

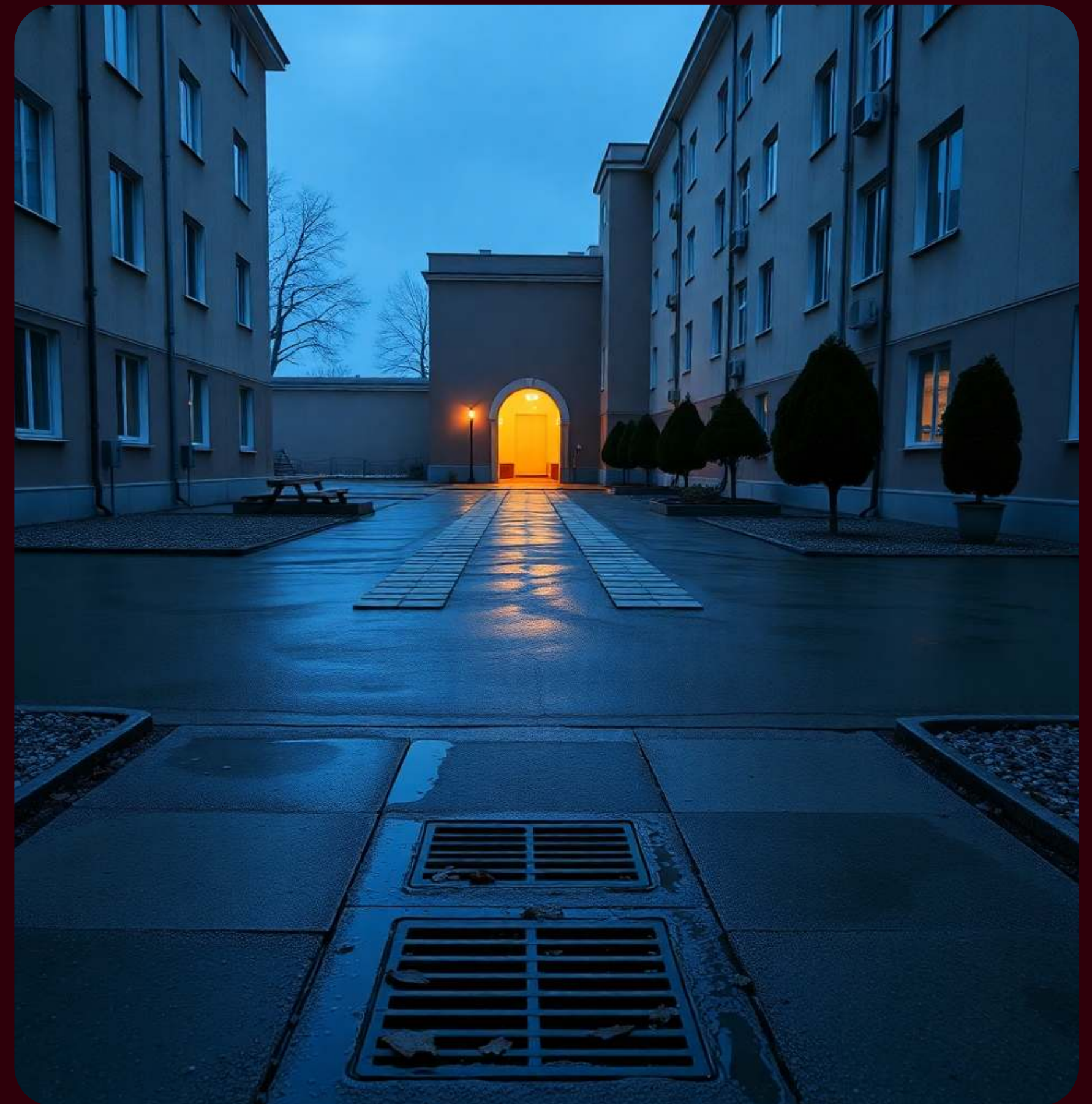


Как бесконечность приводит к точному числу.

Предел последовательности

Зачем изучать предел в 11 классе

Эта тема завершает школьную алгебру и открывает язык анализа. Здесь уже нужны уверенное владение дробями, степенями и функциями, чтобы понимать, как выражения ведут себя при больших n и чем приближение отличается от равенства.



