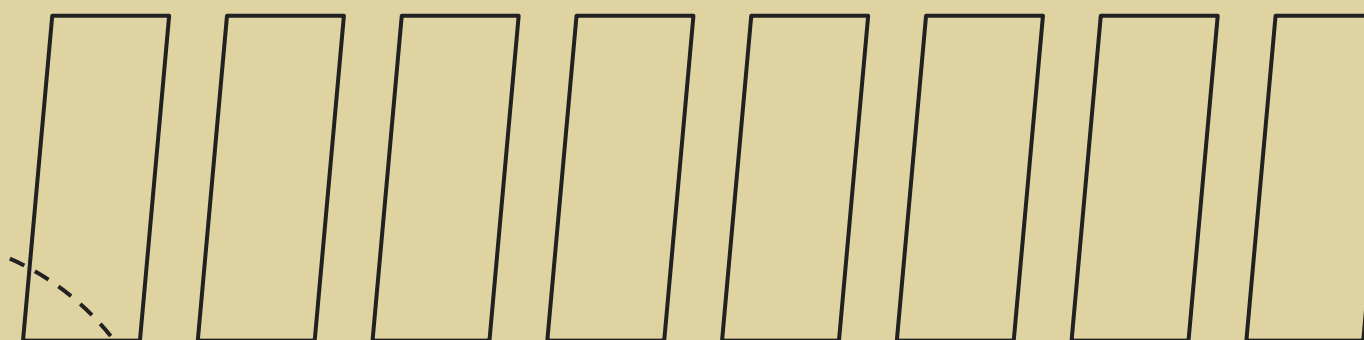
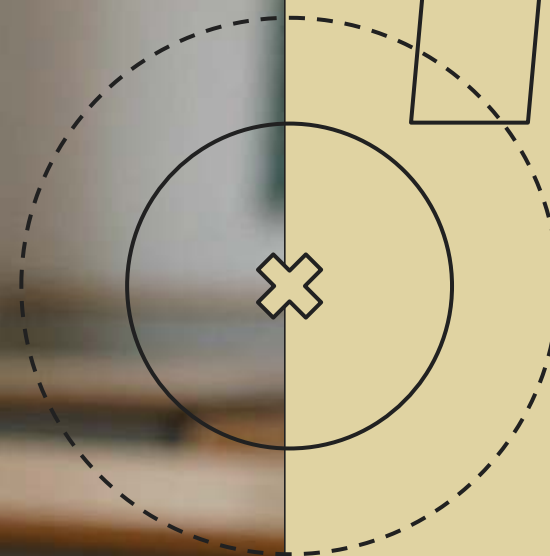
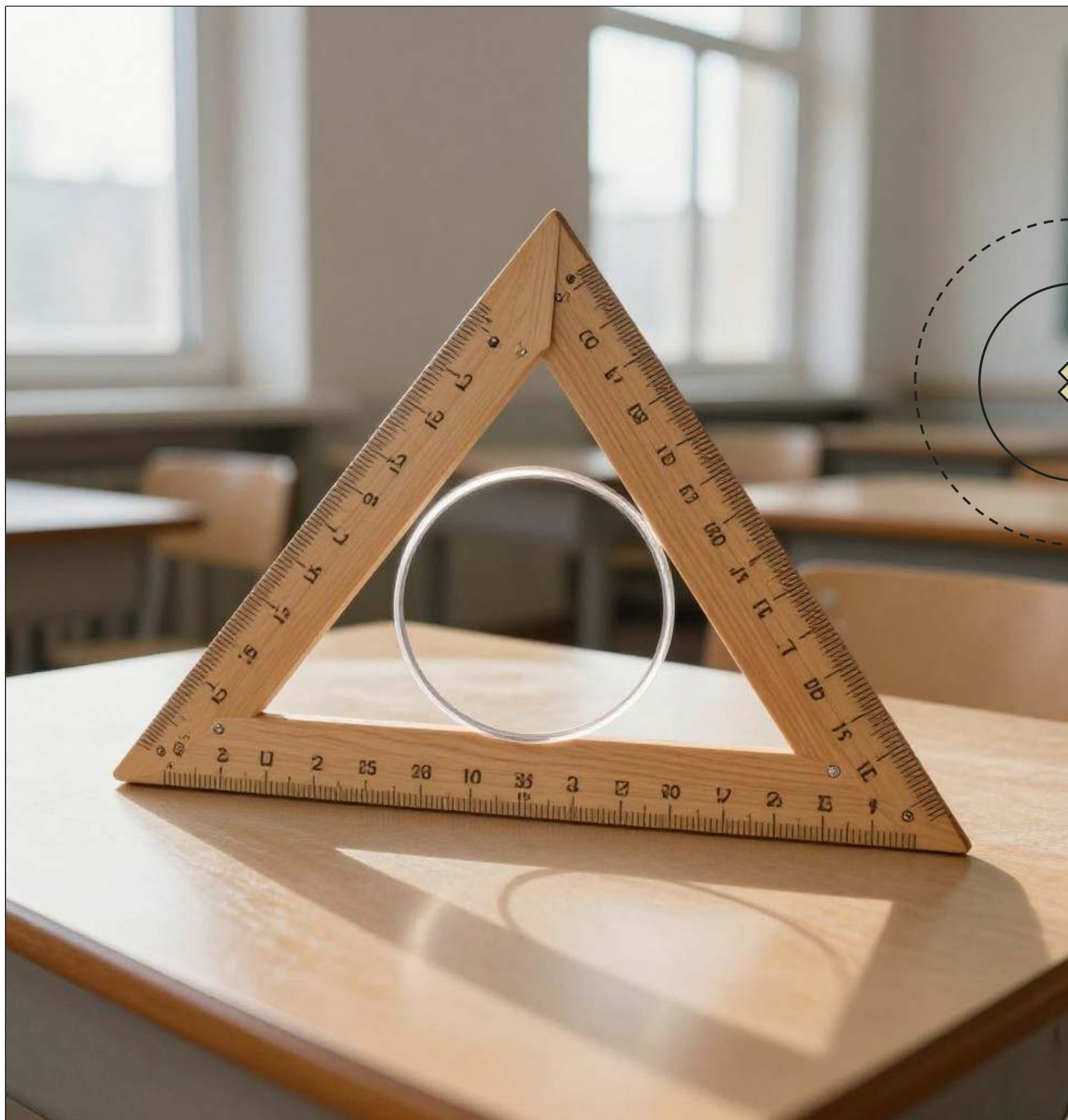


Замечательные точки треугольника и окружность Эйлера

Геометрия треугольника полна неожиданных
центров и красивых связей.





