



Композиция преобразований в геометрии: как из нескольких движений получается одно

Параллельный перенос, поворот и симметрии складываются в одну «цепочку» с сохранениями.

Почему композиция преобразований важна в 9 классе

Тема соединяет симметрию, движения фигур и работу с координатной плоскостью. В 9 классе она помогает научиться описывать сложный результат через простые шаги. Это пригодится в задачах: найти итог точки и определить, какие преобразования дали новый образ.



Основные преобразования, которые чаще всего встречаются в композиции

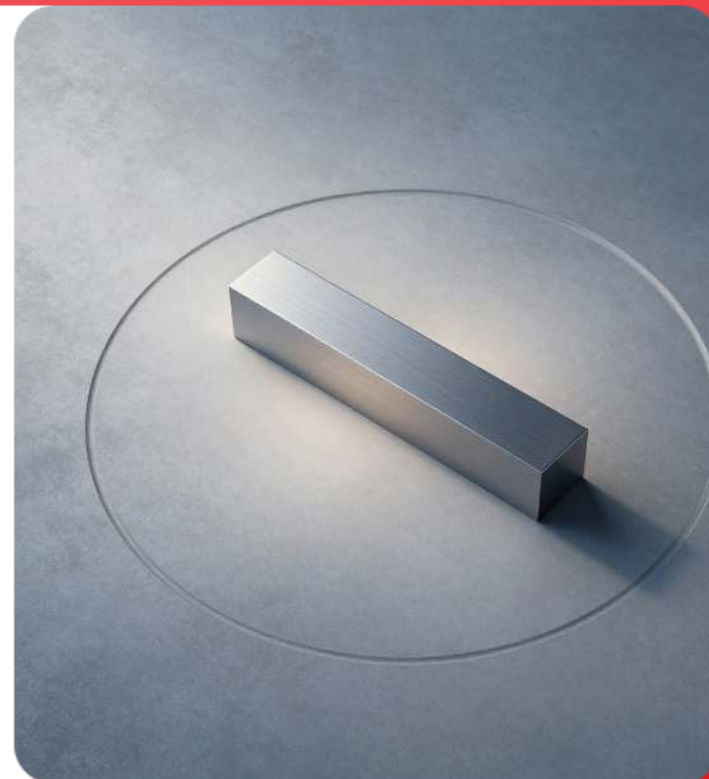
Перенос: фигура «съезжает» по плоскости одинаково

Параллельный перенос сдвигает каждую точку фигуры на один и тот же вектор. В результате фигура не меняет форму, размеры и углы. Меняется только положение на плоскости — удобно отслеживать это по соответствующим вершинам.



Поворот: фигура «вращается» вокруг центра

Поворот переводит фигуру вокруг выбранного центра на заданный угол и меняет ориентацию. При этом все расстояния между точками сохраняются. Поэтому отрезки остаются равными, а форма фигуры — прежней, но она занимает новое положение.



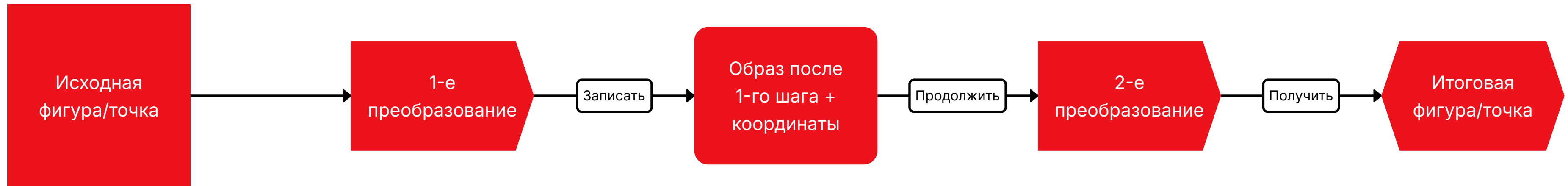
Симметрии: отражения и развороты «относительно»

Осевая симметрия отражает фигуру относительно прямой, словно в зеркале. Центральная симметрия — относительно точки: фигура разворачивается на 180° вокруг центра. В композиции такие отражения помогают получать разные, но равные по форме образы.



