

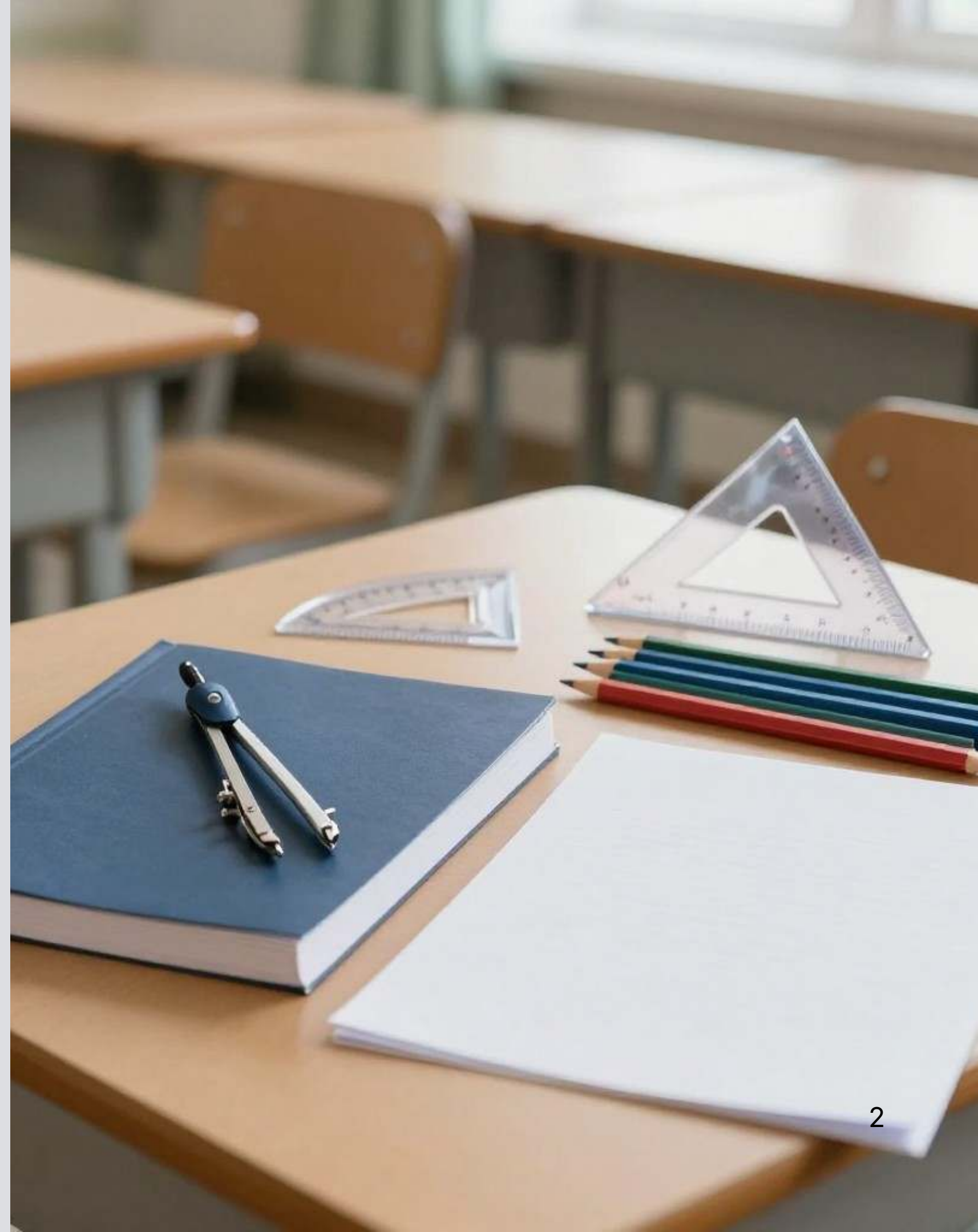
Некоторые тригонометрические тождества

Связь функций, окружности и простых вычислений.



Тригонометрия в 9 классе

Эта тема помогает видеть, как углы, треугольники и окружность связаны между собой. Тождества показывают, что выражение можно преобразовать, не меняя его значения, и проверить решение без лишних вычислений.



Что называют тождеством

Равенство без исключений

Тождество — это равенство, которое верно при всех допустимых значениях переменной. В тригонометрии оно описывает устойчивую связь между функциями одного и того же угла.