Почему эта тема важна в геометрии 9 класса

В 9 классе треугольник открывается глубже: линии пересекаются, образуют особые точки и помогают доказывать свойства фигур. Эти идеи делают построения точнее, а геометрию — нагляднее и интереснее для исследования.

Медианы треугольника и центроид

01

Что такое медиана

Медиана соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны. В каждом треугольнике можно провести три медианы, и они всегда встречаются в одной общей точке.

02

Центроид как центр тяжести

Точка пересечения медиан называется центроидом. Её удобно представлять как центр равновесия треугольника: если фигуру сделать из плотного материала, она будет балансировать именно около этой точки.

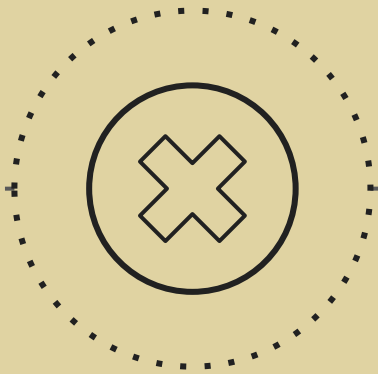
03

Особое отношение отрезков

Центроид делит каждую медиану на две части в отношении $2:1$, если считать от вершины. Это свойство часто используют в задачах на вычисления и доказательства.

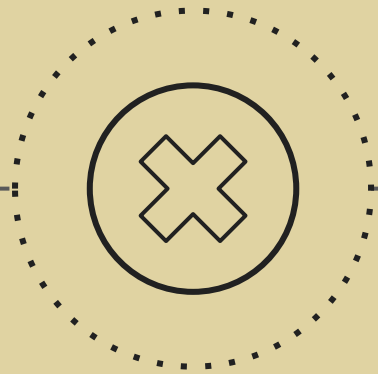


Пересечение медиан на чертеже



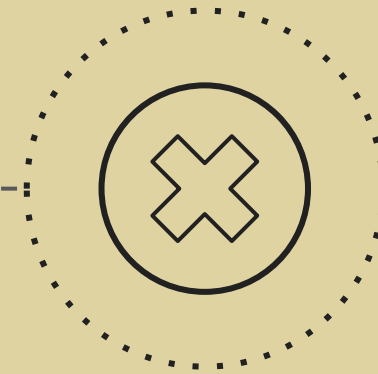
Построение медиан

На чертеже из каждой вершины проведена медиана к середине противоположной стороны. Отмеченные середины помогают сразу увидеть, почему все три отрезка построены верно и симметрично.