Ключевые свойства числовой последовательности

$f(x)$ Последовательность как функция

Каждому натуральному номеру n соответствует свой член a_n . Именно поэтому последовательность удобно рассматривать как правило, которое по номеру однозначно задаёт число и позволяет изучать её поведение поэтапно.



Разные типы поведения

Последовательности могут возрастать, убывать, оставаться ограниченными, повторять значения или колебаться. Эти различия особенно заметны при больших n , когда становится видно общее направление изменения, а не отдельные случайные члены.

$\sqrt{x}$ Примеры в записи

Последовательности $1/n$, $(-1)^n$ и $(n^2+1)/(2n^2)$ показывают разные модели: стремление к нулю, колебания и приближение к постоянному числу. Такие примеры помогают сравнивать поведение по общей формуле.



Почему важны большие номера

Главная идея состоит в том, что закон последовательности раскрывается не в первых членах, а при больших n . Именно там можно увидеть, есть ли устойчивое приближение к числу или предел отсутствует.

Интуитивное приближение к пределу



Близость без совпадения

Последовательность может становиться сколь угодно близкой к числу L , даже если ни один её член не равен ему. Это и составляет интуитивный смысл предела.

Классический пример

В последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ значения всё меньше и со временем неотличимо близки к нулю. Поэтому её предел равен 0, хотя ноль не встречается среди членов.

Что видно на схеме

На числовой прямой удобно показать точку L и несколько значений a_n , которые с ростом номера располагаются всё ближе к ней. Такая картина делает идею предела наглядной.

Строгое определение предела последовательности

01 Задаём точность

Пусть выбрано любое число ε больше нуля. Оно показывает, насколько близко к L должны лежать члены последовательности, чтобы считаться достаточно близкими.

02 Находим номер N

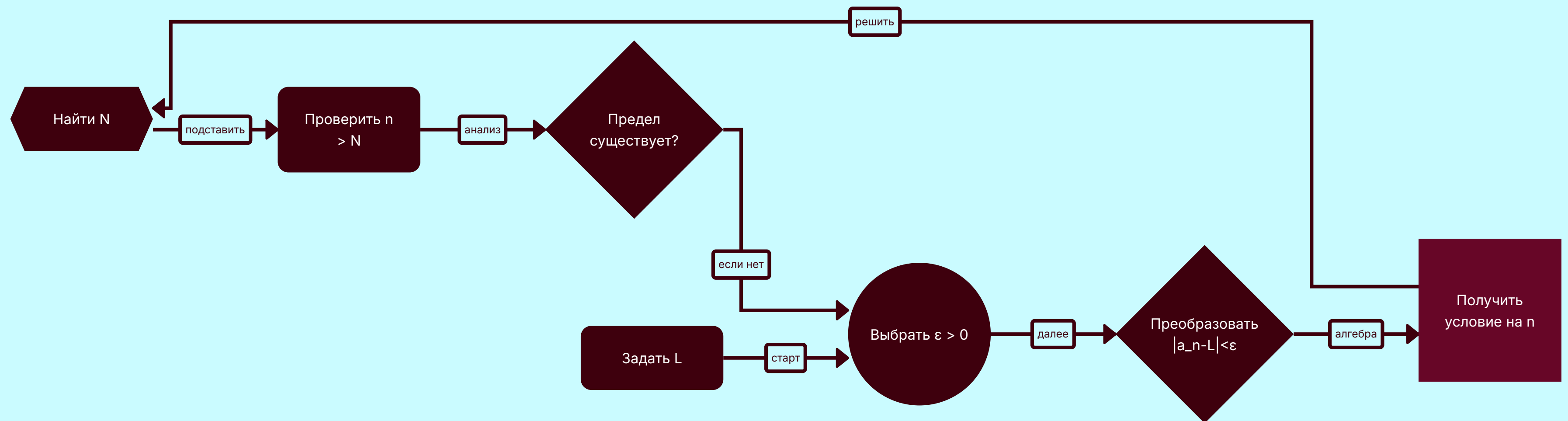
Нужно указать такой номер N , что все члены с номерами $n > N$ попадут в ε -окрестность числа L . Важен не один удачный член, а устойчивое поведение после некоторого места.

