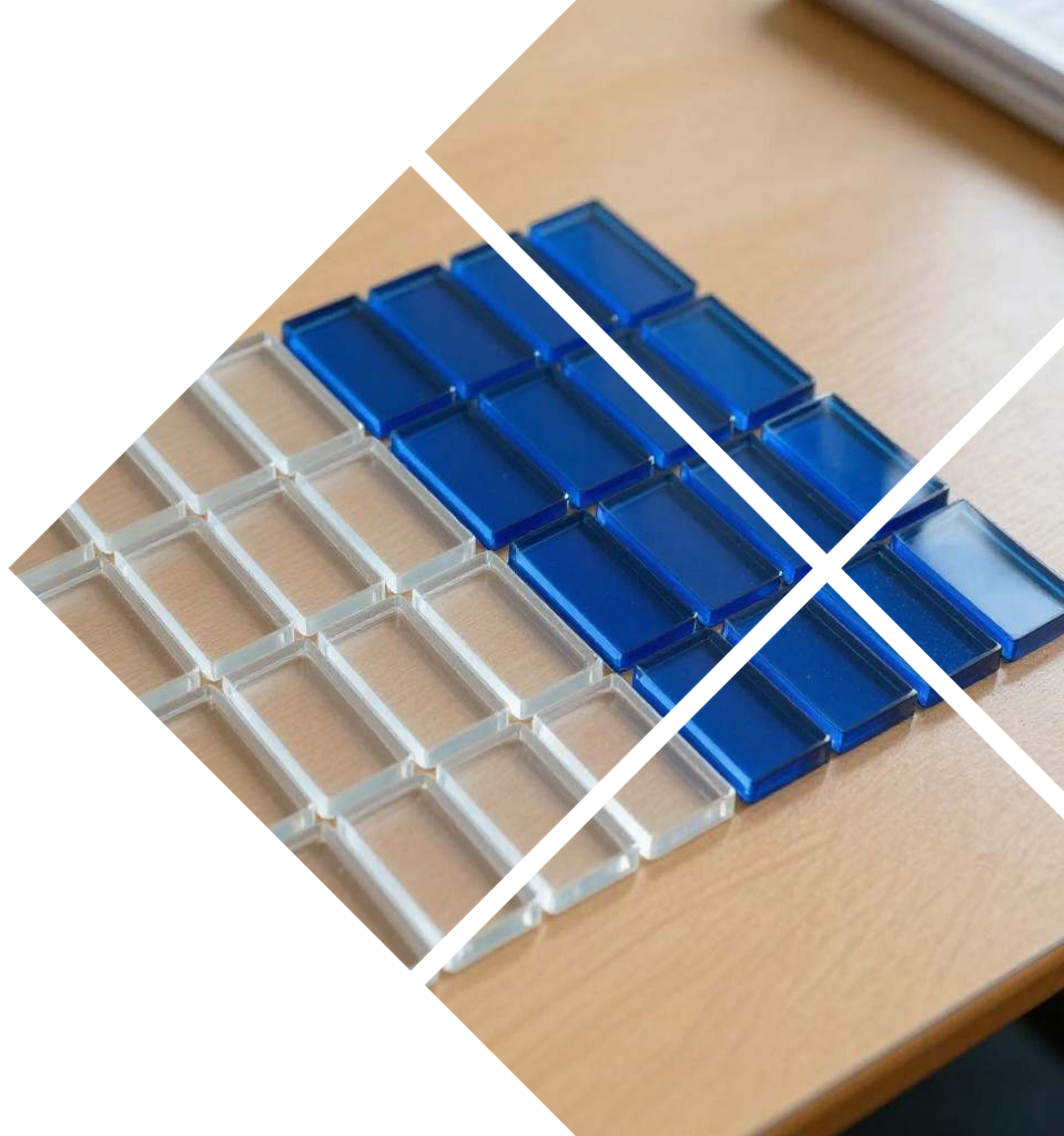


Умножение и деление рациональных чисел

Правила знаков, модуль и обратная дробь
делают вычисления понятными.



Рациональные числа вокруг нас

Температура ниже нуля, деньги, долги, высота и глубина — всё это задачи, где нужны рациональные числа. Умножение и деление помогают быстро считать изменения и части целого.



Какие числа называются рациональными

■ Определение

Рациональное число можно записать в виде дроби a/b , где a и b — целые числа, а b не равно нулю. Такая запись описывает целые и дробные значения.