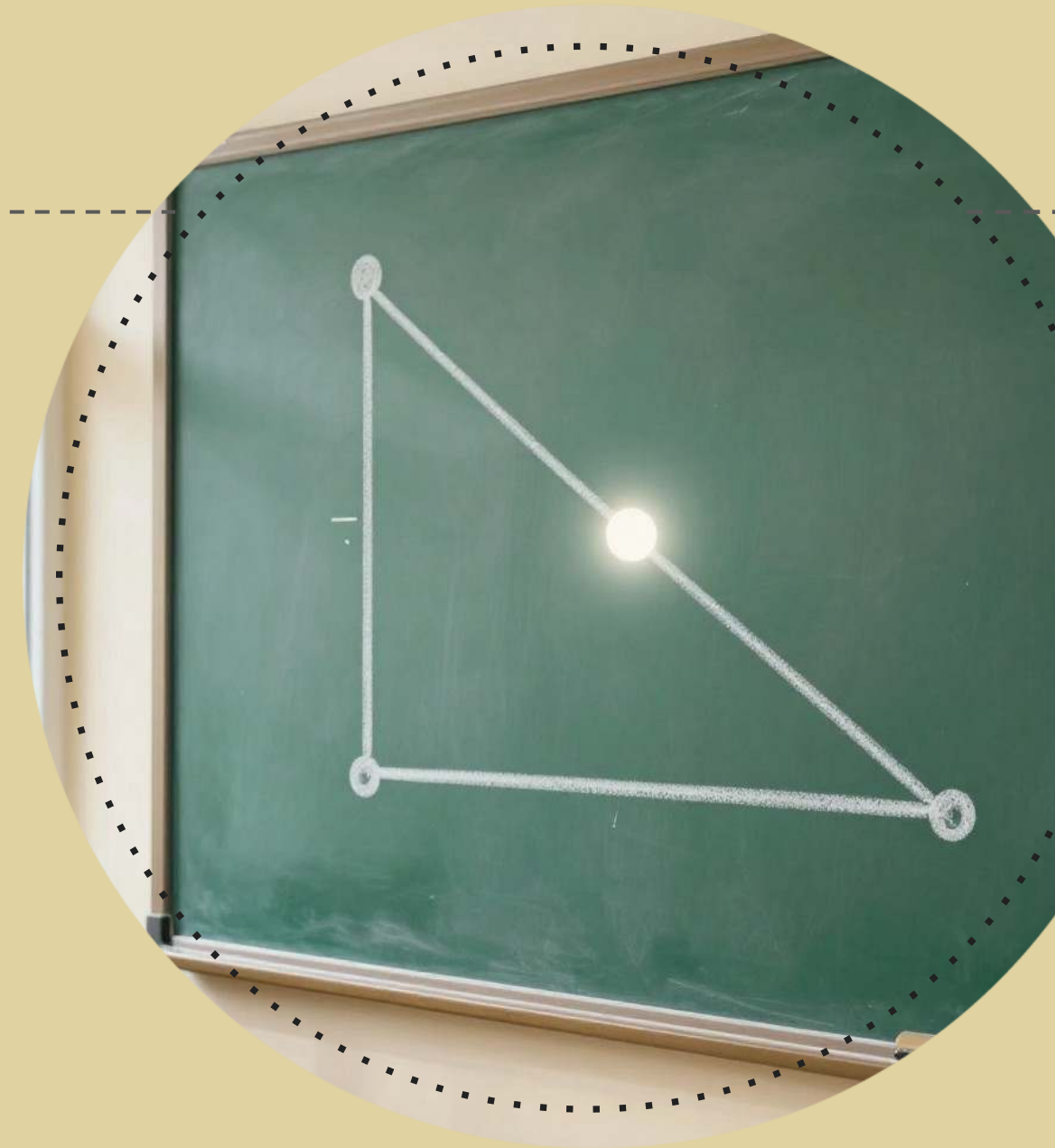
Точка пересечения

Медианы пересекаются внутри треугольника в одной точке. Она выделена отдельно и показывает положение центра, который остаётся единственным для данной фигуры.



Отношение 2:1

На одной медиане удобно показать, что более длинная часть идёт от вершины до центра. Такое деление подтверждает основное свойство центра и помогает его запомнить.



Высоты треугольника и ортоцентр

01

Высота и перпендикуляр

Высота треугольника проводится из вершины перпендикулярно к противоположной стороне или её продолжению. Она показывает, как фигура связана с прямыми углами и расстояниями.

02

Ортоцентр треугольника

Три высоты пересекаются в одной точке, которая называется ортоцентром. Это ещё одна замечательная точка треугольника, получающаяся не из середины сторон, а из перпендикуляров.

03

Положение зависит от вида

У остроугольного треугольника ортоцентр находится внутри, у прямоугольного совпадает с вершиной прямого угла, а у тупоугольного оказывается вне треугольника. Так по высотам можно многое узнать о фигуре.



Где расположен ортоцентр в разных треугольниках

Диаграмма показывает три разные ситуации для одной и той же точки. Значения на оси обозначают: внутри, в вершине прямого угла и вне треугольника.

Положение ортоцентра напрямую связано с видом треугольника: чем сильнее меняются углы, тем заметнее меняется и его расположение.

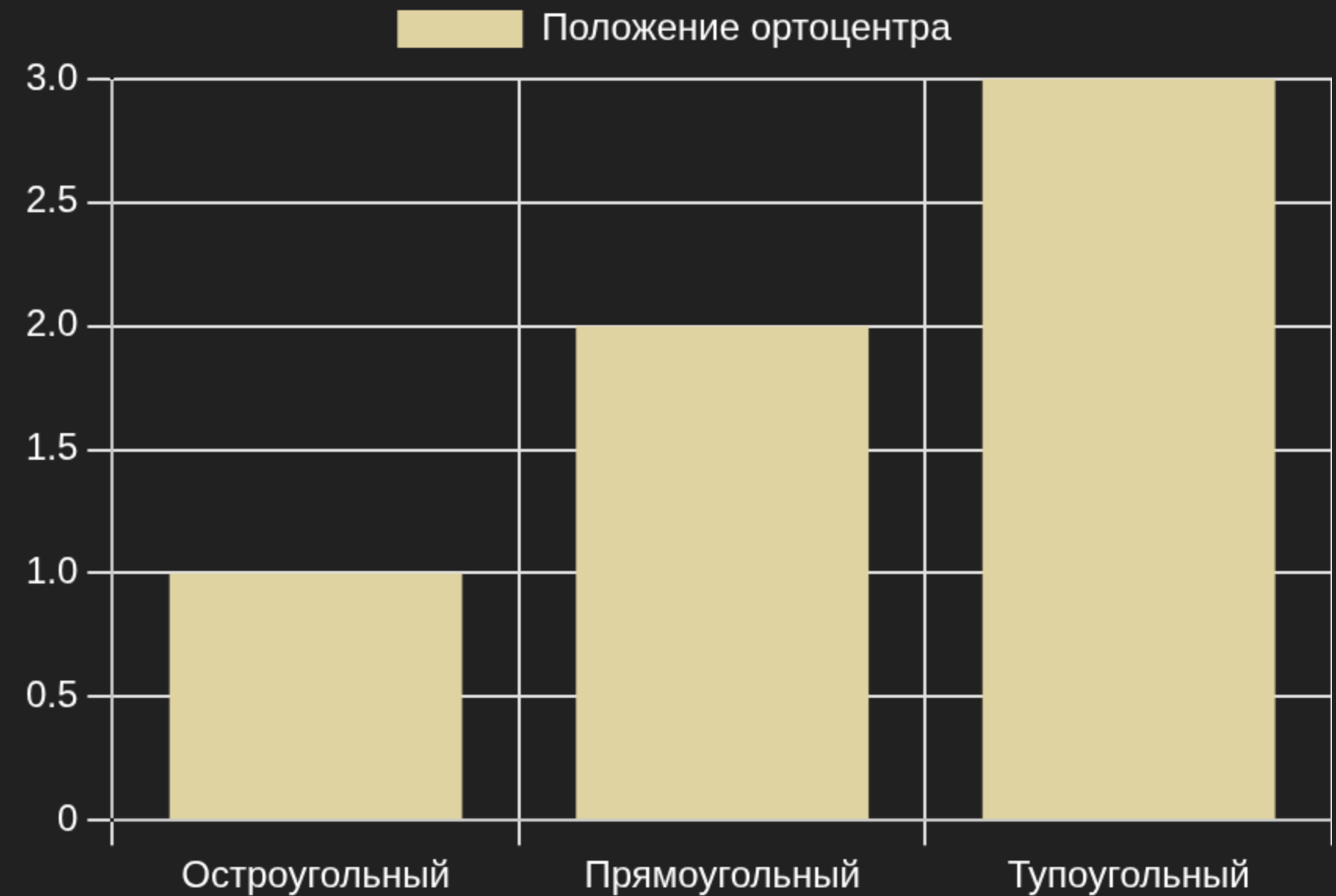


Схема по свойствам высот треугольника, школьная геометрия

Биссектрисы и инцентр

Биссектриса угла

Биссектриса делит угол на две равные части. Все её точки одинаково удалены от сторон угла, поэтому такая линия особенно удобна при точных построениях.