03 Формулируем вывод

Если для любого ε можно подобрать подходящий N , то последовательность имеет предел L . Это определение описывает не случайные значения, а закономерность всей последовательности.

Как проверяют предел по определению

Пошаговая схема работы с неравенством $|a_n - L| < \varepsilon$



Поведение нескольких последовательностей

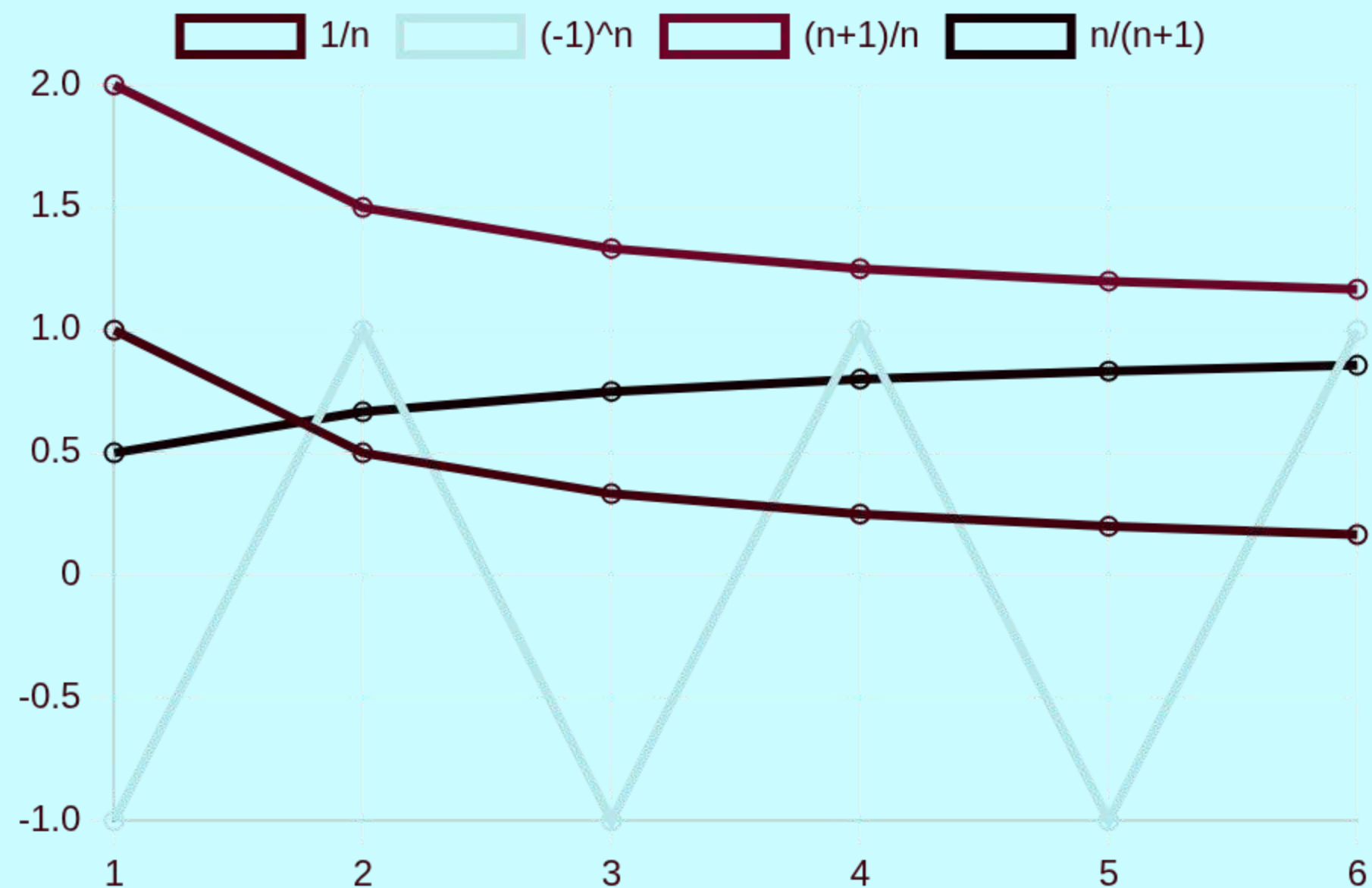


График сравнивает убывание, колебания и приближение к одному числу. Он помогает увидеть различие между устойчивой сходимостью и повторяющимися изменениями.

