

A wooden geometric model of a regular polygon, likely a hexagon, is shown. The model is constructed from light-colored wood. A central point is connected to each of the six vertices by thin white lines, dividing the polygon into six congruent triangles. A vertical line segment, representing the apothem, extends from the center to the midpoint of one of the sides. The entire model is set against a blurred background of a classroom with desks and chairs. The text is overlaid on the image in white.

Площадь правильного многоугольника: от разбиения на треугольники к формуле

Одна идея для разных фигур: периметр и апофема.

Зачем изучать площадь правильных многоугольников

Эта тема показывает, как геометрия помогает измерять плитку, орнаменты и другие повторяющиеся формы, а ещё учит связывать свойства фигуры с удобной формулой площади.



Что называют правильным многоугольником

Равные стороны

У правильного многоугольника все стороны одинаковой длины, поэтому его контур выглядит аккуратно и симметрично. Такое свойство упрощает измерения и делает фигуру удобной для расчётов.

Равные углы

Все внутренние углы у такой фигуры тоже равны. Благодаря этому многоугольник сохраняет одинаковый вид при любом повороте вокруг центра и легко делится на равные части.

Примеры фигур

К правильным многоугольникам относятся равносторонний треугольник, квадрат, правильный пятиугольник, шестиугольник и другие фигуры, у которых совпадают длины сторон и величины углов.

Чем больше сторон

Если число сторон увеличивается, контур становится всё более плавным и визуально приближается к окружности. Поэтому многие большие правильные многоугольники напоминают почти круглую фигуру.

Основные элементы, которые нужны для нахождения площади



Периметр P

Периметр — это сумма длин всех сторон фигуры. Для правильного многоугольника его удобно находить, если известны длина одной стороны и число сторон.



Сторона b

Сторона — это длина одного ребра правильного многоугольника. Все стороны равны, поэтому достаточно измерить одну и умножить её на число сторон.



Апофема a

Апофема — это отрезок от центра, проведённый перпендикулярно к стороне. Она одинаковая для всех сторон и помогает найти площадь фигуры.

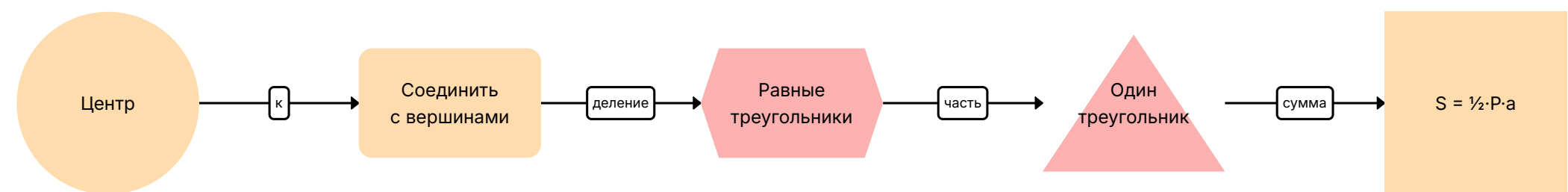


Число сторон n

Число сторон показывает, на сколько одинаковых треугольников можно разделить фигуру, если соединить центр с её вершинами. Это важно для вывода формулы площади.

Как получают формулу площади правильного многоугольника

Построение начинается с центра
фигуры и приводит к сумме
площадей равных треугольников.



$$1/2$$

множитель показывает, что
площадь одного
треугольника равна
половине произведения
основания на высоту.

Именно этот коэффициент появляется
в формуле площади правильного
многоугольника, потому что фигура
складывается из равных
треугольников.

*Формула площади треугольника и разбиение
правильного многоугольника на равные части*

Апофема на чертеже правильного многоугольника

Перпендикуляр к стороне

Апофема проводится из центра прямо к стороне под углом 90 градусов. Поэтому она помогает измерять высоту одинаковых треугольников внутри правильного многоугольника.