Точка пересечения

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая называется инцентром. Эта точка всегда находится внутри треугольника и играет роль его внутреннего центра.



Вписанная окружность

Инцентр является центром вписанной окружности. Она касается всех сторон треугольника изнутри, а расстояние от инцентра до каждой стороны одинаково.

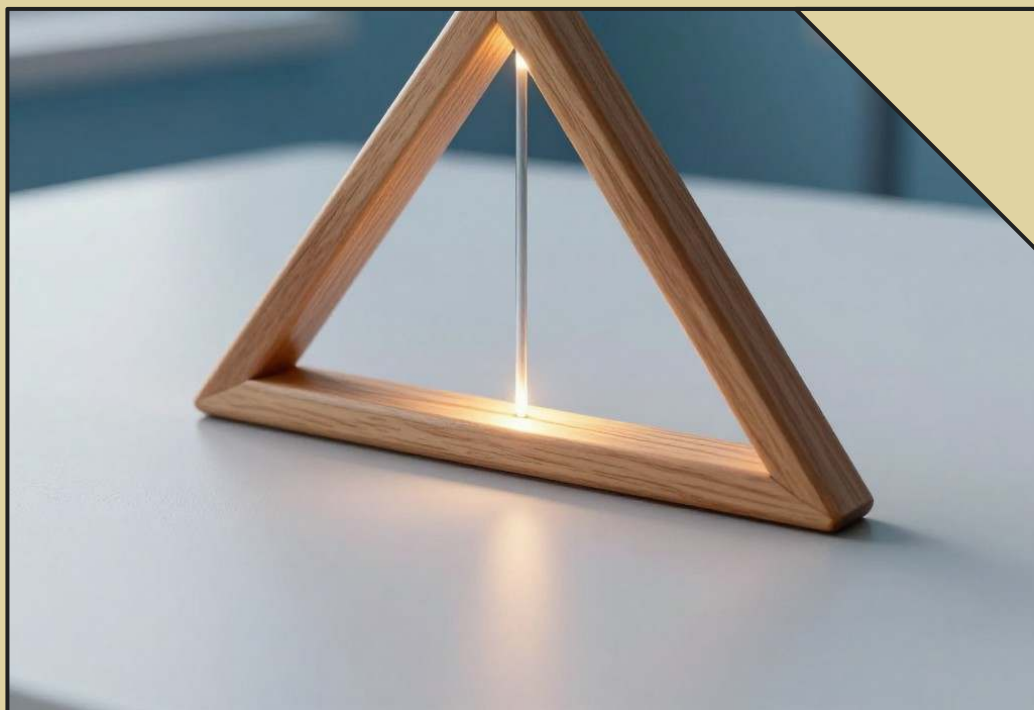
Четыре замечательные точки треугольника

Сравнение показывает, какие линии треугольника ведут к каждой замечательной точке и какое главное свойство при этом получается.

Каждая группа линий задаёт свою точку и своё характерное расстояние: от сторон, от вершин или по отрезку медианы.

Линии	Точка	Свойство
Медианы	Центроид	2:1
Высоты	Ортоцентр	Перпендикуляры
Биссектрисы	Инцентр	Равноудалён от сторон
Серед. перпендикуляры	Центр опис. окружности	Равноудалён от вершин

Серединные перпендикуляры и центр описанной окружности



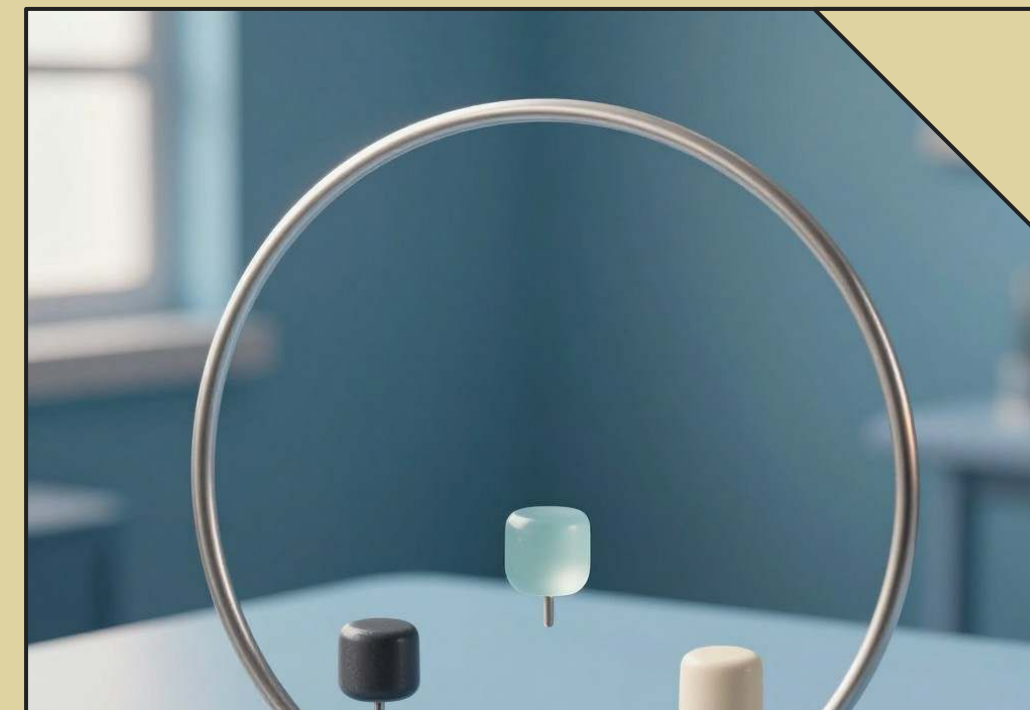
Почему именно серединный перпендикуляр

Серединный перпендикуляр проходит через середину стороны под прямым углом. Его точки одинаково удалены от двух концов этой стороны, поэтому он помогает находить место, равноудалённое сразу от двух вершин треугольника.