$1/n$ стремится к 0, $(n+1)/n$ и $n/(n+1)$ — к 1, а $(-1)^n$ не имеет предела.



Сходящиеся и расходящиеся последовательности

- **Сходимость**

Сходящаяся последовательность имеет конечный предел. Это означает, что при достаточно больших номерах её члены оказываются сколь угодно близко к одному числу и больше не выходят за эту границу.

- **Расходимость к бесконечности**

Некоторые последовательности не приближаются к числу, а неограниченно возрастают. Пример n показывает движение к $+\infty$, то есть отсутствие конечного предела при сохранении общего направления роста.

- **Колебания без предела**

Последовательность $(-1)^n$ меняет значения 1 и -1 , поэтому не может закрепиться около одного числа. Даже если значения ограничены, это ещё не делает последовательность сходящейся.

- **Почему первые члены не доказывают сходимость**

Бывает, что несколько первых членов выглядят очень близкими к одному числу, но дальнейшие значения меняют картину. Предел определяют только по поведению всей последовательности при больших n .

Сравнение типичных последовательностей

Последовательность	Поведение	Предел
$1/n$	Убывает	0
$n/(n+1)$	Возрастает	1
$(-1)^n$	Колеблется	не имеет

Таблица показывает, как по виду последовательности можно определить её поведение и предел.

По виду формулы часто можно сразу распознать сходимость, колебания или рост без ограничения.

Составлено по базовым примерам школьного курса

Основные свойства предела

Единственность

01

У одной последовательности не может быть двух разных пределов. Если предел найден, он определён однозначно, что делает все дальнейшие вычисления строгими и непротиворечивыми.

Ограниченность

02

Любая сходящаяся последовательность обязательно ограничена. Это означает, что её члены не могут бесконечно уходить вверх или вниз, если они действительно приближаются к конечному числу.

Сумма и разность

03

Если $a_n \rightarrow A$ и $b_n \rightarrow B$, то сумма и разность тоже имеют предел: $a_n \pm b_n \rightarrow A \pm B$. Это одно из самых удобных правил для преобразований.

Произведение и частное

04

Для произведения выполняется $a_n b_n \rightarrow AB$. Для частного нужен ненулевой предел знаменателя: если $B \neq 0$ и b_n не обращается в ноль, то $a_n/b_n \rightarrow A/B$.

Практическое значение

05

Эти свойства позволяют вычислять пределы без прямого обращения к определению ε . Именно на них опирается большинство школьных способов решения задач по последовательностям.

Монотонность и ограниченность

Рост без выхода
за пределы

Если последовательность
возрастает и при этом
не превышает некоторого
числа сверху, её значения
не могут уходить бесконечно
далеко.

