет вид $F(x)=x^3/3$. Это позволяет сразу перейти от графика к вычислению площади на отрезке $[0; 2]$.

2 Применить формулу

По Ньютона–Лейбницу получаем $\int_0^2 x^2 dx = F(2) - F(0) = 8/3$. Таким образом, искомая площадь выражается точным числом без построения приближённых прямоугольников.

3 Связать с рисунком

На графике парабола ограничивает заштрихованную область между $x=0$ и $x=2$. Пример показывает, как геометрическая фигура переводится в алгебраическое вычисление.

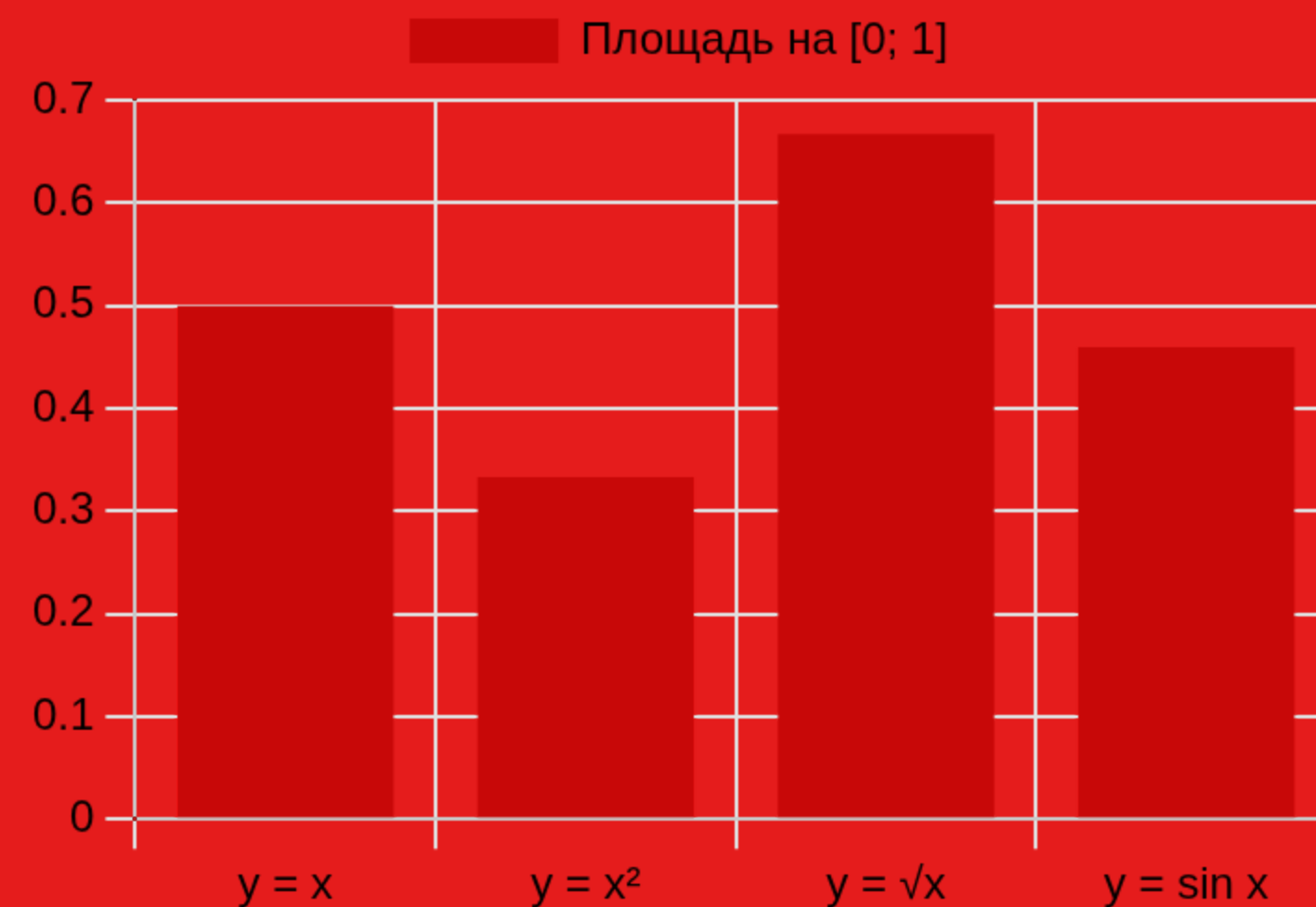


Сравнение площадей под разными графиками на одном отрезке

При одинаковых границах отрезка площадь определяется не только длиной промежутка, но и формой графика и скоростью изменения функции.

На $[0; 1]$ наибольшую площадь даёт $\sqrt{x}$, а наименьшую — x^2 ; поведение функции заметно влияет на результат.

Аналитическое вычисление по формулам первообразных на отрезке $[0; 1]$.



Что происходит, если функция меняет знак

1. График выше оси Ox

На участках, где $f(x) > 0$, вклад в определённый интеграл положителен и совпадает с геометрической площадью.

2. Пересечение оси

В точках, где график пересекает ось Ox , знак функции меняется, и область нужно разделять на отдельные части.