Одна точка для трёх сторон

Если построить серединные перпендикуляры к трём сторонам, они встретятся в одной точке. Это центр описанной окружности, и он одинаково удалён от всех трёх вершин треугольника.



Одна окружность через три вершины

Из центра можно провести радиусы к каждой вершине, и все они будут равны. Поэтому через три вершины треугольника проходит одна окружность, а её центр находится на пересечении серединных перпендикуляров.

Окружность Эйлера, или окружность девяти точек

01

Девять особых точек

Окружность Эйлера проходит через три середины сторон треугольника, три основания высот и три середины отрезков от ортоцентра к вершинам. Вместе это девять характерных точек.

02

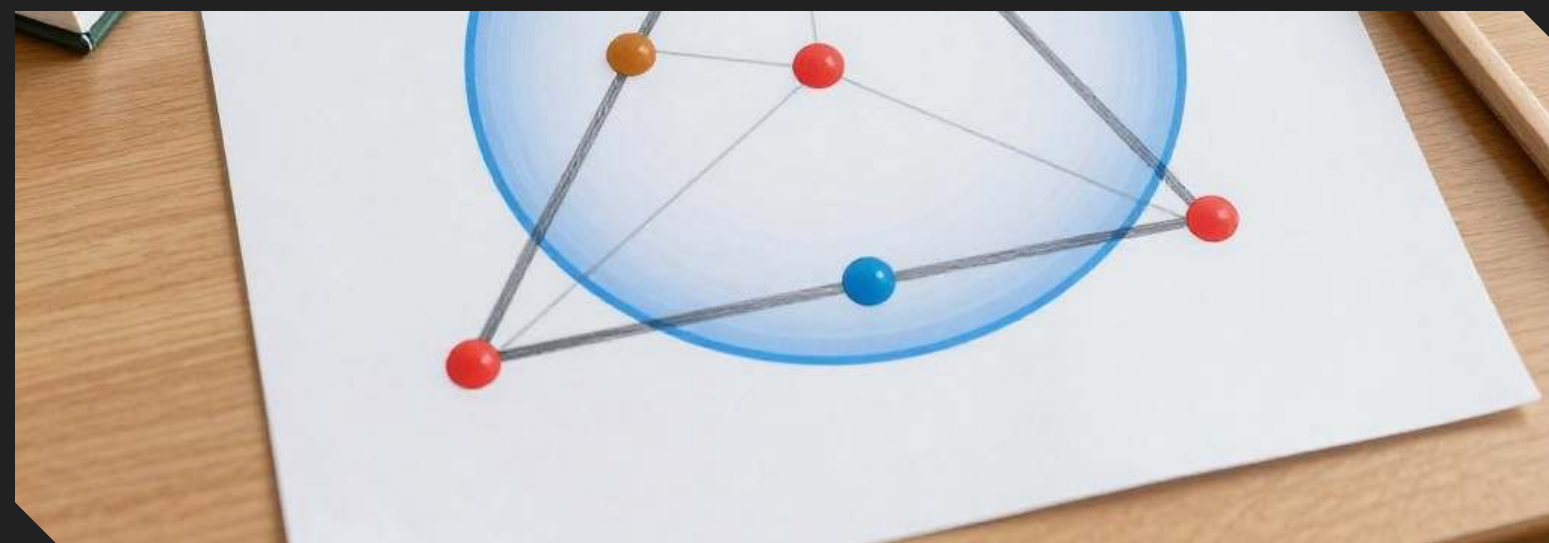
Почему она так называется

Все точки принадлежат одной окружности, поэтому её называют окружностью девяти точек. Она связывает сразу несколько важных элементов треугольника и показывает их скрытую согласованность.