Как построить композицию преобразований

Сначала фиксируем исходные данные, затем делаем шаги по очереди и записываем промежуточные координаты.



Почему порядок преобразований имеет значение

1

Композиция обычно не переставляется: если поменять местами два действия, итог может измениться. Это связано с тем, что каждое преобразование работает с уже полученным образом, а не с исходной фигурой.

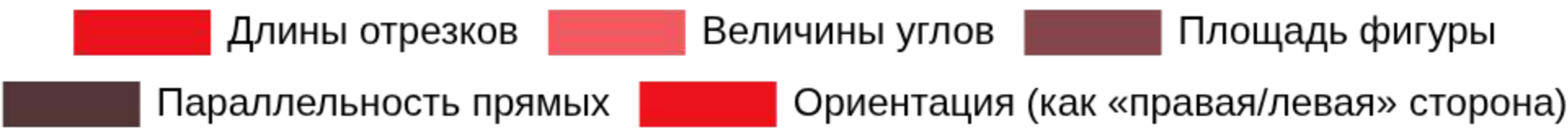
2

Например, отражение относительно оси и параллельный перенос дают разные результаты в зависимости от порядка. Даже при одинаковых «типах» движений координаты вершин получатся другими.

3

При двух поворотах важно учитывать центры и углы, ведь они суммируются только в особом случае — вокруг одной точки. Поэтому при решении задачи всегда проверяют направление вращения и выбранный центр.

Какие свойства обычно сохраняются



По диаграмме видно: практически все движения сохраняют основные геометрические меры, но ориентация может меняться при осевой симметрии.

Если при преобразованиях форма и размеры не искажаются, то сохраняются длины, углы и площадь. Осторожно трактуют ориентацию: перенос и поворот сохраняют её, осевая симметрия — нет.

Обобщение школьных свойств движений плоскости (9 класс).

Сравнение основных преобразований плоскости

Преобразование	Что сохраняется	Что изменяется	Короткий пример
Параллельный перенос	Длины, углы, площадь, параллельность	Положение фигуры	Сдвиг вершины на вектор
Поворот	Длины, углы, площадь, параллельность	Положение и ориентация относительно центра	Вращение вокруг точки
Осевая симметрия	Длины, углы, площадь	Положение и ориентация меняются	Отражение относительно прямой
Центральная симметрия	Длины, углы, площадь	Фигура переходит в точку напротив центра	Переворот вокруг центра

Учебный материал по геометрическим преобразованиям в школьном курсе.

В таблице показано, что сохраняется и что меняется при четырех ключевых преобразованиях: переносе, повороте, осевой и центральной симметриях.

Все преобразования-движения сохраняют размеры и форму, но различаются тем, как именно меняется положение и ориентация фигуры.

Композиция двух параллельных переносов

Если сначала выполнить перенос на вектор a , а затем — на вектор b , то суммарный эффект будет таким же, как один перенос на вектор $a+b$. Промежуточные положения не нужны для итогового вывода.

На практике это помогает в координатных задачах: чтобы найти координаты новой точки, достаточно сложить «сдвиги» по x и по y . Форма и размеры фигуры при этом не меняются.

Композиция переносов хорошо работает как «быстрая запись движения» при длинных цепочках. Главное — не перепутать направление каждого вектора: знак определяет, куда смещается точка.

Композиция двух поворотов

Два поворота вокруг одной и той же точки можно объединить в один поворот. Его угол равен сумме углов исходных поворотов, а центр остаётся тем же.