Связь с центром

На чертеже апофема всегда выходит из центра фигуры. Это удобно: одна и та же линия показывает расстояние от центра до каждой стороны.

Меньше радиуса

Апофема короче радиуса, проведённого к вершине, потому что она заканчивается не в вершине, а на стороне. Эти отрезки служат разным целям.

Помощь в вычислениях

Именно апофема входит в формулу площади, поэтому без неё нельзя быстро найти ответ в задачах на правильные многоугольники с известным периметром.



Фигура	Апофема	Площадь
Квадрат	3 см	36 см ²
Прав. шестиугольник	3,46 см	41,6 см ²
Прав. восьмиугольник	3,62 см	43,4 см ²

Сравнение площадей фигур с одинаковым периметром

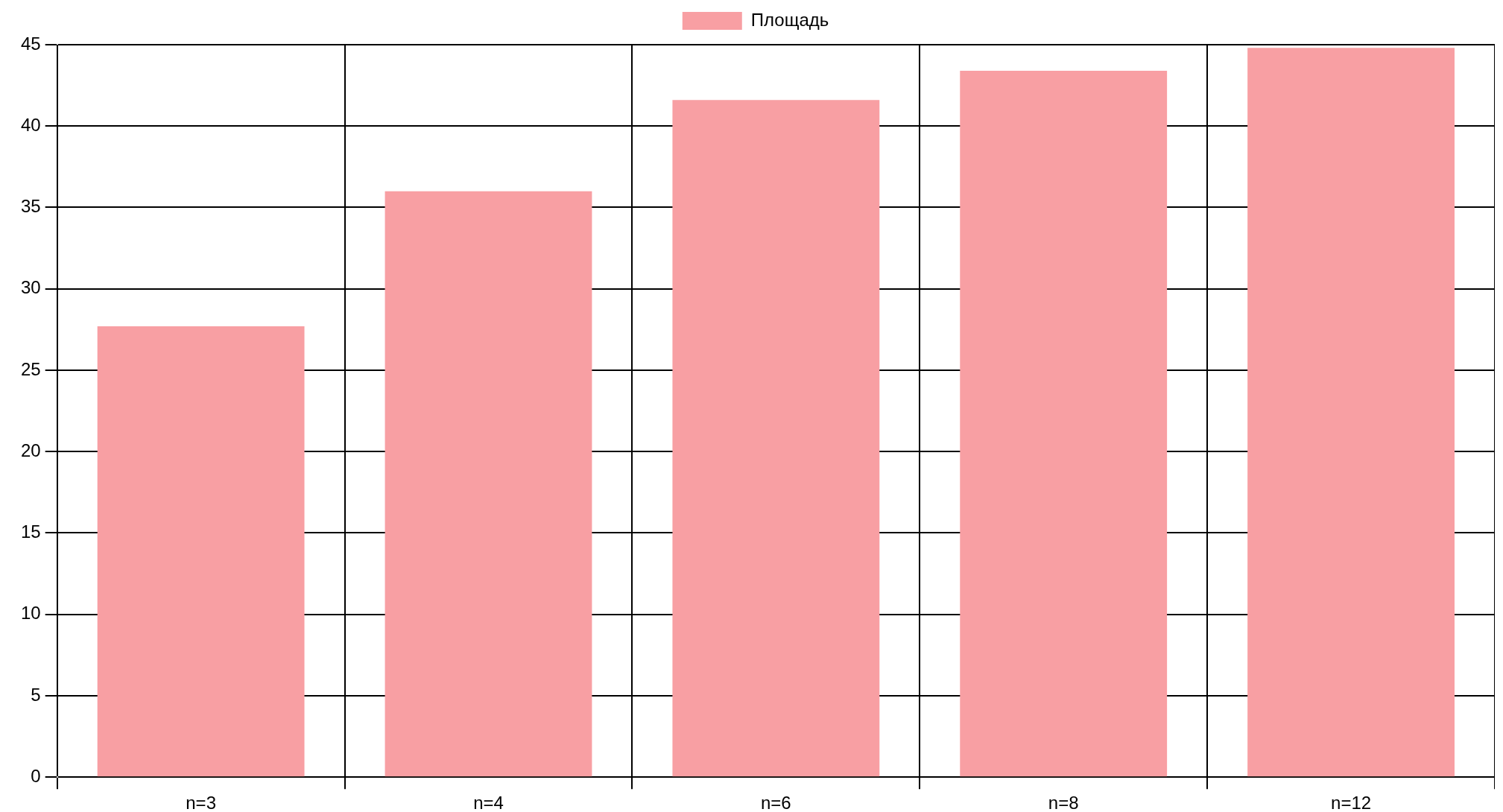
Все фигуры имеют одинаковый периметр 24 см, но их площади различаются из-за числа сторон и длины апофемы.