Одна и та же величина

Если в записи встречаются синус, косинус, тангенс или котангенс, тождество помогает выразить их через друг друга. При этом значение выражения не изменяется после преобразования.

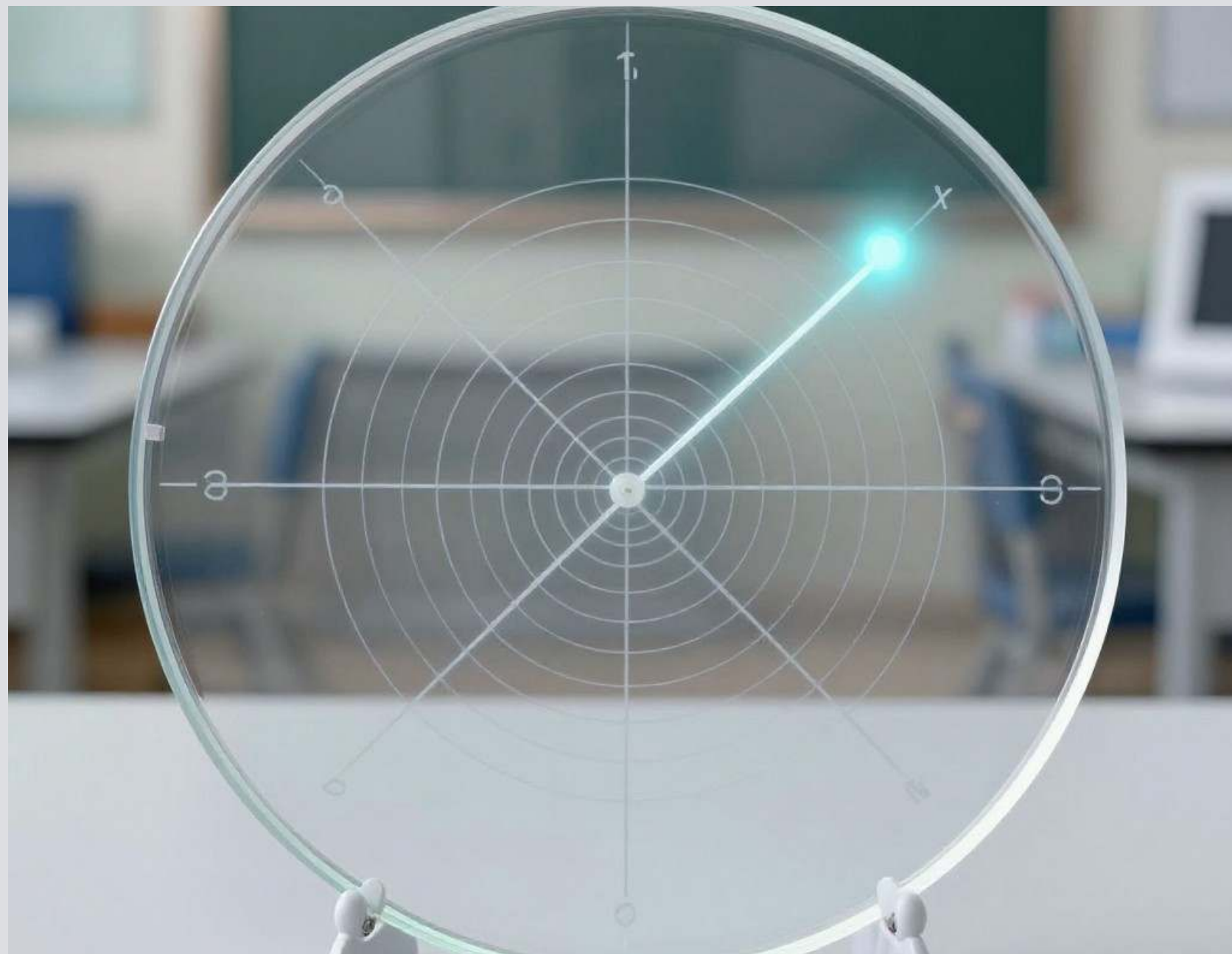
Пример из темы

Равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ выполняется для любого угла, где определены эти функции. Оно показывает, что сумма квадратов синуса и косинуса всегда даёт единицу.