3. Участок ниже оси

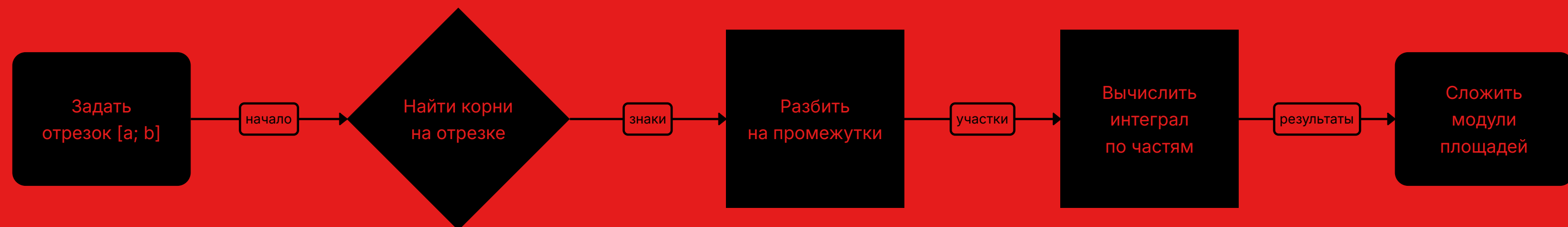
Если $f(x) < 0$, интеграл даёт отрицательный вклад, поэтому он уменьшает алгебраическую сумму, но не исчезает геометрически.

4. Суммирование модулей

Чтобы найти именно площадь, находят интеграл по каждому промежутку и складывают модули всех полученных значений.

Алгоритм вычисления площади при смене знака функции

Последовательность действий при нахождении геометрической площади области, ограниченной графиком функции и осью Ox .



Площадь и знак интеграла в типичных ситуациях

Таблица показывает, как знак функции влияет на связь между интегралом и геометрической площадью.

Алгебраическое значение интеграла совпадает с площадью только при неотрицательной функции; в остальных случаях нужен учёт знака и модулей.

Правила интерпретации определённого интеграла на отрезке.

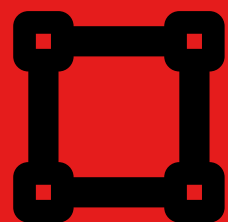
Ситуация	Формула	Итог
$f(x) \geq 0$	$S = \int f(x)dx$	площадь
$f(x) \leq 0$	$S = -\int f(x)dx$	площадь
знак меняется один раз	$ S_1 + S_2 $	сумма модулей
знак меняется несколько раз	$\sum S_i $	полная площадь

Приближённые методы, когда первообразная неизвестна



Метод прямоугольников

Разбивает область на узкие прямоугольники и заменяет график ступенчатым приближением. Метод прост в вычислениях, но чувствителен к размеру шага и обычно даёт заметную погрешность.



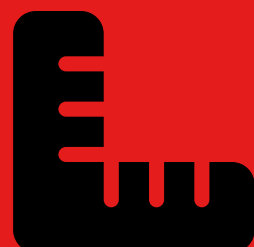
Метод трапеций

Заменяет участки графика отрезками прямых, поэтому лучше учитывает наклон функции. При том же числе разбиений он обычно точнее метода прямоугольников.



Метод Симпсона

Использует параболическое приближение на соседних участках и часто даёт наименьшую ошибку среди школьных численных методов при одинаковом шаге разбиения.