При одинаковом периметре площадь обычно растёт с увеличением числа сторон, потому что апофема становится больше.

Изменение площади при увеличении числа сторон

На диаграмме показаны фигуры с одним и тем же периметром 24 см, поэтому сравнение отражает только влияние формы, а не размера сторон.

Чем больше сторон, тем больше площадь при том же периметре: контур становится ближе к окружности.



Расчёты по формуле $S = P^2 / (4n \cdot \operatorname{tg}(\pi/n))$ для $P = 24$ см

Пример вычисления площади правильного шестиугольника

Найдём периметр

01

У правильного шестиугольника шесть равных сторон. Если каждая сторона равна 5 см, то периметр составляет $6 \cdot 5 = 30$ см.

Вычислим площадь

03

По формуле $S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot a$ получаем $S = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 4,3 = 64,5$ см². Это и есть искомый ответ.

Подставим апофему

02

Апофема равна 4,3 см. Теперь можно использовать основную формулу площади правильного многоугольника и подставить известные значения без лишних преобразований.

Проверим единицы

04

Длины сторон и апофемы измеряются в сантиметрах, а площадь обязательно записывается в квадратных сантиметрах. Эта проверка помогает избежать ошибки в ответе.

Связь площади с радиусом описанной окружности

Вершины на окружности

Все вершины правильного многоугольника лежат на одной окружности. Её радиус называют радиусом описанной окружности и обозначают буквой R .

Два полезных отрезка

В одной задаче часто нужны и R , и апофема. Радиус связан с вершинами, а апофема — со стороной, поэтому они помогают находить разные неизвестные.

Центр и стороны

Если соединить центр с вершинами, появятся равные радиусы и одинаковые треугольники. Они помогают увидеть, как устроена фигура изнутри.

Из каких частей состоит площадь правильного многоугольника

Чем больше сторон у правильного многоугольника, тем больше одинаковых треугольников образуется при соединении центра с вершинами.

Все части равны по форме и площади, поэтому общая площадь удобно выражается через количество сторон.

3 стороны 4 стороны 6 сторон 8 сторон 12 сторон



Геометрическая модель разбиения правильного многоугольника на равные треугольники

Где встречается правильный шестиугольник



Пчелиные соты

Шестиугольники в сотах позволяют пчёлам использовать пространство очень экономно. Такие ячейки плотно прилегают друг к другу и образуют прочную, упорядоченную структуру, которую удобно изобразить и как реальный объект, и как геометрическую схему.



Техника и орнамент

Шестиугольная форма встречается в головках гаек, мозаике и декоративных покрытиях. Она выглядит аккуратно и помогает равномерно заполнять плоскость без заметных промежутков, поэтому часто используется там, где важны и прочность, и красивый рисунок.

