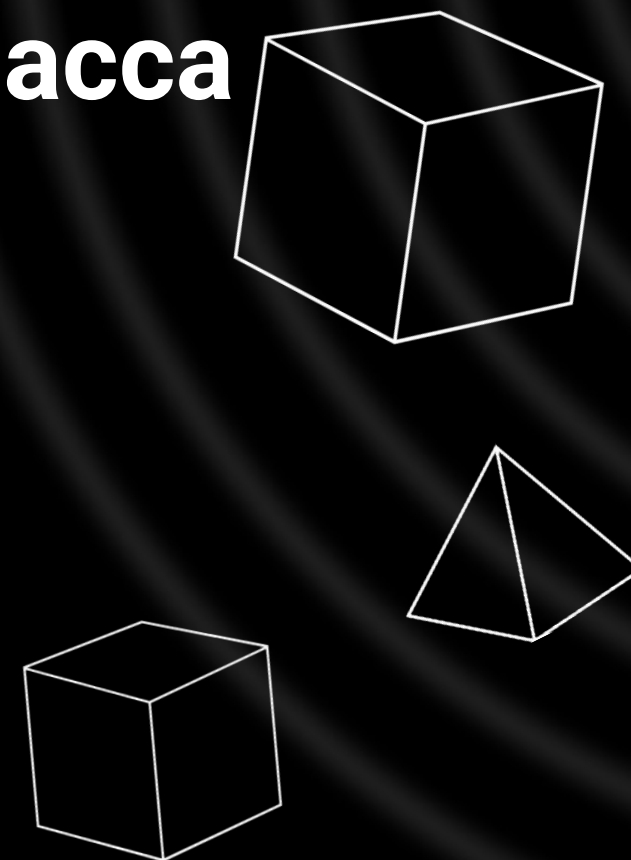


Квадратичные иррациональности в геометрии 8 класса

Квадратичные иррациональности возникают как корни уравнений второй степени и дают точные длины в фигурах.



Почему такие числа встречаются в геометрии

Геометрия часто приводит к уравнениям второй степени: когда в формуле появляется квадрат и извлекается корень, появляются $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и φ . Эти числа помогают находить неизвестные отрезки и объясняют, почему не все длины выражаются дробями.



Определение через квадратное уравнение

1

Число называют квадратичной иррациональностью, если оно иррационально и является корнем уравнения вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b, c — целые числа, а $a \neq 0$.

2

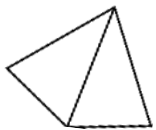
Такое число нельзя записать одной обыкновенной дробью, зато можно точно задать формулой с корнем. Для геометрии это означает вычисления через $\sqrt{n}$ и выражения со сложением или вычитанием корня.

3

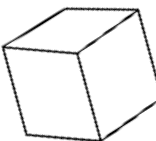
Квадратичные иррациональности удобно распознавать по виду найденной формулы: длина отрезка получается либо просто корнем, либо суммой и разностью с квадратным корнем.

Рациональные, иррациональные и квадратичные числа

Категория	Примеры	Как записывается	Связь с уравнением
Рациональные	3, -5, 7/4	Дробью	Для 2-й степени — без корня
Иррациональные	$\sqrt{2}$, π , $\sqrt{7}$	Не дробь	Может не быть квадратной степени
Квадратичные иррациональности	$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $(1+\sqrt{5})/2$, $2-\sqrt{3}$	Обычно через $\sqrt{b}$	Корень $ax^2+bx+c=0$



Сравнение показывает, где «заканчивается» дробная запись и начинается особый класс, связанный с корнями квадратных уравнений.



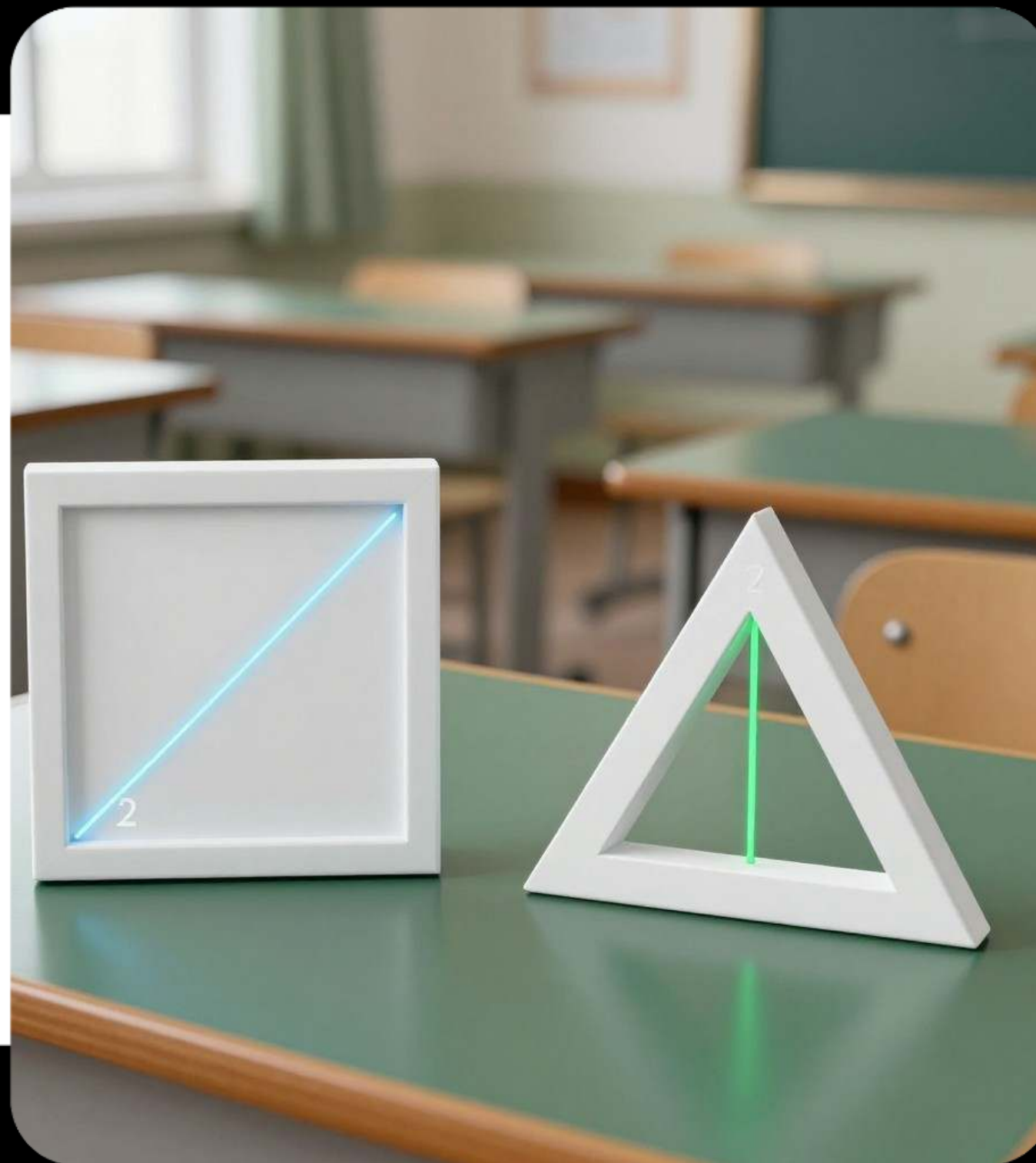
Ключевой вывод: среди иррациональных выделяется более узкий класс — квадратичные иррациональности, но не каждое иррациональное число входит в него.