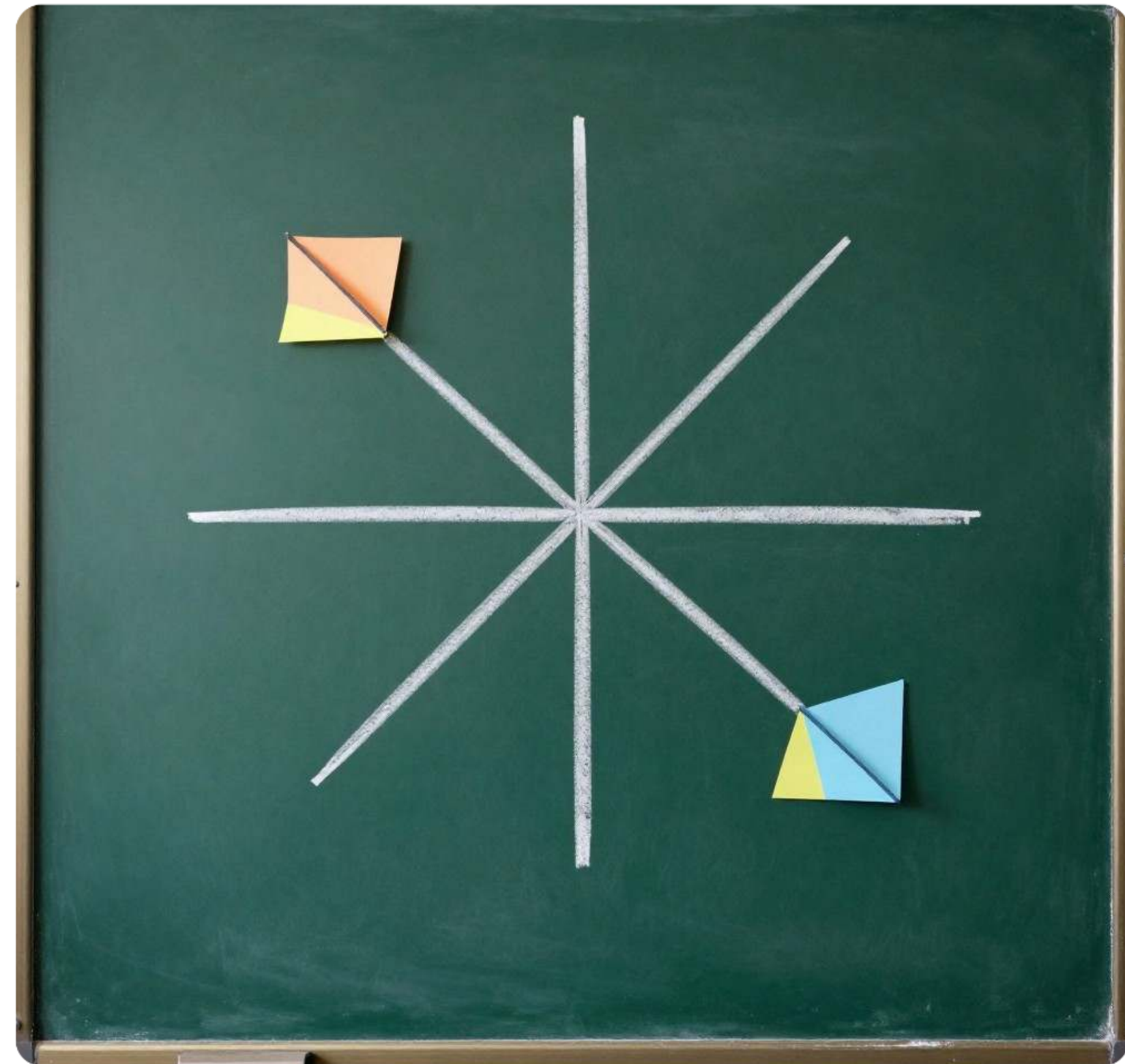
Если суммарный угол равен 0° или 360° , фигура возвращается в исходное положение. Это частый контрольный признак, когда при вычислениях получаются «круговые» значения.

Когда центры поворотов разные, итоговое преобразование уже не обязательно будет поворотом вокруг одного центра: возможен поворот или даже параллельный перенос. Поэтому центры нельзя игнорировать.