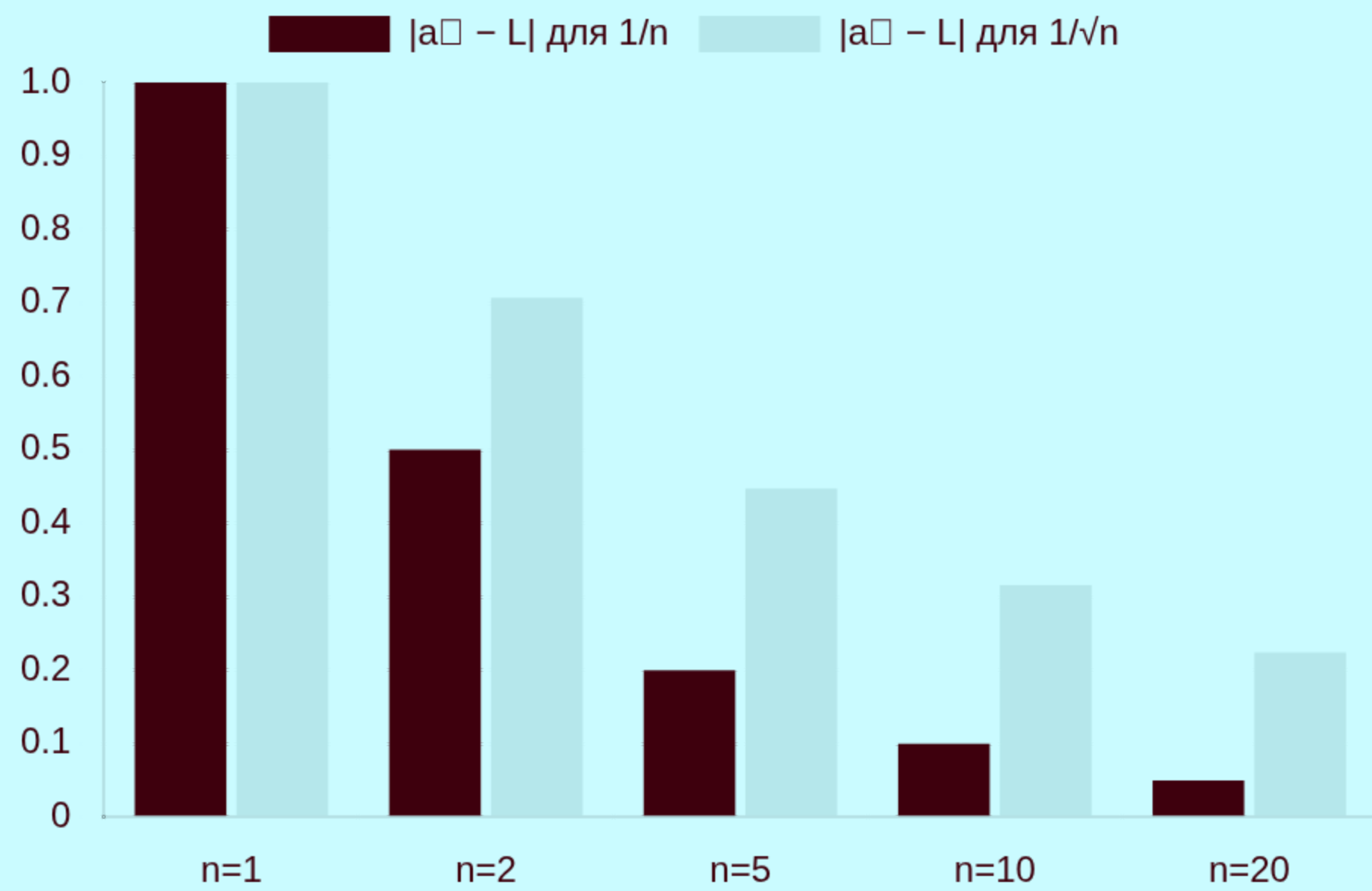
Убывание при нижней
границе

Если последовательность
убывает и остаётся выше
фиксированной нижней границы,
она также обязана иметь
предел.

Практический вывод

Такой признак особенно полезен
там, где формулу предела
трудно вычислить напрямую,
но поведение членов видно
по общему виду.

Как быстро уменьшается погрешность



Сравнение показывает не только приближение к пределу, но и различие скорости этого приближения для двух последовательностей.

Погрешность у $1/n$ уменьшается заметно быстрее, чем у $1/\sqrt{n}$; значит, одинаковая точность достигается при меньших n .

Вычислено по формулам $|a_n - L|$, где $L=0$; значения для $n=1,2,5,10,20$.

Алгебраические приёмы вычисления пределов

Деление на старшую степень

Для дробей с многочленами удобно делить числитель и знаменатель на наибольшую степень n . Это сразу показывает, какие слагаемые исчезают, а какие определяют конечный предел.

Разные степени — разный итог

Если степень числителя меньше степени знаменателя, дробь стремится к нулю. Когда степени равны, предел задаётся отношением старших коэффициентов после упрощения.