Не то же самое, что уравнение

Уравнение решают, чтобы найти неизвестное значение. Тождество уже истинно всегда, поэтому его не решают, а используют как правило для упрощения выражений и проверки ответов.

Единичная окружность как основа тригонометрии



Координаты точки

На единичной окружности каждой точке с углом $\angle(x)$ соответствуют координаты $(\cos x, \sin x)$. Поэтому косинус связан с горизонтальным положением точки, а синус — с вертикальным.

Радиус равен единице

Поскольку радиус окружности равен 1, координаты точки образуют прямоугольный треугольник. Именно это позволяет применять теорему Пифагора к тригонометрическим функциям.

Главное соотношение

Из теоремы Пифагора сразу получается равенство $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$. Оно лежит в основе большинства тригонометрических преобразований, изучаемых в 9 классе.

Наглядная опора

Единичная окружность помогает видеть, почему функции связаны между собой и почему их значения меняются согласованно при повороте точки вокруг центра.

Значения тригонометрических функций для основных углов

Эти значения удобно запоминать по специальным прямоугольным треугольникам и использовать как опору в проверке вычислений.

Для углов 0° , 30° , 45° и 60° значения повторяются закономерно, что ускоряет решение геометрических задач.

Школьный курс геометрии, 9 класс

Это равенство позволяет находить одну функцию через другую и быстро проверять вычисления в задачах.

1

— именно к этому значению всегда равна сумма квадратов синуса и косинуса.

Тождества для тангенса и котангенса

1

Связь с косинусом

Из основного тождества, если разделить обе части на $\cos^2 x$, получается формула $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$. Она полезна там, где косинус не равен нулю.

2

Связь с синусом

Если разделить то же равенство на $\sin^2 x$, выходит формула $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$. Она работает только для тех углов, где синус определён и не равен нулю.