Примеры приведены в рамках определения и школьной классификации чисел.

Простейшие геометрические примеры: диагональ и сторона

1

Диагональ квадрата со стороной 1 равна $\sqrt{2}$: это следует из теоремы Пифагора, если рассматривать диагональ как гипотенузу. Здесь сразу появляется корень второй степени.

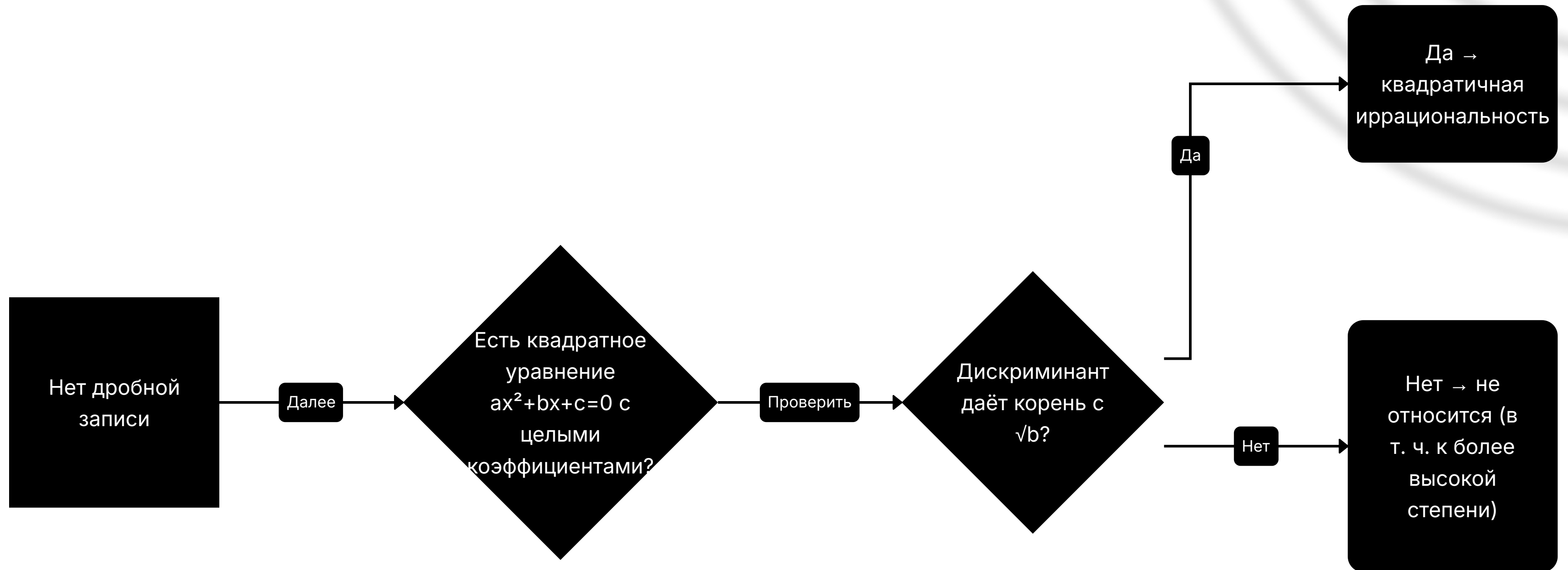


2

Аналогично, в равностороннем треугольнике со стороной 2 высота равна $\sqrt{3}$, а в прямоугольном треугольнике с катетами 1 и 2 гипотенуза равна $\sqrt{5}$. Эти длины квадратичные иррациональности, потому что связаны с уравнениями $x^2=2$, $x^2=3$ и $x^2=5$.

Как проверить, является ли число квадратичной иррациональностью

Последовательность действий для ответа по школьной логике квадратных уравнений.



Общий вид таких чисел

1

Квадратичная иррациональность часто записывается в виде $(a+\sqrt{b})/c$ или $(a-\sqrt{b})/c$, где a , b и c — целые числа. При этом число b не должно быть точным квадратом, иначе корень станет рациональным.

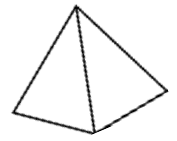
2

Такой вид получается после решения квадратного уравнения по формуле корней: сначала появляется выражение с корнем, затем его приводят к удобному дробному виду. Если под корнем «несовершенный квадрат», выражение остаётся иррациональным.

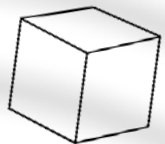
3

Поэтому достаточно увидеть структуру «целая часть $\pm$ корень из целого» и проверить, что корень действительно связан с квадратным уравнением второй степени.