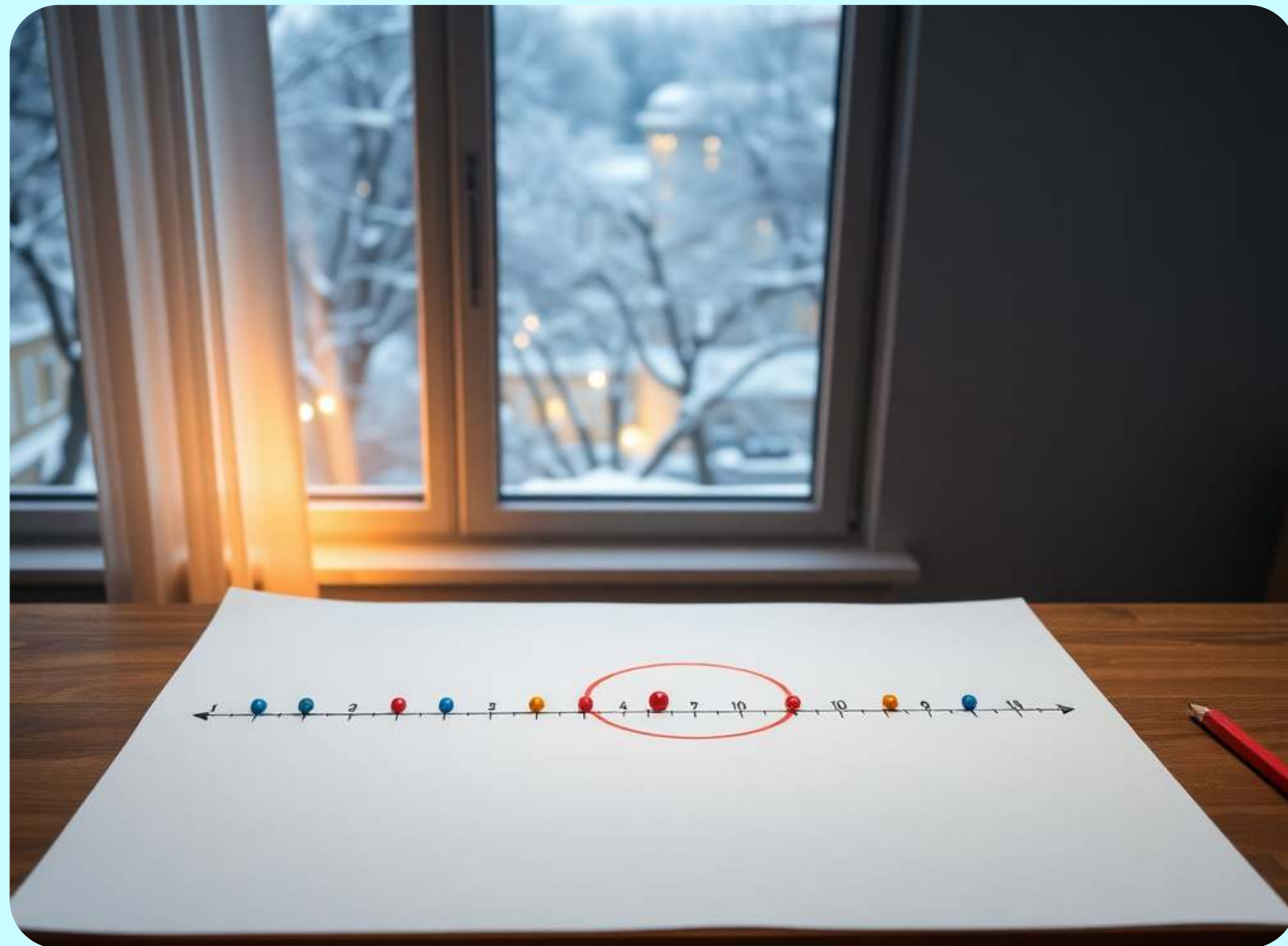
Случай более высокого числителя

Если степень числителя больше, выражение обычно не имеет конечного предела: значение либо растёт по модулю, либо становится неограниченным при больших n .

Проверка ответа

После преобразования полезно мысленно подставить большие значения n и убедиться, что полученный результат согласуется с общим поведением исходной последовательности.

Геометрический смысл на координатной прямой



01 Нанесение членов

Каждый член последовательности можно отметить точкой на координатной прямой. Тогда видно, как значения располагаются относительно предполагаемого предела и куда они смещаются при росте n .