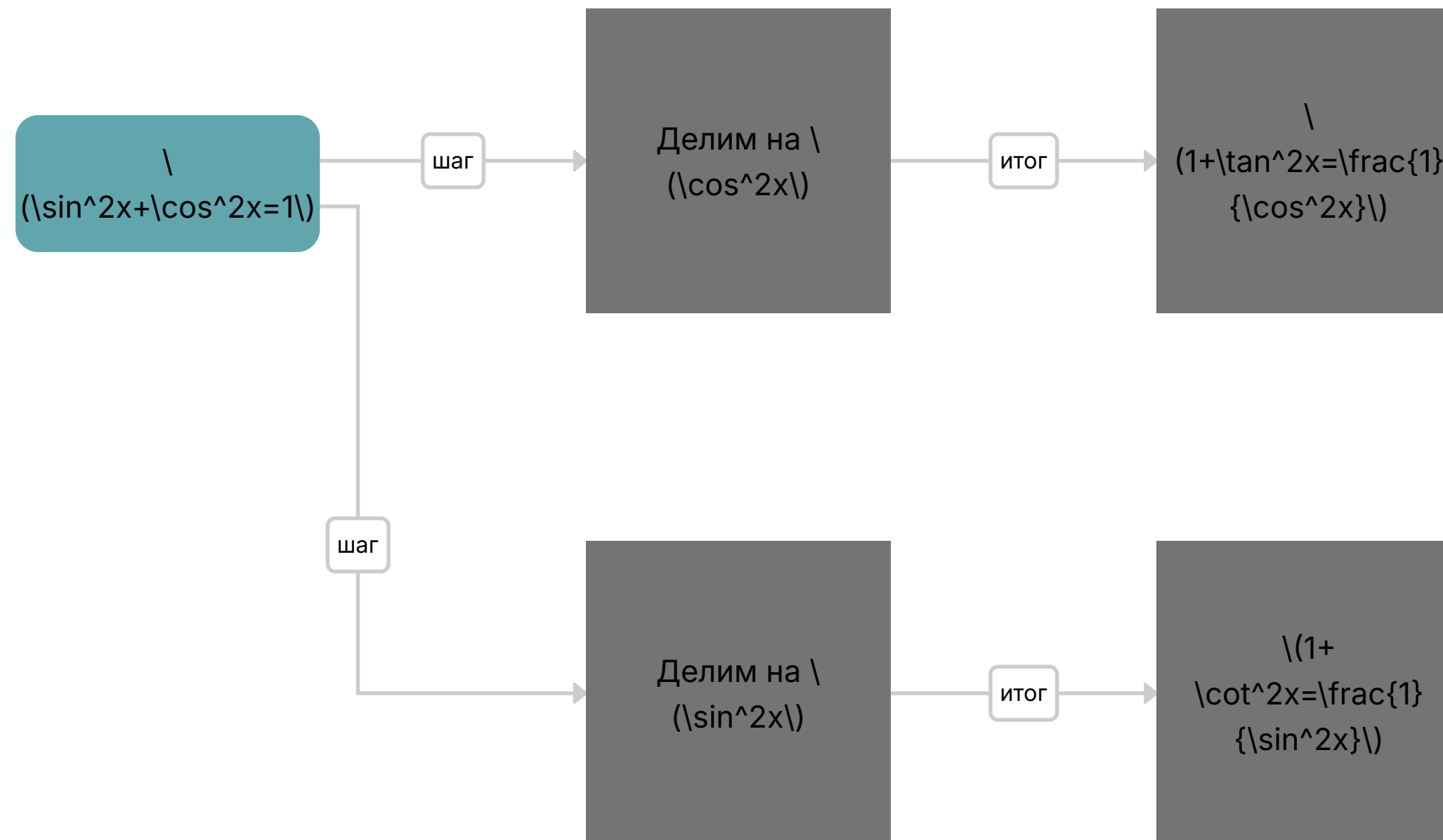
3

Для упрощения выражений

Эти равенства помогают заменять длинные дроби и корни более короткими записями. В результате решение становится понятнее, а вероятность ошибки при вычислениях заметно уменьшается.

Как получают новые тождества из основного

Пошаговое преобразование начинается с одного равенства и приводит к связанным формулам.



Формулы через одну функцию

1

Выражаем косинус

Из равенства $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ можно получить $\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$.
Знак корня зависит от того, в какой четверти находится угол.

2

Выражаем синус

Точно так же синус находят по формуле $\sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$.
Сначала определяют модуль значения, а затем выбирают нужный знак по положению точки на окружности.

3

Почему нужен знак

Квадратный корень даёт только длину, а не направление.
Поэтому для тригонометрии важно помнить, где функция положительна, а где отрицательна.

4

Простой пример

Если $\sin x = \frac{3}{5}$, то $|\cos x| = \frac{4}{5}$.
Точный ответ зависит от четверти: в одной ситуации косинус положителен, в другой — отрицателен.

Знаки тригонометрических функций по четвертям

Четверть	sin	cos	tan
I	+	+	+
II	+	-	-
III	-	-	+
IV	-	+	-

Знак функции помогает выбрать правильную ветвь корня и не ошибиться при вычислениях.

Знаки меняются по четвертям, поэтому при вычислениях всегда нужно учитывать положение угла на окружности.

Единичная окружность

Симметрия окружности и формулы для дополнительных углов



Зеркальные точки на окружности

Если провести на единичной окружности две симметричные точки, их координаты связаны простыми правилами. При повороте на угол, дополняющий до 180° , синус остаётся тем же, а косинус меняет знак. Именно так появляется наглядная связь между углами и их расположением на окружности.



Угол 90° как линия симметрии

Когда угол дополняется до 90° , точки на окружности как будто меняются местами относительно биссектрисы первого квадранта. Поэтому синус одного угла равен косинусу другого, а косинус — синусу. Эти равенства удобно читать прямо с рисунка окружности.

Как появляются формулы приведения



Периодичность тригонометрических функций

На диаграмме видно, что синус и косинус повторяются через полный оборот, а тангенс и котангенс — уже через половину оборота.

Чем меньше период, тем быстрее повторяется график. Это помогает предсказывать значения функций и проверять вычисления без построения каждого нового участка.

Школьный курс тригонометрии; значения периодов функций

Как тождества сокращают запись



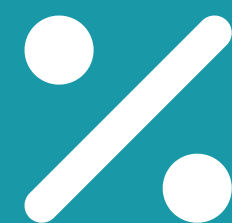
Замена через основную связь

Выражение $1 - \sin^2 x$ сразу превращается в $\cos^2 x$. Это убирает лишние действия и делает формулу короче, особенно когда выражение входит в дробь или корень.



Переход от косинуса к синусу

Если встречается $1 - \cos^2 x$, можно заменить его на $\sin^2 x$. Такая запись часто удобнее в геометрических задачах, где уже известен синус угла.