Шаг разбиения

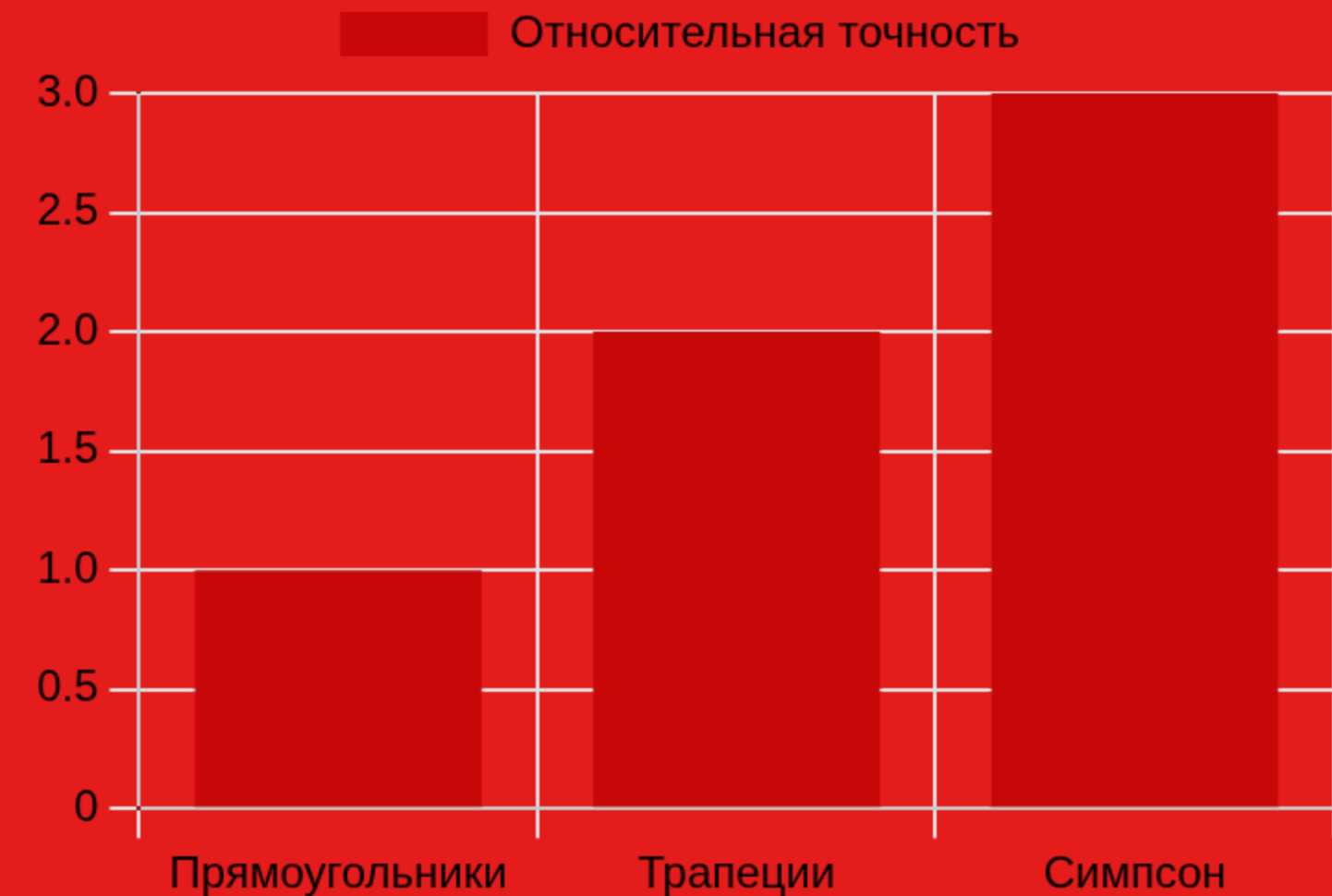
Чем меньше ширина промежутков, тем точнее приближение площади. Поэтому качество вычисления определяется не только методом, но и выбранной детализацией сетки.

Сравнение численных методов приближения

При одинаковом шаге разбиения более точный метод лучше передаёт форму графика и уменьшает накопление ошибки на всём промежутке.

Для грубой оценки достаточно прямоугольников, но при требовании большей точности предпочтительнее трапеции и особенно метод Симпсона.

Качественное сравнение по стандартным численным методам приближённого интегрирования.



Где применяется идея интеграла в реальных задачах



Путь, который не измеришь линейкой

Если известен график скорости, путь за промежуток времени находят как площадь под ним. Интеграл превращает изменение скорости во временной шкале в конкретное расстояние, пройденное телом. Именно поэтому график движения так важен в физике.



От силы и плотности к накопленной величине

Переменная сила, плотность стержня или распределение заряда редко бывают одинаковыми по всей длине. Интеграл позволяет сложить бесконечно малые вклады и получить работу, массу или полный заряд как одну итоговую величину.

Типичные ошибки при вычислении площади

1 Неверные границы

Часто берут не тот отрезок интегрирования или забывают учесть точки пересечения графика с осью Ox . Тогда результат относится к другой области и не совпадает с поставленной задачей.

2 Путаница со знаком

Определённый интеграл и геометрическая площадь не всегда равны. Если график расположен ниже оси, интеграл становится отрицательным, а для площади нужен модуль или разбиение по промежуткам.

3 Ошибка в формуле Ньютона–Лейбница

Нужно вычитать именно $F(b) - F(a)$, а не наоборот. Перепутанный порядок меняет знак результата и приводит к неверному ответу даже при правильной первообразной.

4 Игнорирование единиц

Если по оси отложено время, скорость или длина, итоговая величина имеет свои единицы измерения. Без их проверки легко получить формально верное, но физически бессмысленное число.



Связь геометрии, анализа и прикладных задач

Геометрическая задача

Нужно найти площадь области с кривой границей, которую нельзя вычислить одной формулой планиметрии. Это заставило математиков перейти от чертежа к более общему способу описания непрерывных фигур.

Связь с производной

Формула Ньютона–Лейбница показала, что интегрирование и дифференцирование взаимно связаны. Благодаря этому площадь можно находить через первообразную, не выполняя суммирование вручную.

Переход к анализу

Идея разбиения области на бесконечно малые части привела к предельной сумме и понятию определённого интеграла. Так геометрия получила строгий аналитический язык.

Практический смысл

Тот же принцип используется в физике, экономике и технических расчётах. Интеграл описывает не только площадь, но и любое накопление величины во времени или по координате.

Интеграл как точный язык площади

Площадь криволинейной трапеции становится точной и вычислимой благодаря определённому интегралу. Формула Ньютона–Лейбница соединяет геометрию, анализ и реальные задачи в единую математическую идею.