02 Окрестность числа L

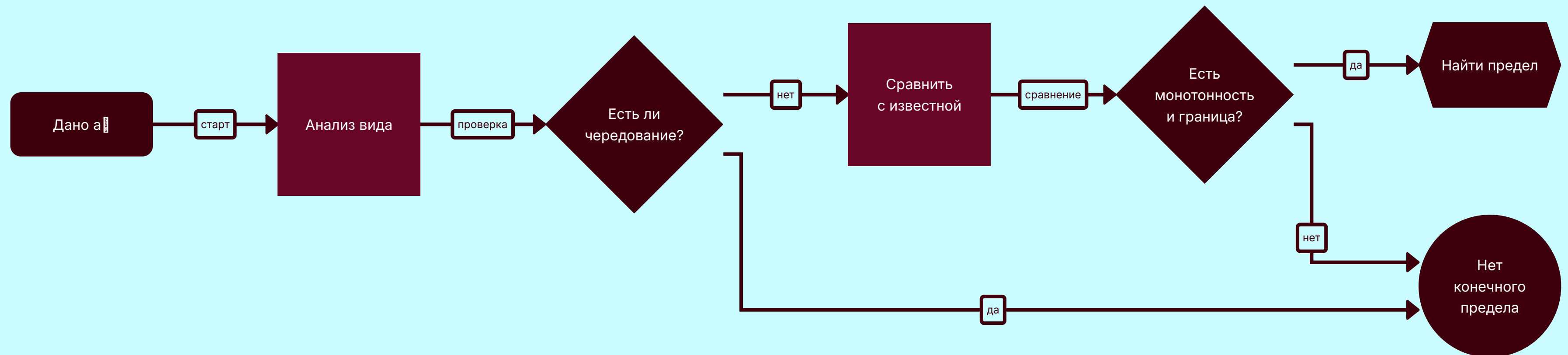
Предел понимают как число, вокруг которого можно построить сколь угодно узкую окрестность, и начиная с некоторого номера все члены последовательности попадут внутрь неё.

03 Смысл приближения

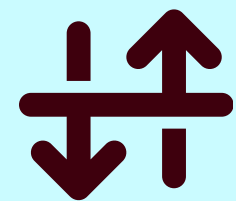
Если точки остаются внутри любой выбранной ε -окрестности, это означает устойчивое приближение к L , а не случайную близость отдельных первых значений.

Проверка предела: от вида выражения к выводу

Схема показывает последовательность действий при анализе последовательности и выборе подходящего признака сходимости.

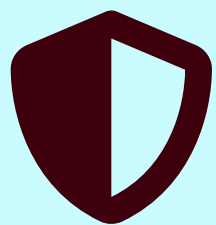


Теорема о двух милиционерах



Классический пример

Неравенство $-1/n \leq \sin n / n \leq 1/n$ позволяет сразу сделать вывод о стремлении $\sin n / n$ к нулю, не вычисляя сложное выражение напрямую.



Идея зажатия

Если последовательность заключена между двумя другими и обе границы стремятся к одному числу, то и средняя последовательность вынуждена стремиться к нему же.



Когда применяется

Теорема особенно полезна, когда точный предел трудно найти, но можно оценить последовательность сверху и снизу более простыми выражениями.



Типичные ошибки при работе с пределами

- **Вывод по первым членам**

Нельзя решать по нескольким первым значениям. Даже если последовательность сначала кажется близкой к числу, дальнейшие члены могут изменить её поведение и показать отсутствие предела.

- **Неосторожное сокращение**

Сокращать выражение можно только тогда, когда это не меняет область определения. Иначе можно потерять важные значения и получить неверный результат.