Обозначения в задачах на площадь

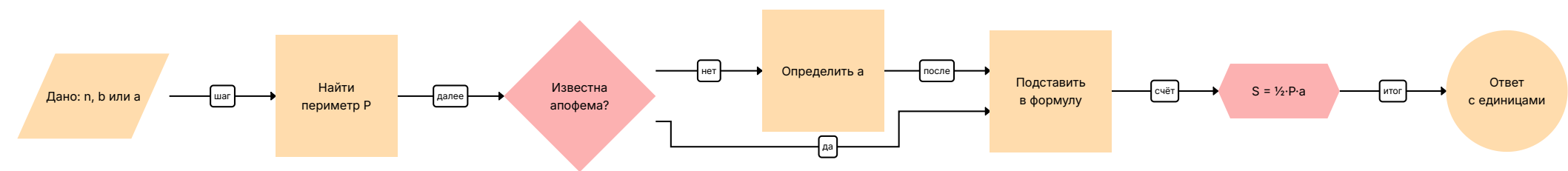
Эти обозначения помогают быстро записывать известные величины и сразу применять нужную формулу.

Периметр и апофема — главные величины для вычисления площади правильного многоугольника.

Обозначение	Что означает	Связь
P	периметр	$P = n \cdot b$
a	апофема	$S = \frac{1}{2} \cdot P \cdot a$
S	площадь	в см ² , м ²

Как решать задачи на площадь правильного многоугольника

Последовательность действий при вычислении площади по данным стороны, числа сторон и апофемы

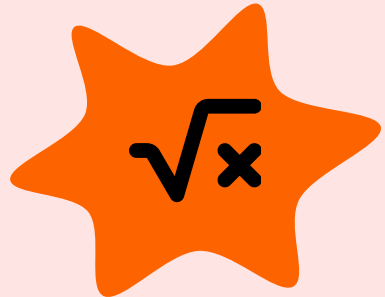


Типичные ошибки при решении задач



Путают апофему и радиус

Апофема идёт перпендикулярно стороне, а радиус соединяет центр с вершиной. Если перепутать эти отрезки, формула даст неверный результат, даже когда вычисления выполнены аккуратно.



Берут не тот периметр

В формулу нужно подставлять весь периметр, а не длину одной стороны. Если забыть умножить сторону на число сторон, площадь получится заметно меньше правильной.



Забывают про квадратные единицы

Площадь нельзя записывать в сантиметрах или метрах без квадрата. После вычислений обязательно указывают см^2 , м^2 или мм^2 , иначе ответ оформлен неверно.