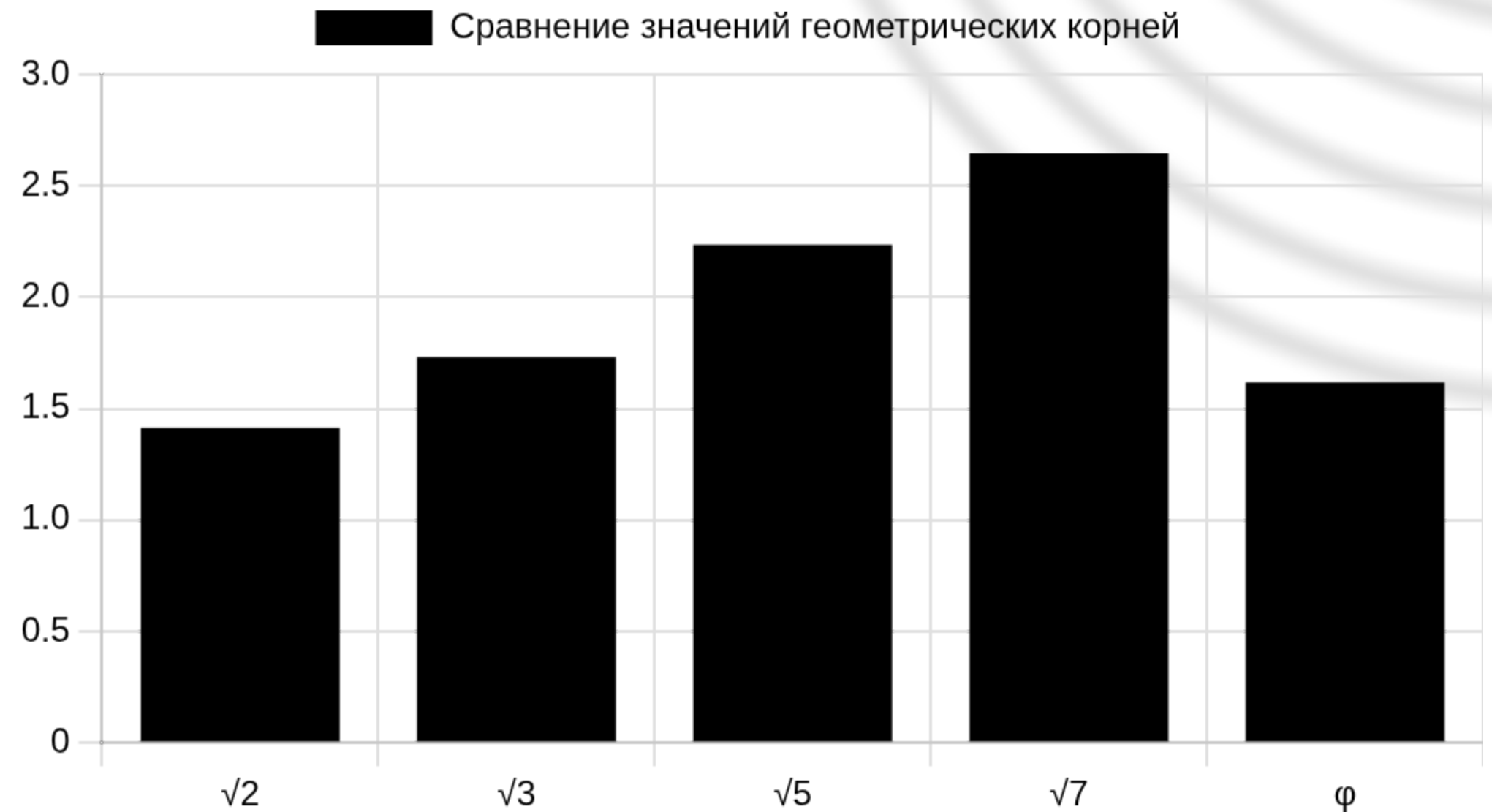
Сравнение значений геометрических корней