■ Разные формы записи

К рациональным числам относятся целые числа, обыкновенные дроби, смешанные числа и конечные десятичные дроби. Одно и то же число можно представить разными способами.

■ Примеры

Например, числа -7 , $\frac{3}{4}$, $-5/2$, 0 и $2,6$ являются рациональными. Они могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

■ Почему это важно

Умение узнавать рациональные числа помогает уверенно выполнять действия с дробями и отрицательными числами, а затем использовать эти правила в более сложных выражениях.

Правило знаков при умножении

01

Сравните знаки

Сначала посмотрите, одинаковые ли знаки у множителей. От этого зависит знак произведения, поэтому этот шаг выполняют ещё до вычислений.

02

Одинаковые знаки

Если оба множителя положительные или оба отрицательные, произведение получается положительным. Например, $(-3) \times (-4) = 12$, потому что минус на минус даёт плюс.

03

Разные знаки

Если один множитель положительный, а другой отрицательный, произведение будет отрицательным. Так, $5 \times (-2) = -10$, а $(-6) \times 2 = -12$.

04

Работа с модулем

Сначала находят произведение модулей, а потом ставят нужный знак. Поэтому модуль результата не зависит от знака, а только от самих чисел.

Правило знаков при делении

- **Одинаковые знаки**

Если делимое и делитель имеют одинаковые знаки, частное будет положительным. Например, $(-15) \div (-5) = 3$, потому что деление сохраняет общий знак.

- **Разные знаки**

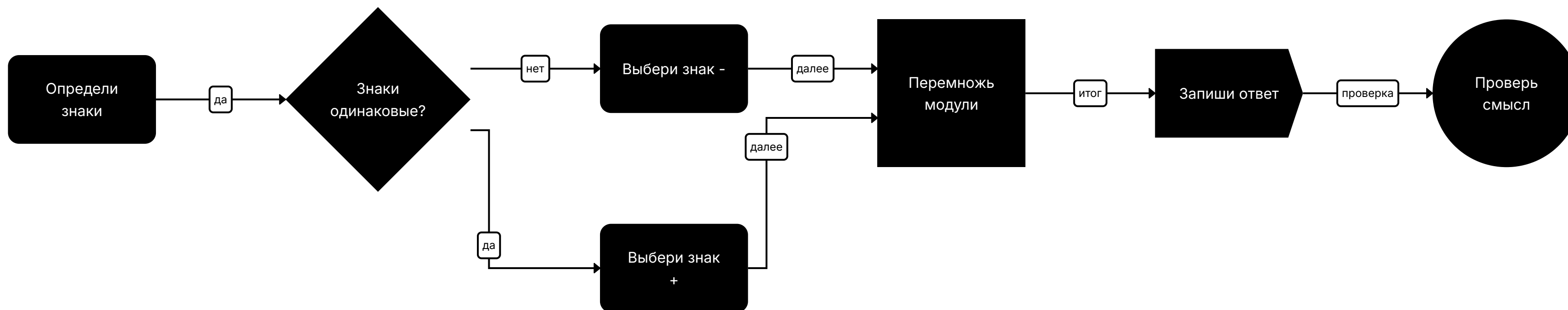
Если знаки чисел разные, частное получается отрицательным. Так, $12 \div (-3) = -4$, а $(-12) \div 3 = -4$, потому что меняется только знак результата.

- **Деление на ноль**

Делить на 0 нельзя: не существует числа, которое при умножении на 0 даст ненулевой результат. Поэтому такое действие не имеет смысла.

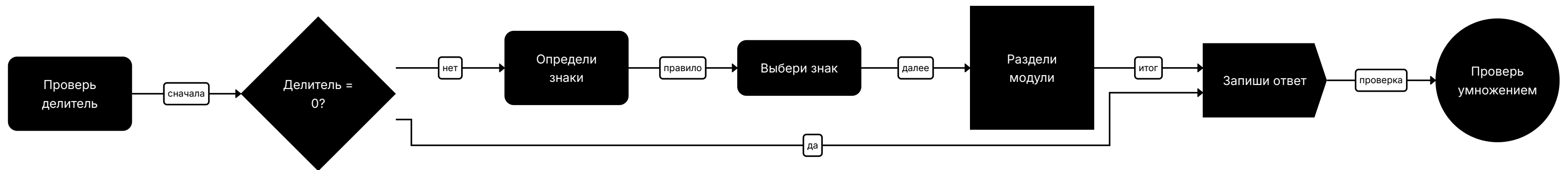
Как умножать рациональные числа

Последовательность действий для вычисления произведения с учётом знаков и модуля.