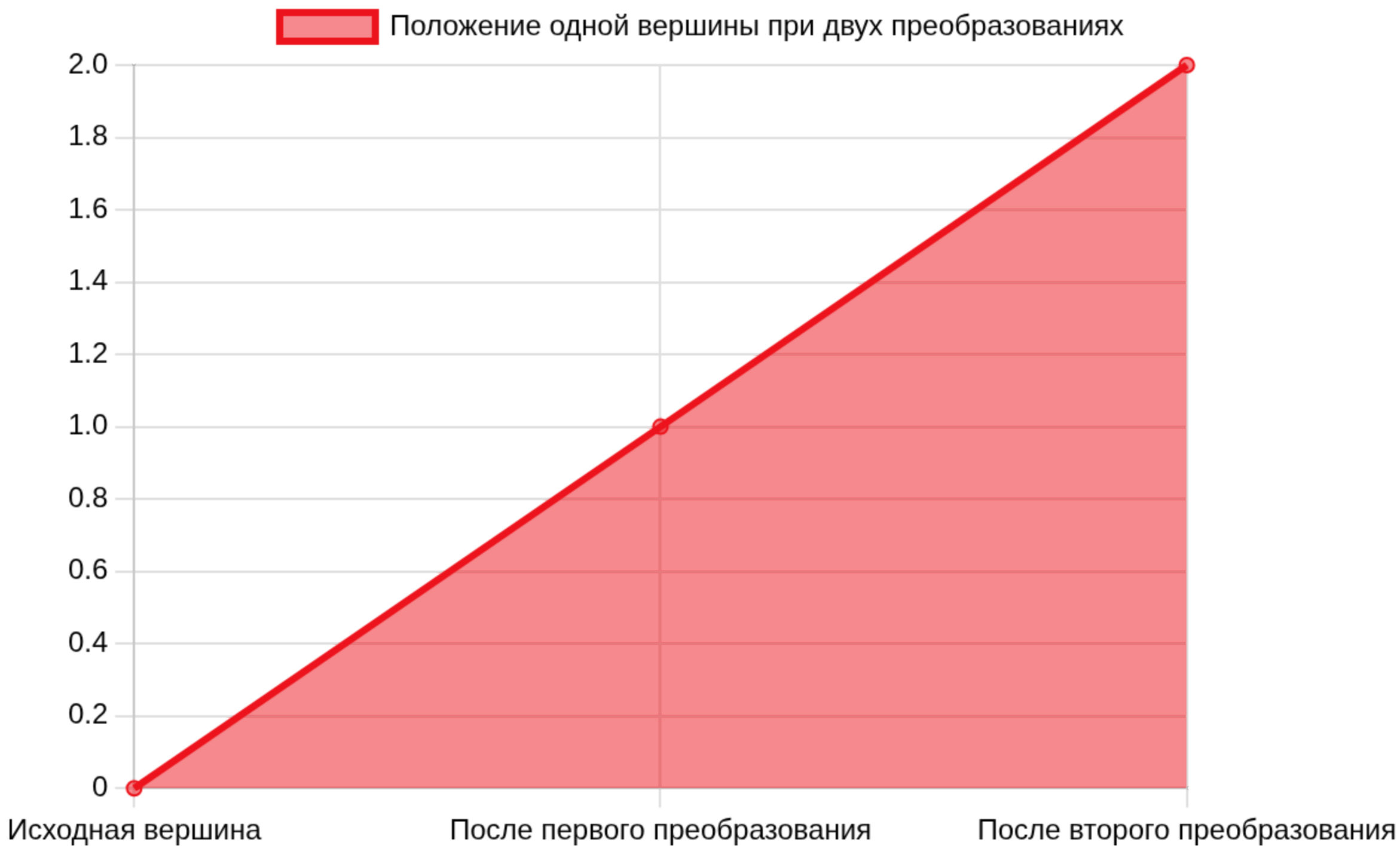
Также важно учитывать направление вращения: по часовой стрелке или против неё. Один и тот же числовой угол даёт разные результаты, если поменять направление.

Осевая симметрия в составе композиции

- Если выполнить две осевые симметрии относительно пересекающихся прямых, то итогом будет поворот вокруг точки их пересечения. Угол поворота равен удвоенному углу между осями симметрии.
- А если оси симметрии параллельны, то две осевые симметрии заменяются одним параллельным переносом. Вид результата целиком определяется расположением прямых, поэтому удобно заранее отметить обе оси на чертеже.