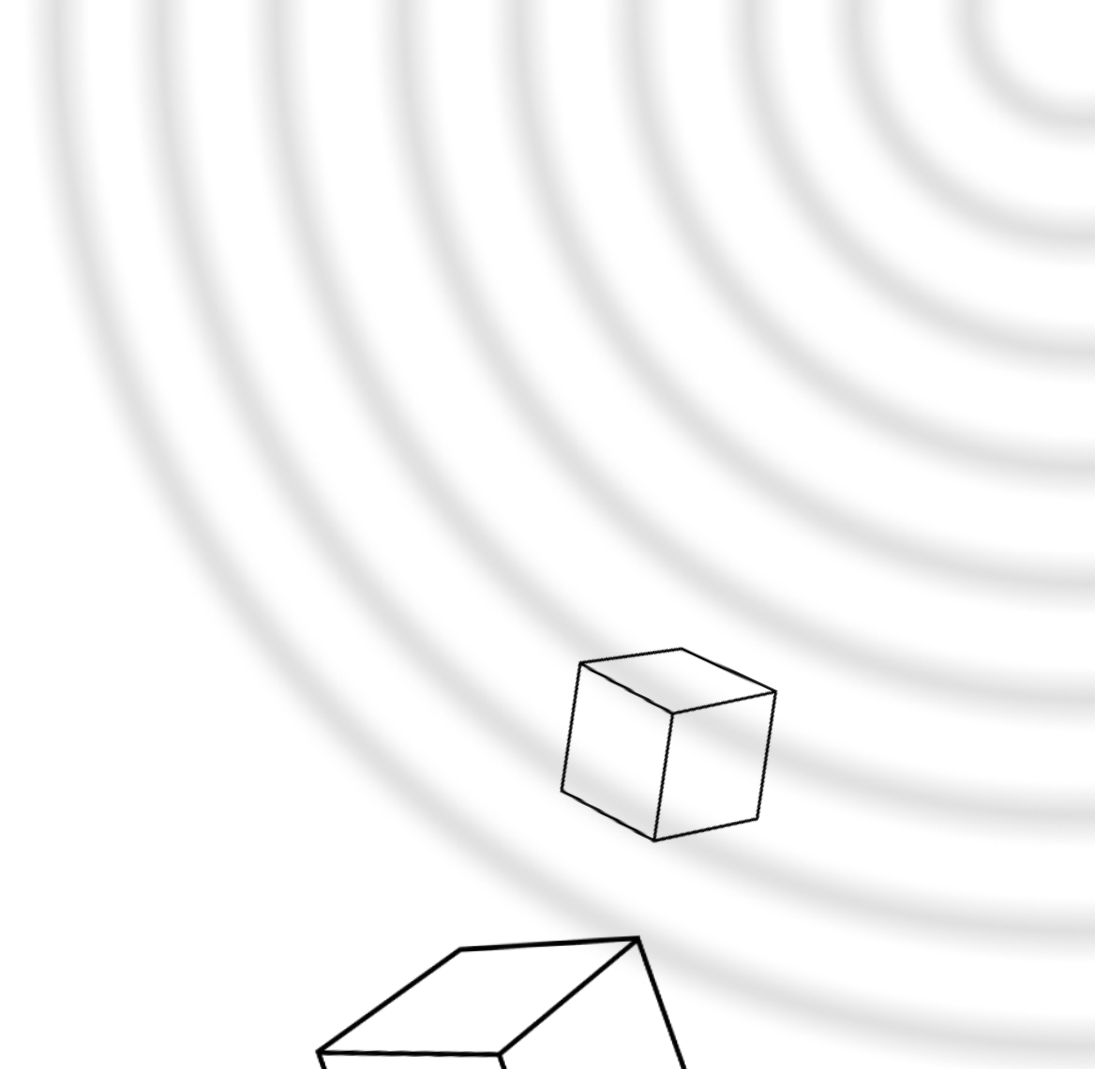
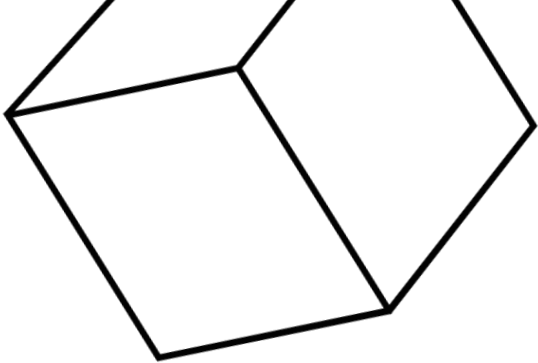
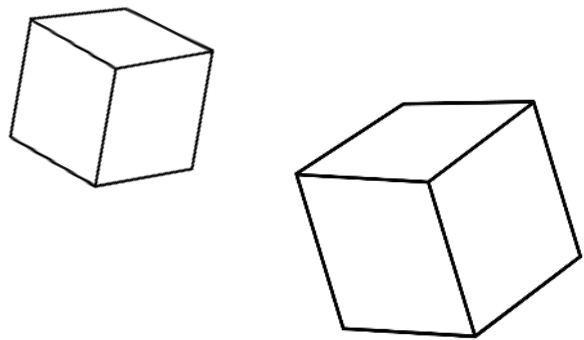


Хотя все значения находятся между 1 и 3, их порядок и расстояния различаются, значит геометрические фигуры дают разные длины.



Разные выражения вида «корень» приводят к разным числовым результатам: даже при похожем внешнем виде точные длины не совпадают.



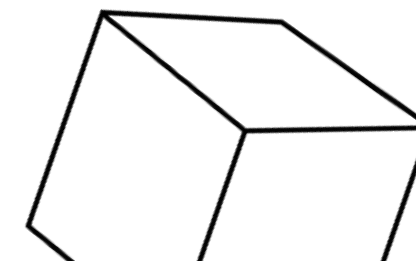
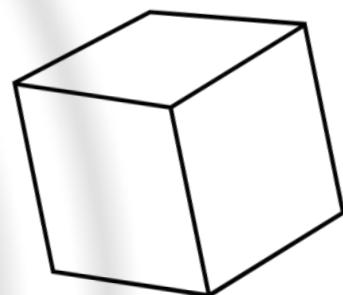


1,618033...

**Оно служит примером квадратичной
иррациональности, получаемой из корней
квадратного уравнения.**

Число $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ удовлетворяет уравнению $x^2 - x - 1 = 0$ и связано с правильным пятиугольником и пентаграммой, где части соотносятся по принципу «отношение одинаковое».

Определение φ через квадратный корень и его уравнение $x^2 - x - 1 = 0$.