- **Путаница с функцией**

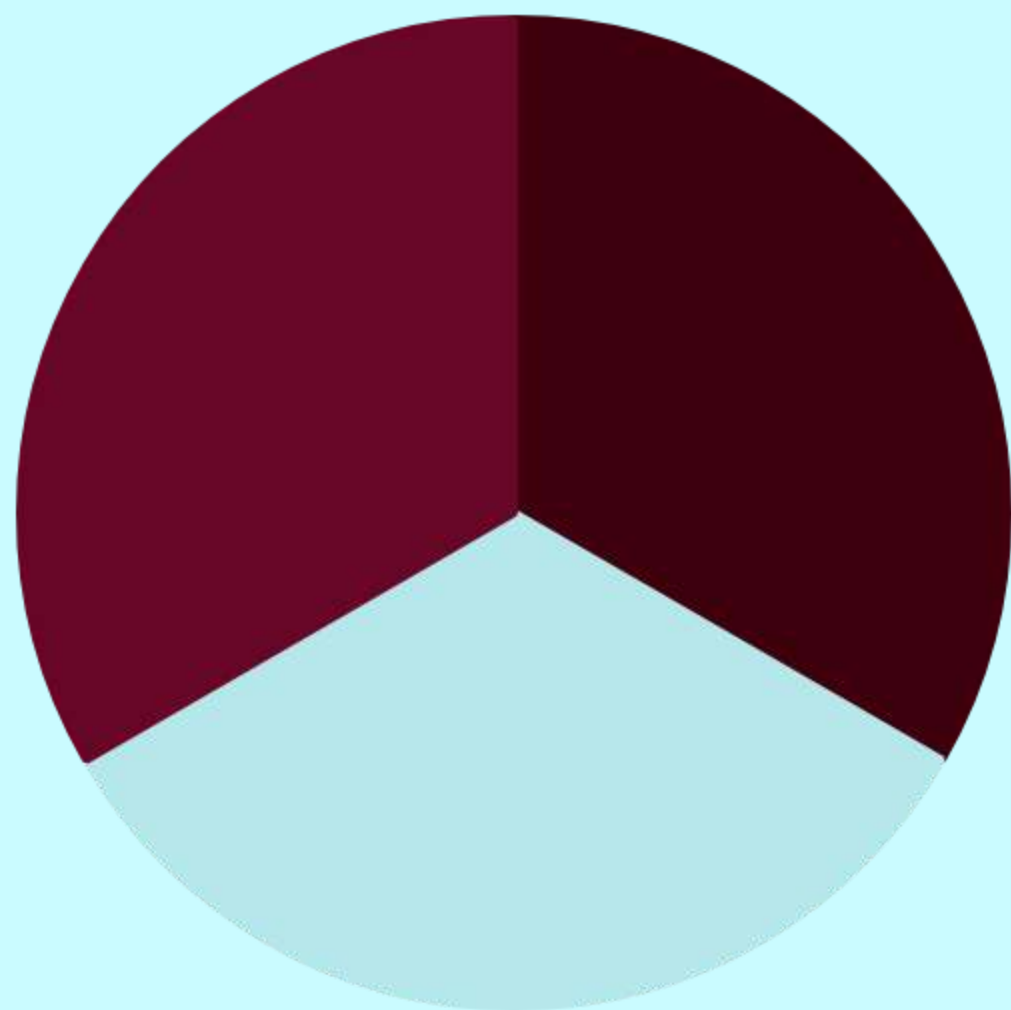
Предел последовательности и предел функции записываются по-разному и относятся к разным множествам аргументов. Смешение этих понятий приводит к ошибкам в рассуждении.

- **Ошибки со знаками и бесконечностями**

При преобразованиях дробей важно правильно учитывать старшие степени и знак. Неверное обращение с бесконечно большими величинами часто даёт ложный вывод о пределе.

Три основных типа поведения последовательностей

■ Сходится к числу ■ Уходит к бесконечности
■ Колеблется без предела



Три типа поведения охватывают все базовые ситуации, с которыми встречаются в школьных задачах и при первых доказательствах сходимости.

Последовательность может либо сходиться, либо расти без границ, либо колебаться; конечный предел есть только у первого типа.

Иллюстративная схема по типовым примерам: $1/n$, n , $(-1)^n$.

Тренировка вычисления пределов по формуле

Сопоставьте выражение, приём и ответ. В таблице собраны типовые рациональные последовательности с разной степенью числителя и знаменателя.

Предел рациональной последовательности определяется старшими степенями и коэффициентами; после деления на ведущую степень ответ читается напрямую.

Выражение	Приём	Ответ
$(7n+1)/(n-2)$	деление на n	7
$(n^2-3n)/(2n^2+1)$	деление на n^2	$1/2$
$(3n)/(n^2+1)$	степень выше	0

Предел как язык бесконечного приближения

Предел последовательности показывает, как из бесконечного процесса получить точный числовой результат. Он нужен для анализа сходимости, доказательств и дальнейшего изучения математического анализа, непрерывности и вычислительных методов.