Как меняется фигура по шагам



Учебная демонстрация для визуализации поэтапного переноса координат (без внешних статистических данных).

Параллельно показывается, что при последовательных движениях форма сохраняется: неизменными остаются длина одной стороны, величина угла и площадь всей фигуры.

По изменению координат выбранной вершины видно, как «складывается» действие преобразований, при этом геометрические характеристики остаются равными.

Координатная запись преобразований

Исходная точка

Точку задают парой чисел $(x; y)$.
Дальше все преобразования выполняют по формулам, подставляя координаты в выражения, а не «на глаз» по рисунку.

Параллельный перенос

Если перенос задан вектором $(a; b)$, то получаем $(x; y) \rightarrow (x + a; y + b)$.
Координаты меняются только на величины вектора переноса.

Поворот на 90°

При повороте на 90° вокруг начала координат используют правила: $(x; y) \rightarrow (-y; x)$ для поворота против часовой стрелки или $(x; y) \rightarrow (y; -x)$ для поворота по часовой.

Отражение и итог

Отражение относительно Ox меняет знак y : $(x; y) \rightarrow (x; -y)$.
Относительно Oy меняется знак x : $(x; y) \rightarrow (-x; y)$.
Последовательно считаем до итоговой точки.

Примеры композиции на координатной плоскости

В каждой строке последовательно выполнены два действия: сначала первое преобразование, затем второе. Итоговые координаты — результат композиции.

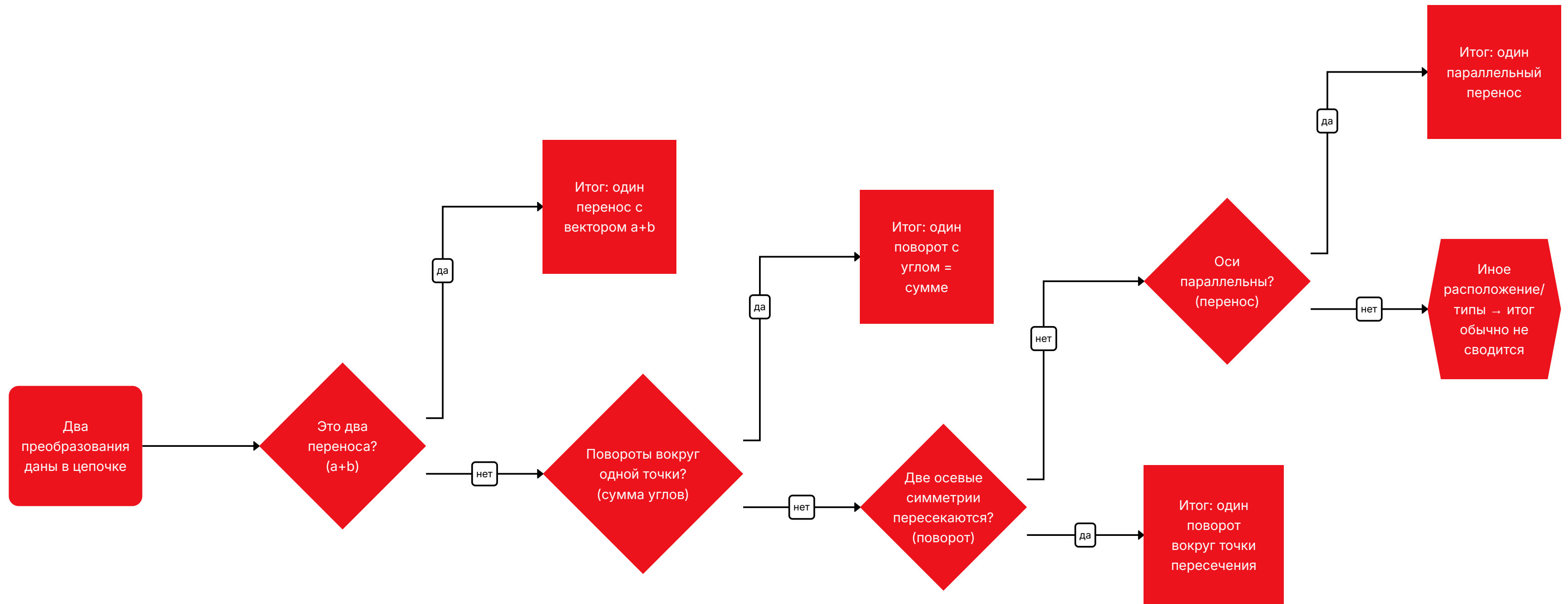
В примерах видно: перенос и отражение меняют координаты напрямую, а поворот «переставляет и меняет знаки» координат; композиция получается простым последовательным пересчётом.