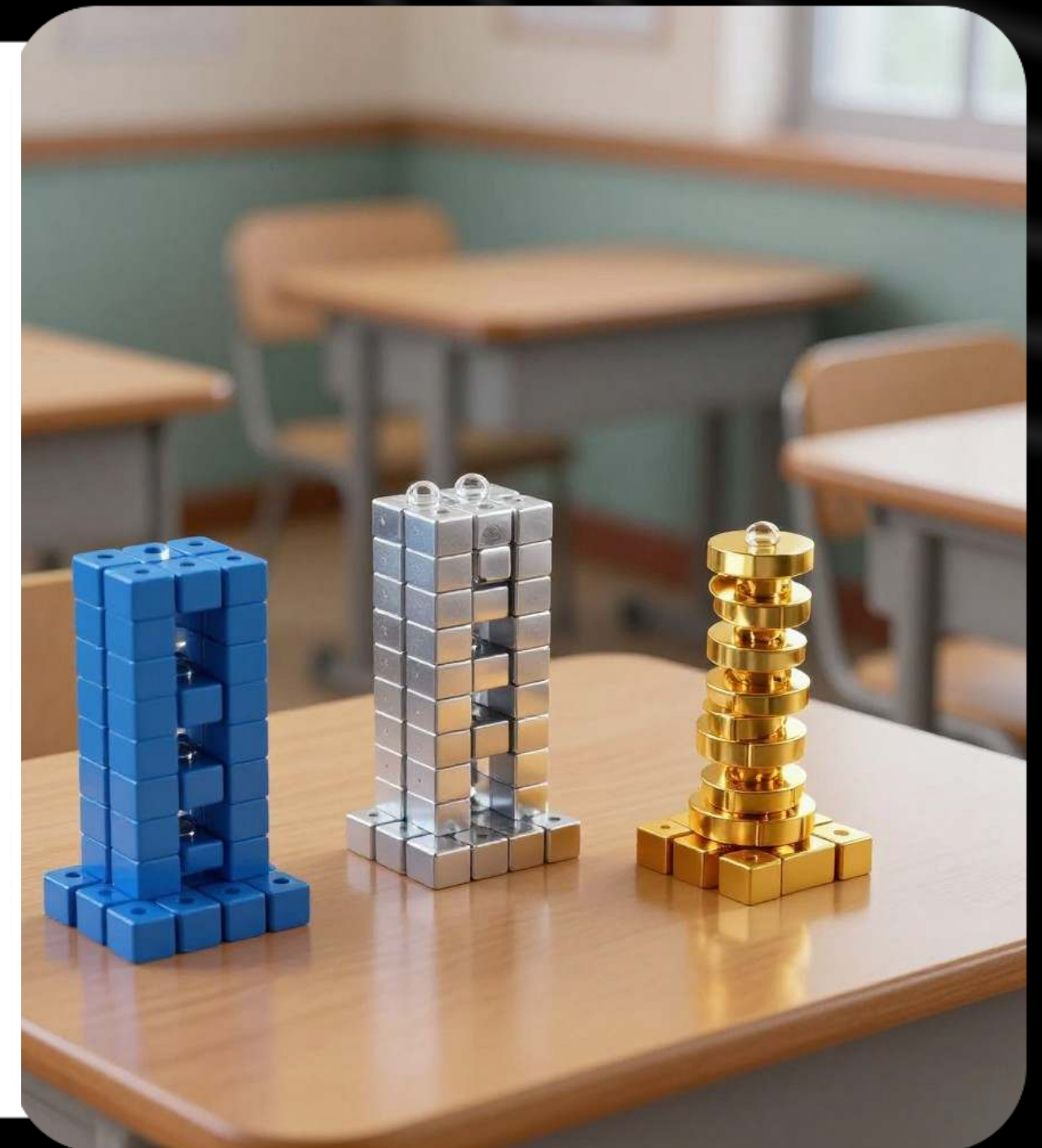
Периодическая запись и примеры чисел

Бесконечные, но непериодические десятичные дроби

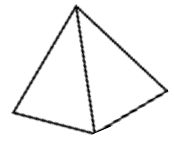
Десятичная запись квадратичных иррациональностей бесконечна и непериодична: $\sqrt{2}=1,414213\dots$, $\sqrt{3}=1,732050\dots$, $\varphi=1,618033\dots$. Поэтому их нельзя точно записать конечным десятичным числом.

Короткий повтор в цепных дробях

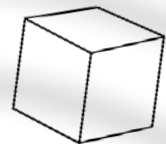
При этом у них есть другой «узнаваемый» признак: их цепные дроби содержат повторяющийся шаблон. Например, $\sqrt{2}=[1; 2, 2, 2, \dots]$, а $\varphi=[1; 1, 1, 1, \dots]$.



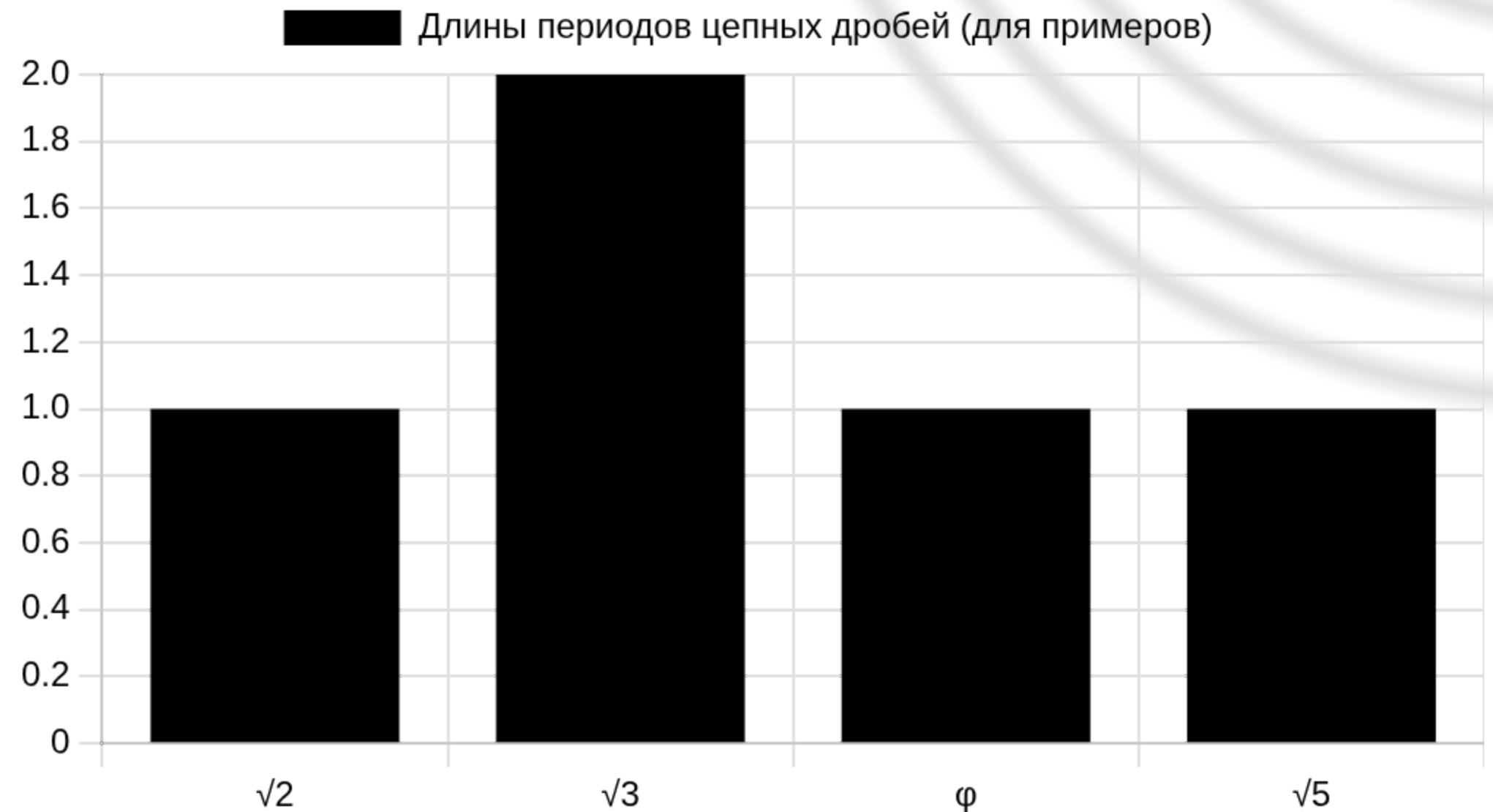
Повторяющиеся цепные дроби у разных чисел