03

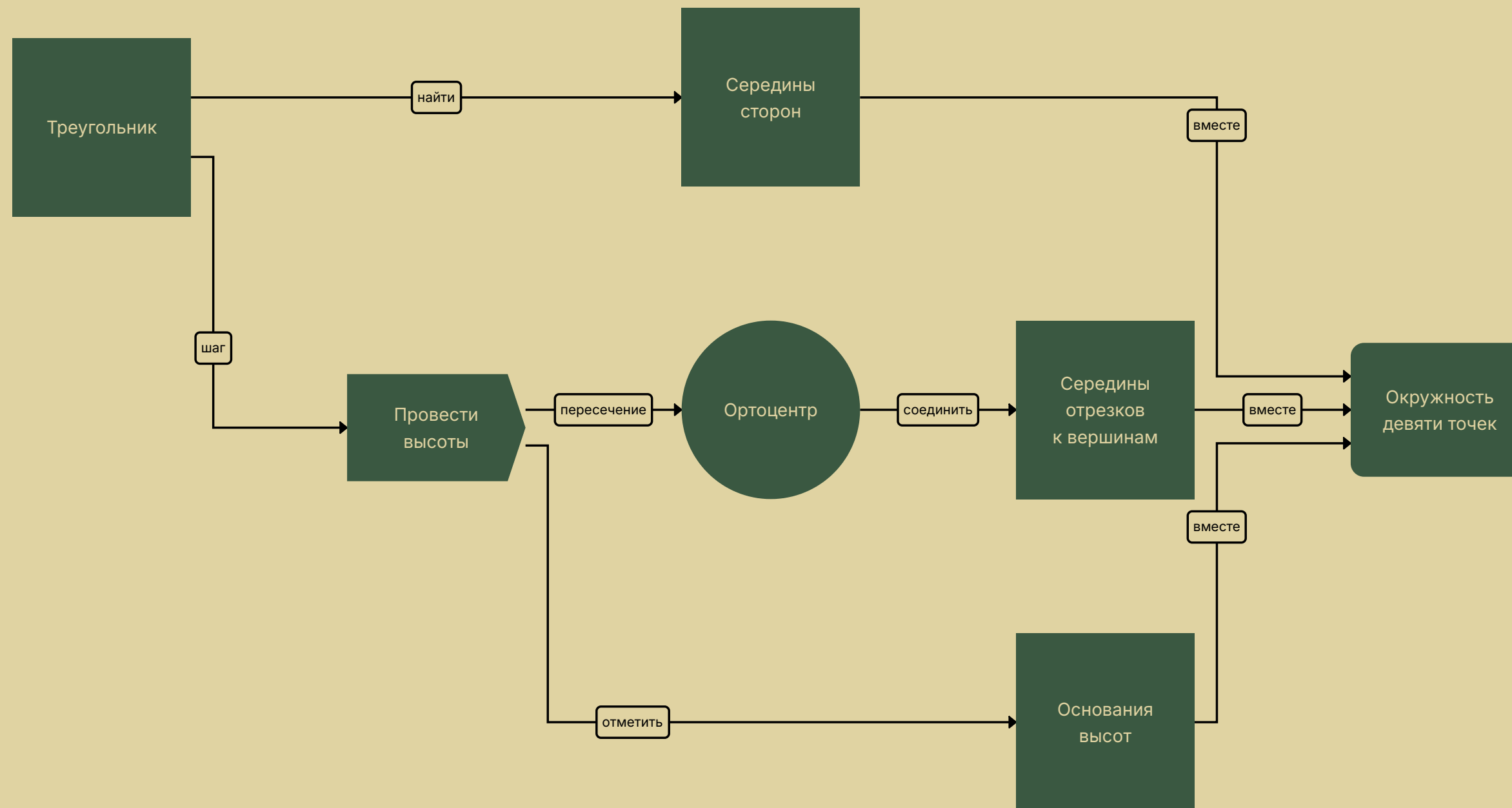
Значение теоремы

Эта окружность особенно красива тем, что возникает из простых построений, но объединяет разные части треугольника в одно целое. Именно поэтому её часто приводят как пример изящной теоремы геометрии.



Построение окружности девяти точек

✗ Последовательность: высоты треугольника, ортоцентр, основания высот, середины сторон и середины отрезков к вершинам.



Девять точек на одной окружности



1. Построение высот

Сначала в треугольнике проводят три высоты. Они задают основу для поиска ортоцентра и связанных с ним точек.



2. Получение девяти точек

Затем отмечают основания высот, середины сторон и середины отрезков от ортоцентра к вершинам. Так образуются три равные группы точек.



3. Общая окружность

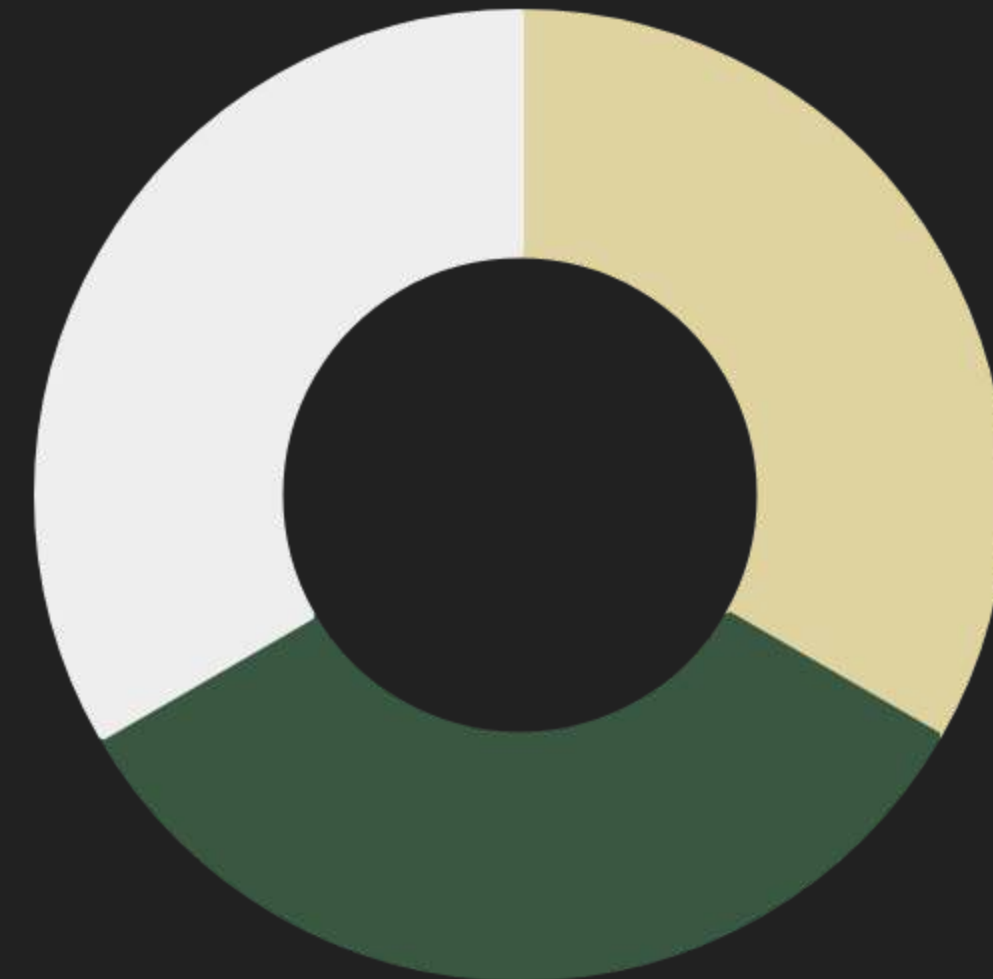
После построения оказывается, что все девять точек лежат на одной окружности, независимо от вида треугольника.

Из каких точек состоит окружность Эйлера

Все три группы одинаковы по числу точек, поэтому диаграмма выглядит симметрично и легко запоминается.

Равенство трёх частей подчёркивает, что окружность девяти точек объединяет разные элементы треугольника в одну систему.