Исходная точка	Первое преобразование	Второе преобразование	Итоговая точка
A(2;1)	+ (3;2) → (5;3)	относительно Oх → (5;-3)	A'(5;-3)
B(-1;4)	поворот 90° против ч.с. → (-4;-1)	-2 по х (влево) → (-6;-1)	B'(-6;-1)
C(3;-2)	относительно Oy → (-3;-2)	поворот 180° → (3;2)	C'(3;2)

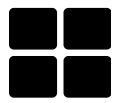
Учебные примеры правил координат: перенос, поворот вокруг начала, отражение относительно осей.

Когда цепочка преобразований сводится к одному движению

Результат зависит от типов преобразований и их взаимного расположения (центры поворота, угол между осями, направление переноса).



Компоновка преобразований в орнаментах и узорах



Повторы по сетке

Мотивы удобно многократно размещать переносами: фигуры одинаково «шагают» по плоскости, сохраняя расстояния и форму элементов узора.



Ротация для ритма

Повороты помогают получить симметричные завитки и розетки. Один и тот же мотив оказывается на разных лучах, но выглядит одинаково по размерам.



Отражения для зеркальности

Осевая симметрия даёт «зеркальное» продолжение рисунка относительно прямой. Часто именно отражение превращает эскиз в цельный бордюр.