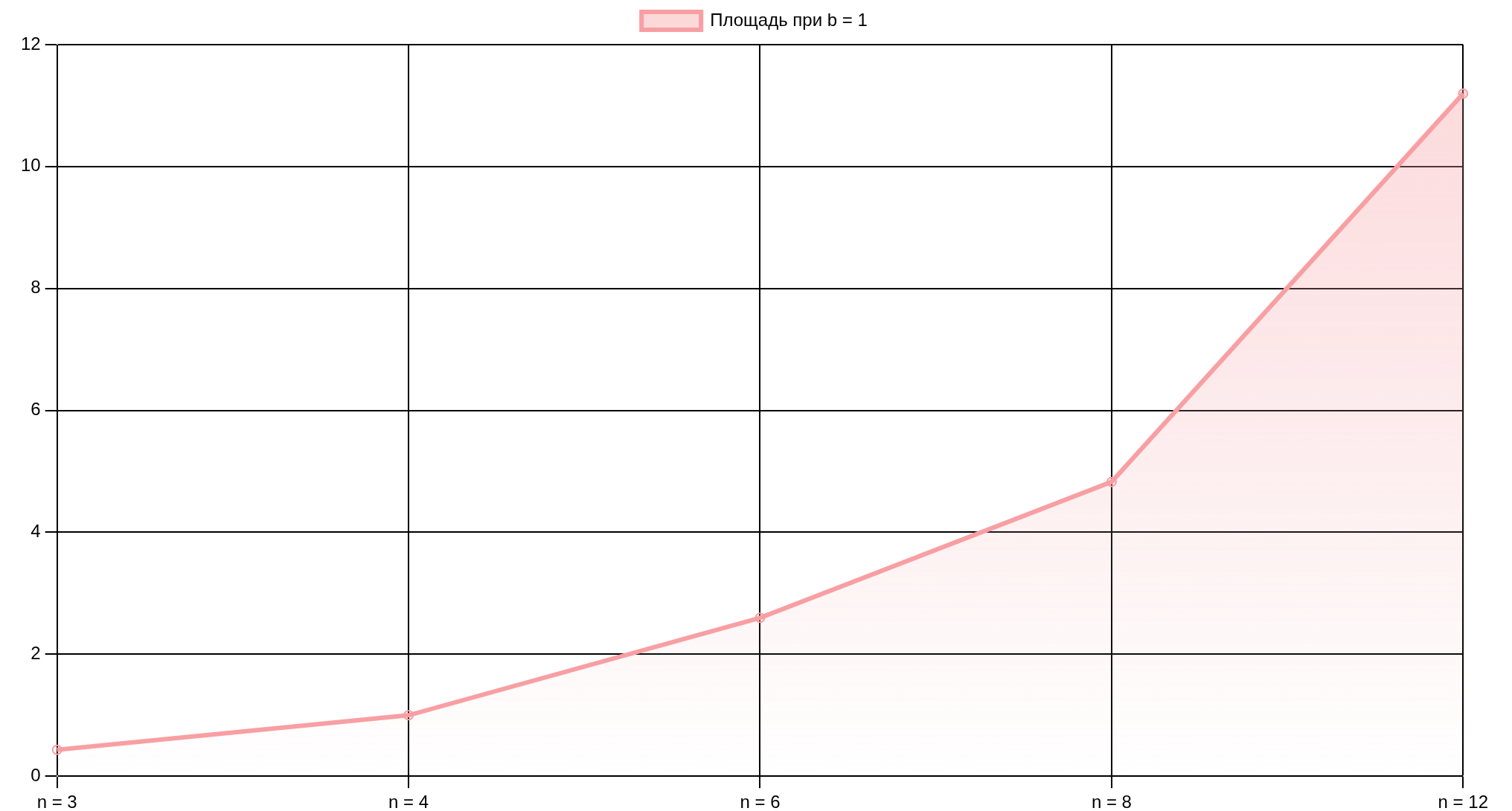
Рано округляют числа

При промежуточных вычислениях лучше сохранять больше знаков после запятой. Слишком раннее округление может изменить конечный ответ и привести к ошибке в задаче.

Как меняется площадь при одной и той же стороне

Здесь сравниваются правильные многоугольники с одинаковой стороной 1. Формула площади показывает, как влияет только число сторон.

При росте n площадь увеличивается: фигура лучше приближается к кругу и охватывает больше внутреннего пространства.



Расчёт по формуле $S = n \cdot b^2 / (4 \cdot \operatorname{tg}(\pi/n))$, при $b = 1$

Где используется формула правильного многоугольника

Плитка и покрытия

Формула помогает считать площадь пола, фрагментов облицовки и декоративных вставок. Это удобно, когда поверхность состоит из одинаковых фигур с чёткими сторонами и углами.

01

02

Клумбы и участки

В ландшафтном дизайне правильные многоугольники используют для клумб, грядок и разметки участков. Расчёт площади подсказывает, сколько земли, семян или покрытия понадобится.

03

Детали техники

Шестигранные и восьмигранные элементы встречаются в гайках, крышках и некоторых крепёжных деталях. Знание площади помогает оценить размер поверхности и количество материала.

04

Орнаменты и дизайн

При создании узоров формула позволяет заранее определить, какую часть плоскости займёт рисунок. Это важно для точной компоновки и равномерного распределения элементов.



2

величины — периметр
и апофема — достаточно,
чтобы найти площадь
правильного
многоугольника.

Именно эти данные напрямую входят в формулу, поэтому важно не перепутать их с радиусом и не забыть о квадратных единицах ответа.

*Свойства правильного многоугольника
и формула площади*

Формула, которая работает для разных фигур

Площадь правильного многоугольника удобно находить одним способом: через периметр и апофему. Эта идея подходит для треугольника, квадрата, шестиугольника и других правильных фигур.