У квадратичных иррациональностей цепная дробь становится периодической: даже при разной форме корня период может быть очень коротким и всё равно повторяется.



Сравнение периодов показывает: общая «повторяемость» возникает не случайно, а связана с тем, что каждое такое число удовлетворяет уравнению второй степени.



Примеры периодов для $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и φ (по известным свойствам периодических цепных дробей для квадратичных иррациональностей).

Связь с квадратными уравнениями

1

Если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ с целыми коэффициентами имеет дискриминант D , который не является точным квадратом, то корни нельзя записать дробью — они иррациональны.

2

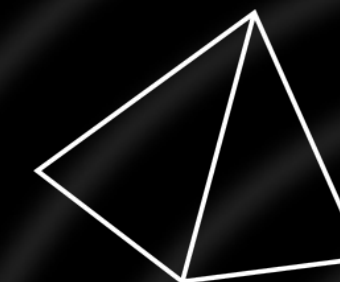
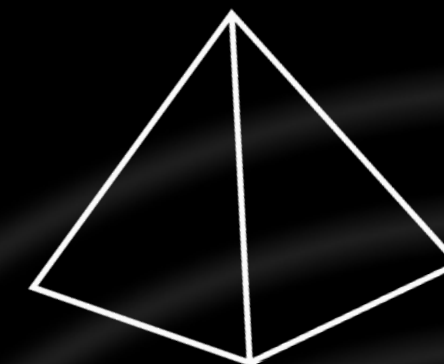
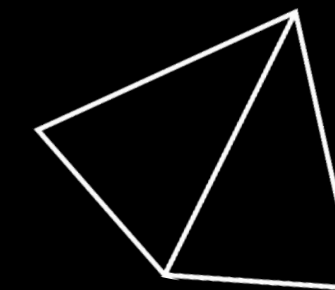
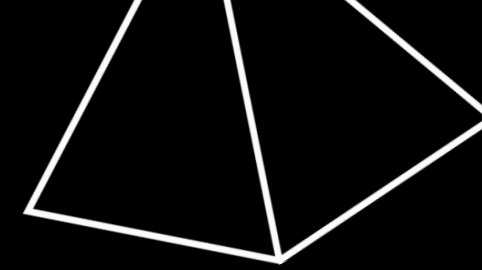
Уравнение $x^2-2=0$ даёт корни $\pm\sqrt{2}$, потому что $D=8$ не является квадратом целого числа; аналогично уравнение $x^2-x-1=0$ даёт корни $(1\pm\sqrt{5})/2$.

3

В школьной геометрии такие корни появляются, когда длину находят через формулы с квадратами: диагонали, высоты и гипотенузы часто приводят к уравнениям вида $x^2=k$.

4

Когда же корень получается выражением с квадратным корнем, это почти всегда «подсказка»: число относится к квадратичным иррациональностям и решается через квадратное уравнение.



Примеры уравнений и геометрических длины

Уравнение	Корни	Геометрическая величина
$x^2-2=0$	$\pm\sqrt{2}$	диагональ квадрата (стор. 1)
$x^2-3=0$	$\pm\sqrt{3}$	высота равностор. треугольника (стор. 2)
$x^2-5=0$	$\pm\sqrt{5}$	гипотенуза (катеты 1 и 2)
$x^2-x-1=0$	$(1\pm\sqrt{5})/2$	число ϕ и его сопряжённое

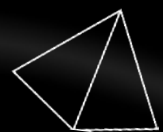
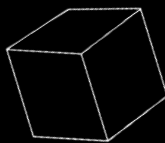


Таблица показывает, как одно и то же квадратное уравнение связывает корни со знакомыми геометрическими отрезками: квадратным корнем выражается конкретная длина.



В каждом примере одно уравнение даёт два связанных корня, что соответствует двум направлениям отрезка (плюс/минус) и помогает «узнать» длину по алгебраической форме.

Данные следуют из стандартных формул: теорема Пифагора и решение квадратных уравнений.

Сопряжённые числа

1

Часто квадратичная иррациональность записывается как $(a+\sqrt{b})/c$. Вместе с ней естественно рассматривают число $(a-\sqrt{b})/c$ — оно называется сопряжённым и связано с тем же уравнением.

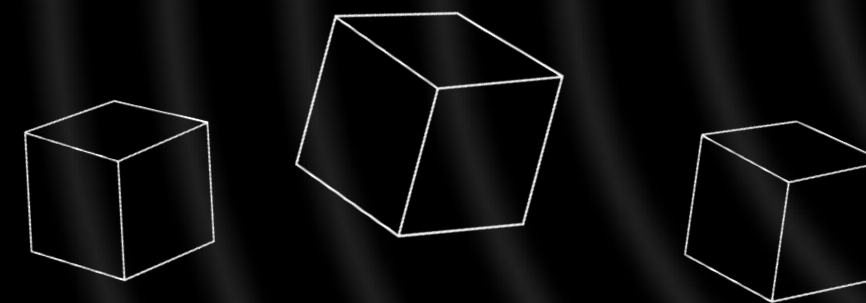
2

Сумма и произведение сопряжённых значений нередко оказываются рациональными. Именно поэтому выражения упрощаются: квадратный корень «исчезает» при сложении или умножении.