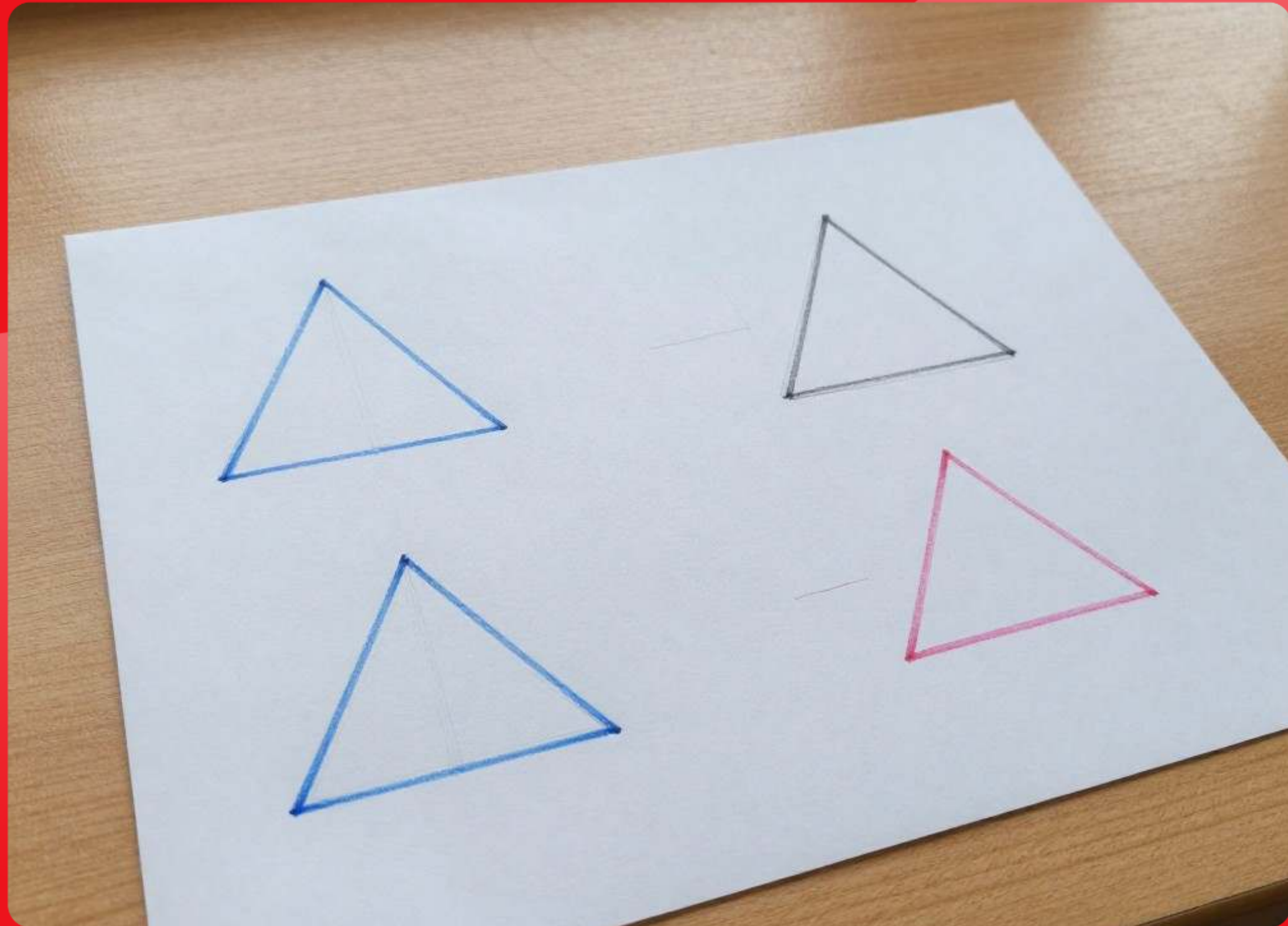


Симметрия в снежинках

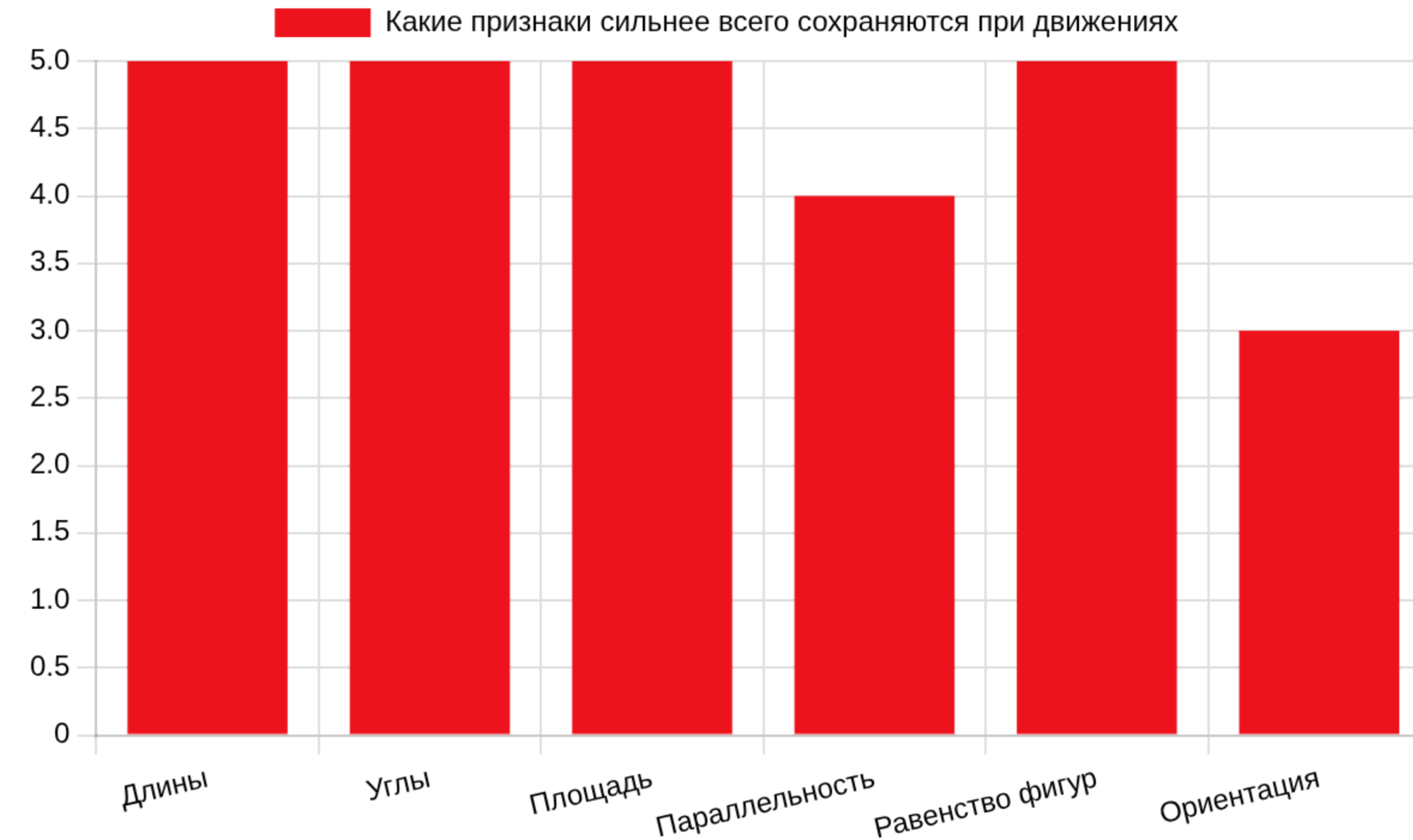
В снежинках и похожих узорах особенно заметны поворотная и осевая симметрия. Композиция движений объясняет, почему детали повторяются точно.