Середины сторон Основания высот
Середины отрезков к ортоцентру



Геометрические свойства треугольника и окружности Эйлера

**меньше радиус
окружности девяти точек,
чем радиус описанной
окружности.**

Это показывает точную связь двух
окружностей треугольника: одна
получается как уменьшенная вдвое
копия другой по радиусу.

в 2 раза

Прямая Эйлера и три основные точки треугольника

01

Центр описанной окружности

Он расположен на прямой Эйлера и задаёт одну из главных опорных точек всей конструкции треугольника.

02

Центроид и ортоцентр

Эти точки тоже лежат на одной прямой с центром описанной окружности, образуя заметную геометрическую цепочку.

03

Порядок точек

Для неравностороннего треугольника важно видеть, как точки расположены относительно друг друга: это помогает строить и доказывать свойства аккуратно.



Сравнение замечательных центров треугольника

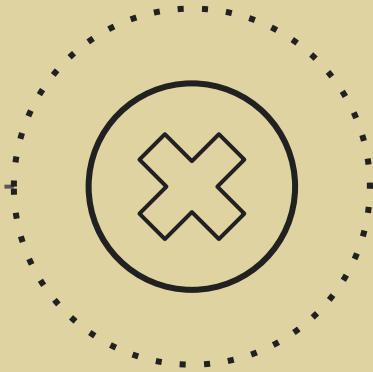
✕ Таблица помогает быстро сопоставить четыре главные точки и увидеть, с какими линиями и свойствами они связаны.

✕ Каждый центр определяется своей системой линий, а его положение зависит от того, какие именно линии пересекаются в треугольнике.

Центр	Построение	Свойство	Положение
Центроид	Медианы	2:1	Внутри
Ортоцентр	Высоты	Пересечение	Внутри/ снаружи
Инцентр	Биссектрисы	Равные расстояния	Внутри

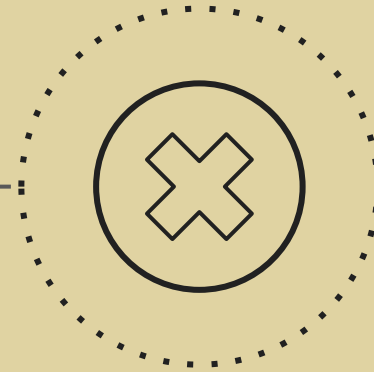
Основные свойства треугольника

Частные случаи: равнобедренный и равносторонний треугольник



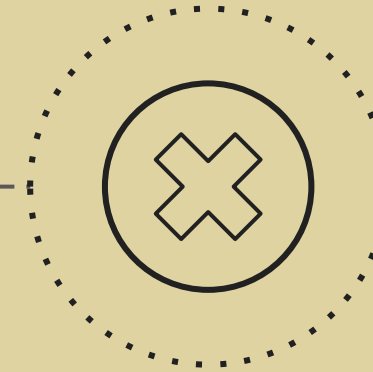
Равнобедренный треугольник

К основанию здесь часто ведут одна и та же линия: высота, медиана и биссектриса совпадают. Это отражает осевую симметрию фигуры и упрощает построения.



Равносторонний треугольник

В нём все замечательные точки совпадают в одной точке. Медианы, высоты, биссектрисы и серединные перпендикуляры становятся попарно одинаковыми по направлению.