3

Например, для φ и $1-\varphi$ сумма равна 1, а произведение — -1 . Такое свойство используют при преобразованиях и проверке, что число действительно является корнем квадратного уравнения.

Где квадратичные иррациональности встречаются в геометрии



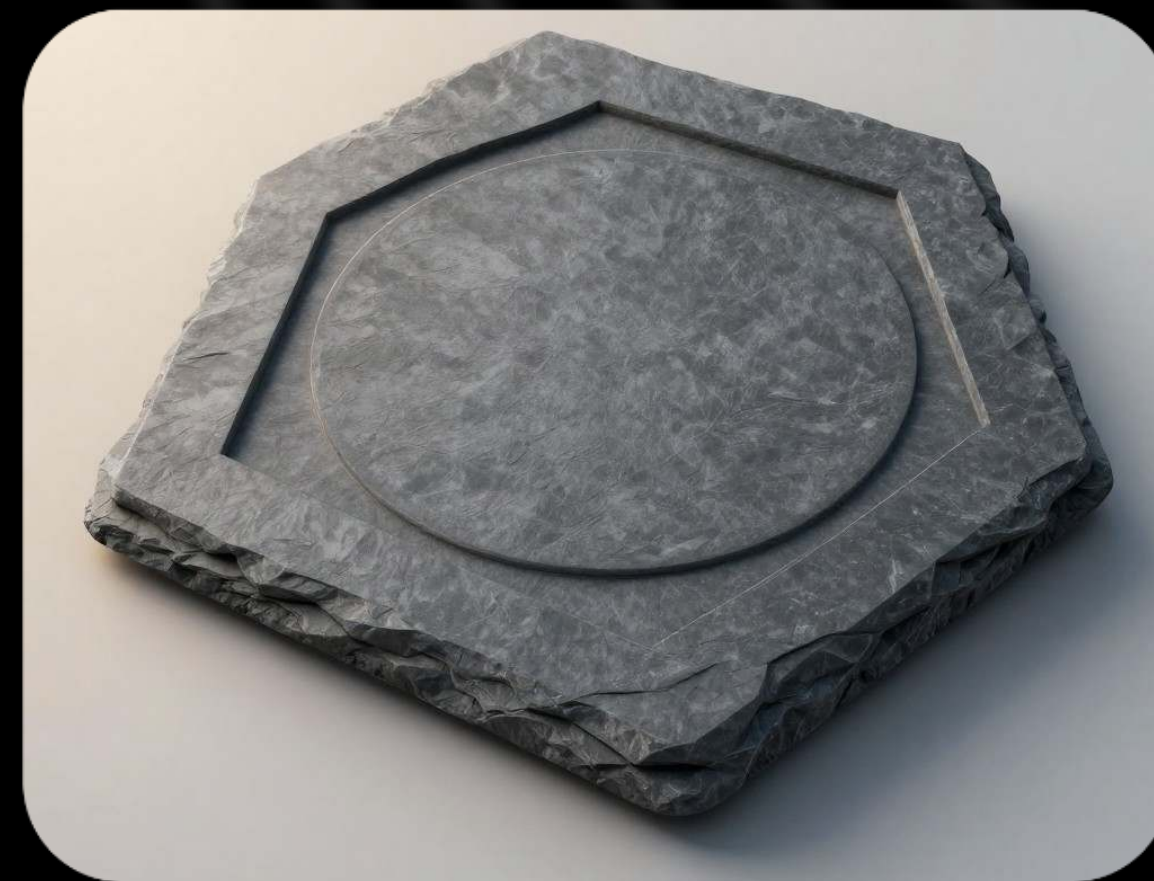
Диагональ квадрата: $\sqrt{2}$ как «точная» длина

Представьте квадрат со стороной 1: при построении диагонали треугольник делится на два прямоугольных. Применяем теорему Пифагора — и появляется $\sqrt{2}$. Этот момент хорошо показывает, что длина может быть точной, но не рациональной.



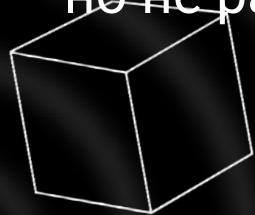
Высота равностороннего треугольника: $\sqrt{3}$ рождается при делении фигуры

В равностороннем треугольнике со стороной 2 высота делит его на два прямоугольных треугольника одинакового вида. Катеты становятся 1, а гипотенуза — 2. По Пифагору высота оказывается $\sqrt{3}$ — компактно и без округлений.



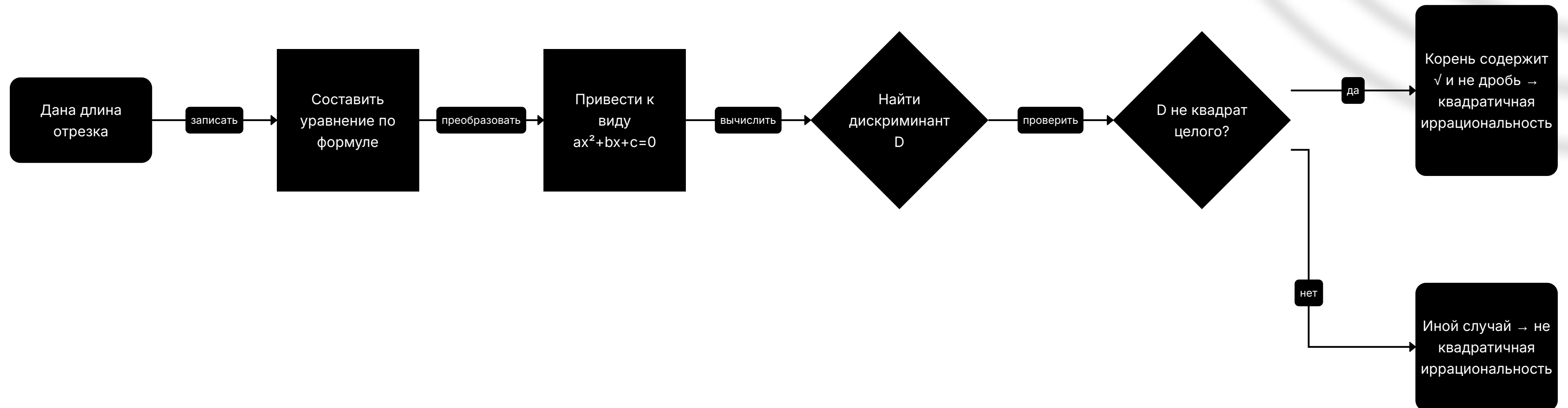
Правильный пятиугольник: ϕ связывает симметрию и уравнение второй степени