Типичные ошибки при изучении композиции

1. Часто путают порядок двух преобразований: сначала делают не то движение, а затем получают другой образ точки или вершины. Также выбирают неверный угол поворота или забывают направление вращения.
2. Встречаются и ошибки при работе с отражением: потеря оси или неверный знак в координатах. Ещё одна проблема — смещение исходной фигуры и промежуточного образа на чертеже.



Свойства, которые сохраняются при композиции движений



Если рассматривать композицию из движений, то почти всегда сохраняются ключевые измерения фигуры: отрезки, углы и площадь, а параллельность остаётся той же.

По диаграмме видно, что «измерительные» характеристики держатся стабильно, а ориентация может меняться из-за осевой симметрии, хотя форма и размеры совпадают.

Обобщённые учебные свойства движений плоскости (без статистических измерений).

Основные типы задач на композицию преобразований



Построить образ после двух шагов

Дают исходную фигуру и два преобразования. Нужно поэтапно получить изображение после первого действия и затем — после второго, отмечая итоговое положение вершин и сторон.



Заменить цепочку одним преобразованием

Нужно понять, какое одно движение даёт тот же результат, что и два последовательных. Для проверки сравнивают, совпадают ли координаты, равны ли отрезки и углы.



Восстановить исходную фигуру

По итоговому образу требуется найти, какой была исходная фигура. Обычно помогают обратные рассуждения и знание, как «возвращают» точку обратные преобразования.



Найти координаты точки

Задача сводится к последовательному применению формул к координатам $(x; y)$. Итог получается после второго шага; важно не потерять знак и направление действия.

Итоговые результаты типичных композиций

Пара преобразований	Итоговый вид	Условие
Два переноса	Один перенос	известны оба вектора
Два поворота	Один поворот	одна точка и известны оба угла
Две осевые симметрии	Поворот	оси пересекаются и известен угол
Две осевые симметрии	Перенос	оси параллельны, известны расстояние и направление

Общеизвестные правила из школьного курса геометрии о композиции движений.

В таблице показаны случаи, когда результат двух преобразований можно сразу записать одним движением, если известны нужные параметры.

Главная закономерность: итог определяется не только типами преобразований, но и их расположением (центры, оси и расстояния) и порядком выполнения в цепочке.

Композиция преобразований: как «собрать» результат из простых шагов

Композиция преобразований упрощает решения: сложные перемещения заменяются последовательным и понятным пересчётом координат. Выводы темы: порядок важен, многие цепочки сводятся к одному движению, а длины, углы, площадь и равенство сохраняются.