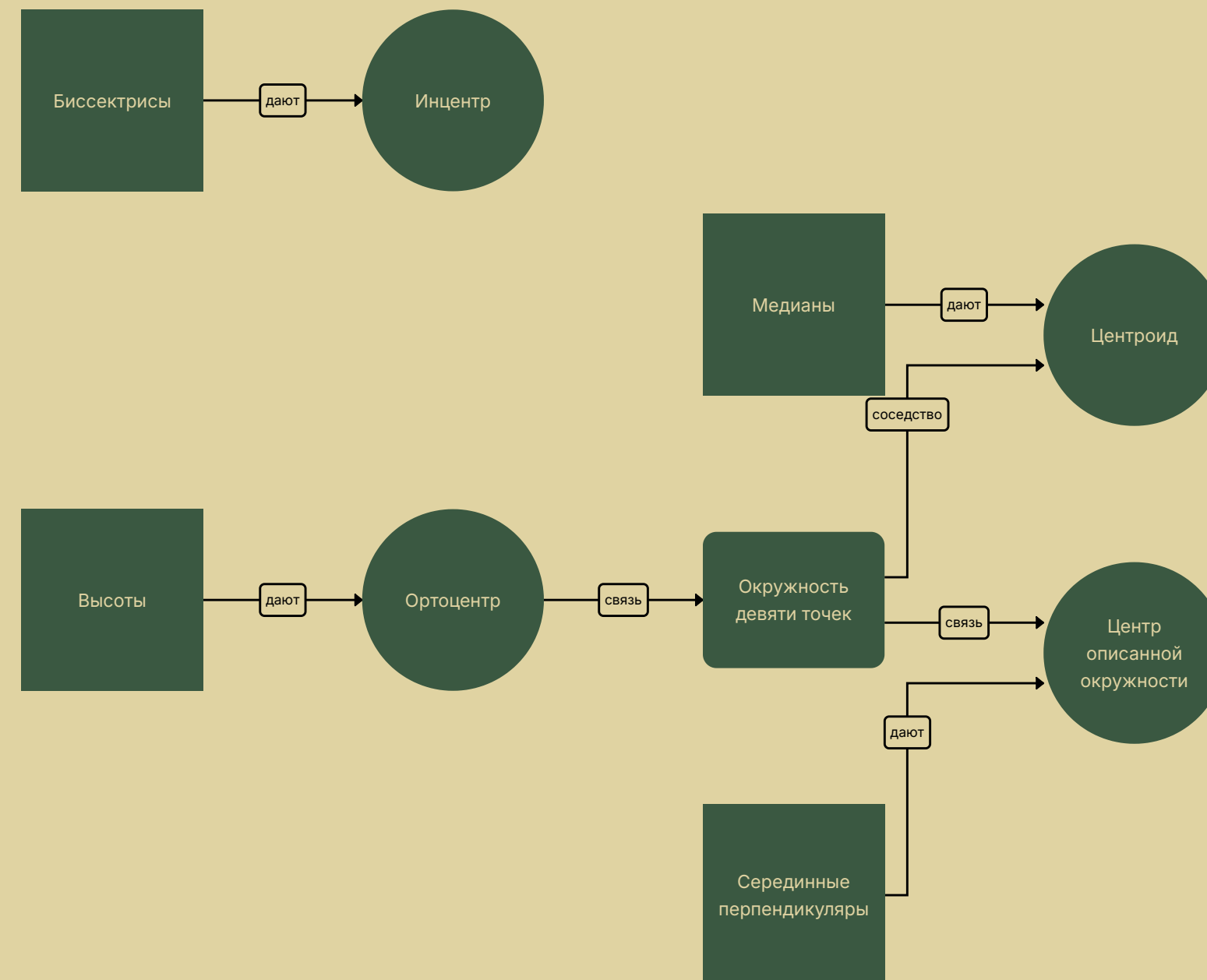


Симметрия фигуры

Чем больше симметрия треугольника, тем меньше разных замечательных точек приходится различать. Поэтому равносторонний треугольник — самый удобный для наблюдений.

Как связаны линии и замечательные точки

✗ Схема показывает, какая специальная линия треугольника приводит к каждой замечательной точке и как появляется окружность Эйлера.



Зачем нужны замечательные точки и окружность Эйлера



Построения

С этими точками удобно выполнять точные построения: находить середины, перпендикуляры и пересечения линий без лишних вычислений.



Измерения

Замечательные точки помогают находить равные расстояния и сравнивать отрезки, что делает геометрические задачи более понятными и наглядными.



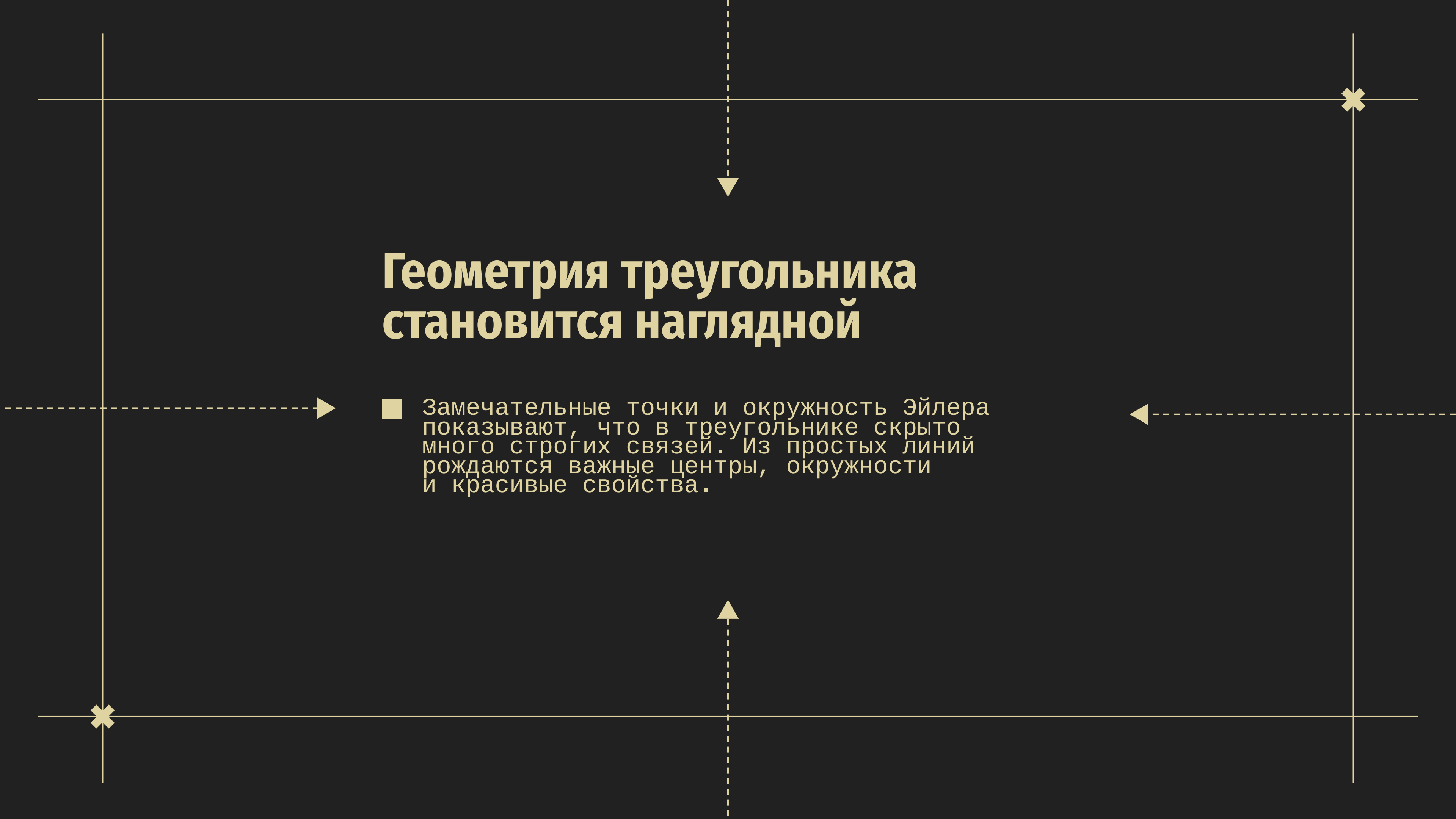
Доказательства

Через высоты, медианы и биссектрисы легко объяснить, почему некоторые точки пересекаются в одной точке и какие свойства из этого следуют.



Исследования

Тема подходит для олимпиадных задач и мини-проектов, потому что соединяет красивую теорию, аккуратные чертежи и чёткую логику.



Геометрия треугольника становится наглядной

- Замечательные точки и окружность Эйлера показывают, что в треугольнике скрыто много строгих связей. Из простых линий рождаются важные центры, окружности и красивые свойства.