Правильный пятиугольник подсказывает золотое сечение: отношение частей повторяется при построениях «пятиугольник внутри пятиугольника». Через алгебру получается уравнение для ϕ , а затем появляется $\sqrt{5}$ в формуле. Поэтому фигура превращается в понятный пример квадратичной иррациональности.

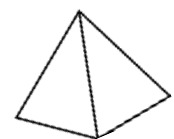


Проверка геометрической длины на принадлежность к квадратичным иррациональностям

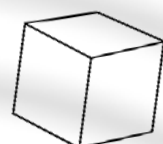
Логика: из геометрической формулы получаем квадратное уравнение, затем смотрим на дискриминант и форму корня.



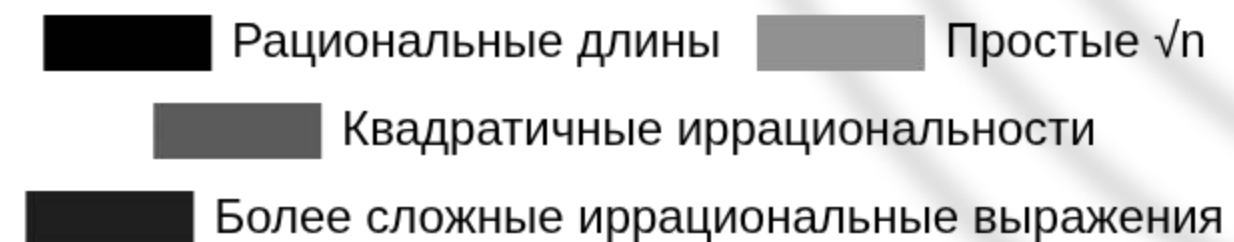
Какие числа чаще всего встречаются в задачах



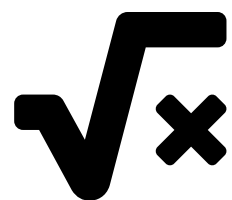
В типовых заданиях по геометрии с уравнениями второй степени особенно часто появляются $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и число φ . Они дают знакомые формулы и не требуют округлений.



Если ориентироваться на примеры из школьных тем, то квадратичные иррациональности оказываются самой «рабочей» группой: они быстро возникают из теоремы Пифагора и отношений фигур.



Почему их удобно изучать отдельно



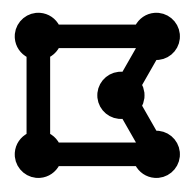
Точные формулы вместо округления

Каждое квадратичное иррациональное число выражается через корень и связано с квадратным уравнением. Поэтому в задачах можно работать точно и получать ответы без «приблизительных» чисел.



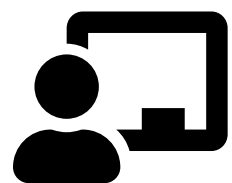
Сравнивать и упрощать выражения

Поскольку число — корень второго уравнения, его можно подставлять в формулы и упрощать. Часто появляются сопряжённые значения, и лишний $\sqrt{}$ сокращается при вычислениях.



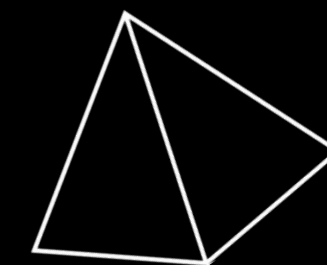
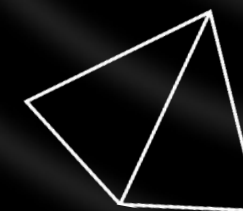
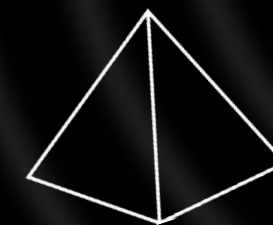
Непосредственная связь с фигурами

Эти числа естественно получаются при диагоналях, высотах, гипотенузах и отношениях в правильных многоугольниках. Геометрический смысл помогает запоминать и понимать формулы.



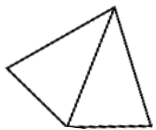
Подходит для задач на построения

Квадратичные иррациональности можно находить как длины, которые «точно» подходят под условия построения. Это удобно на уроках, где требуется доказать равенство или вычислить отрезок.

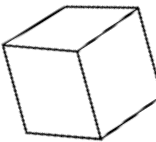


Памятка по основным свойствам

Свойство	Как запомнить
Не дробь	корень нельзя представить отношением целых
Корень квадратного уравнения	$ax^2+bx+c=0$, a,b,c — целые
Часто вид $a\pm\sqrt{b}$ или $(a\pm\sqrt{b})/c$	появляется после решения уравнения
Есть сопряжённая пара	$(a-\sqrt{b})/c$ к $(a+\sqrt{b})/c$
Связь с геометрией	длины, отношения отрезков, теорема Пифагора



Короткая таблица сводит главные признаки квадратичных иррациональностей, чтобы их можно было узнавать и применять прямо в геометрических задачах.



Главный вывод: это не просто «числа с корнем», а выделенная группа, которая регулярно возникает в геометрии 8 класса и поддаётся проверке через квадратное уравнение.

Итог: геометрия и числа с корнем

Квадратичные иррациональности — это иррациональные числа, связанные с квадратными уравнениями и корнями второй степени. В школьной геометрии они проявляются в диагоналях, высотах, гипотенузах и отношениях. Примеры: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и φ .