Тангенс в более удобном виде

Формулу $1 + \tan^2 x$ заменяют на $1 / \cos^2 x$. Так проще работать с дробями и сокращать сложные выражения, не теряя их значения.

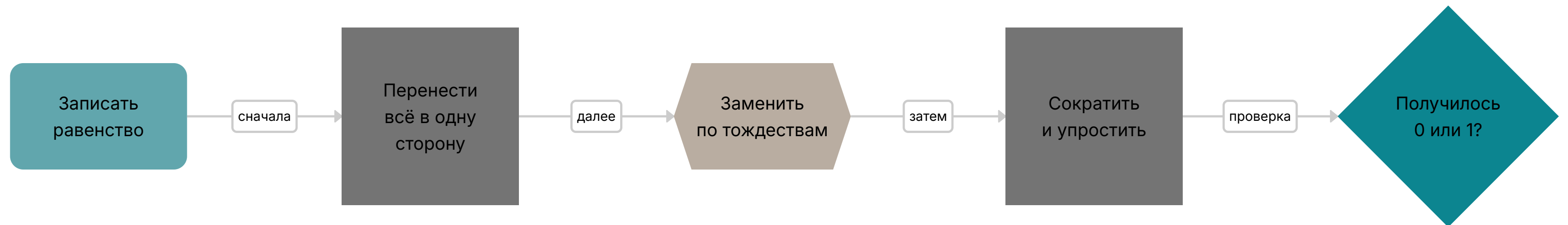


Корни и преобразования

Тождества помогают аккуратно раскрывать и сокращать выражения с корнями. Главное — не менять значение, а лишь записывать его в более удобной форме для вычислений.

Проверка тригонометрического тождества

Последовательность действий при упрощении равенств в школьных задачах



Как не ошибиться со знаком



Корень не выбирают наугад

Когда из $\cos^2 x$ находят $\cos x$, легко забыть про знак корня. Но у точки на единичной окружности он зависит от четверти: во второй четверти косинус отрицателен, а в первой — положителен. Рисунок с двумя точками помогает это увидеть.



Положение точки решает всё

Та же задача возникает при переходе от $\sin^2 x$ к $\sin x$. Если угол расположен в четвёртой четверти, синус отрицателен, поэтому положительный корень брать нельзя. На окружности это видно по тому, где находится ордината точки относительно осей.

Сравнение основных тождеств

Формула	Смысл	Где полезна
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	Связь $\sin$ и $\cos$	Всегда
$1 + \tan^2 x = 1/\cos^2 x$	Связь $\tan$ и $\cos$	Где $\cos \neq 0$
$1 + \cot^2 x = 1/\sin^2 x$	Связь $\cot$ и $\sin$	Где $\sin \neq 0$
$\sin(90^\circ - x) = \cos x$	Дополнительные углы	При замене углов

Таблица показывает, какую функцию связывает каждая формула и когда её удобнее применять.

Все формулы связаны с единичной окружностью. Одни помогают находить значения функций, другие — заменять угол на удобный и быстрее решать задачи.

Где встречаются тригонометрические тождества

Геометрия



Тождества помогают находить стороны и углы в треугольниках, особенно когда в задаче есть прямой угол, окружность или неизвестное выражение, которое можно упростить.

Физика



При описании колебаний и волн тригонометрические функции встречаются очень часто. Тождества позволяют переписывать формулы короче и точнее, не меняя их смысла.

Информатика



В графике и поворотах объектов функции синуса и косинуса используются для вычислений. Тождества помогают сократить выражения и сделать алгоритмы понятнее.

Школьные доказательства



В задачах на преобразование выражений тождества особенно полезны. Они позволяют заменить сложную запись на более простую и доказать равенство без лишних вычислений.

Что дают преобразования по тождествам

Показатели на графике условные, но они хорошо передают идею: замена по формулам делает запись короче и упрощает ход решения.

Использование тождеств уменьшает количество действий и снижает вероятность ошибки. Поэтому в школьных задачах они работают как инструмент экономии времени и внимания.

Условная сравнительная оценка
для учебной презентации

Главное о тригонометрических тождествах

Мы увидели, что единичная окружность объясняет все основные формулы темы. Тождества помогают находить значения функций, учитывать знаки и уверенно упрощать выражения в геометрических задачах.