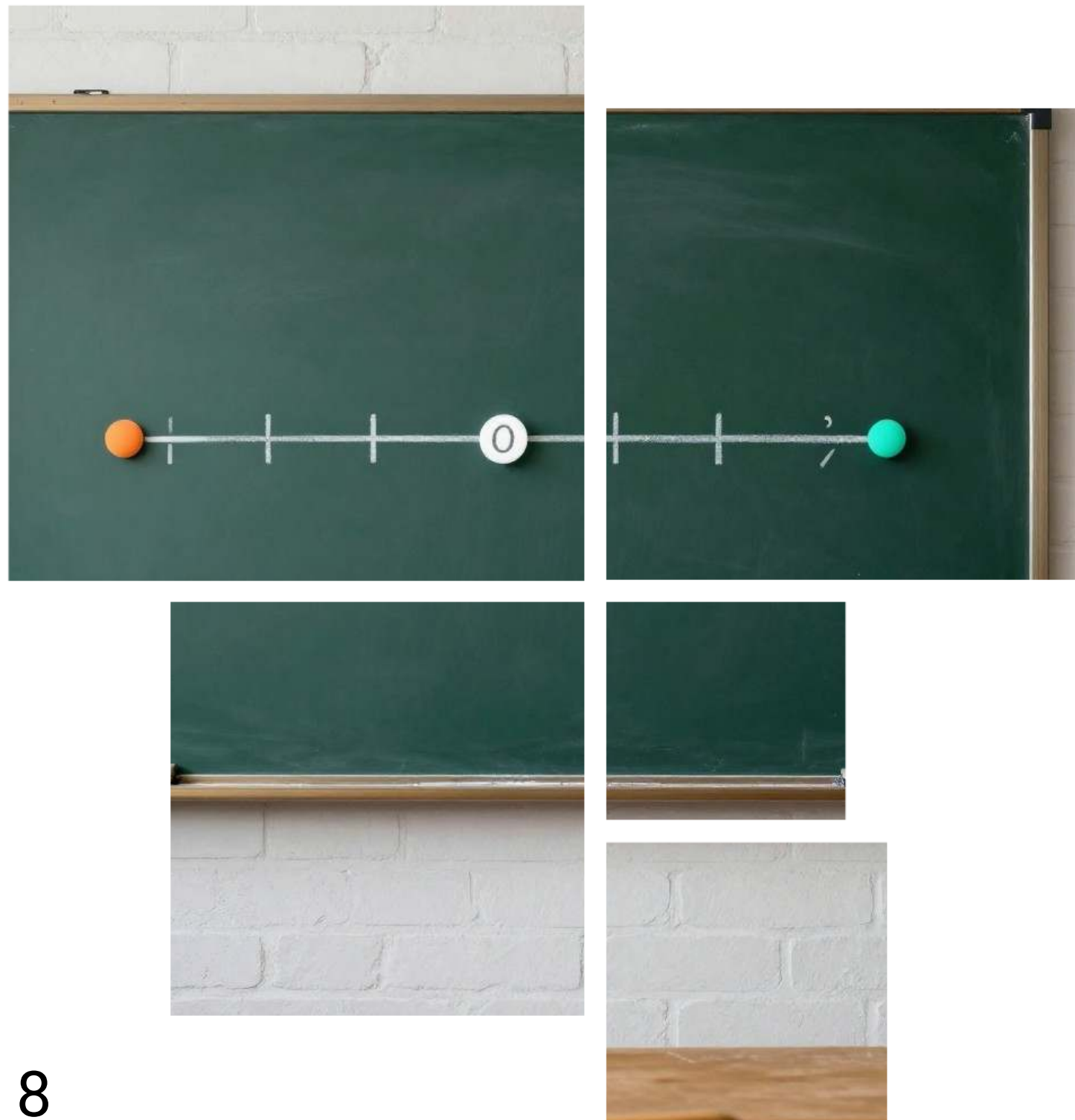


Как делить рациональные числа

Пошаговая схема деления с проверкой результата обратным действием.



Числовая прямая и знак результата



■ Положение чисел

На числовой прямой положительные числа находятся справа от нуля, а отрицательные — слева. Это помогает сразу видеть, в какую сторону движется результат.

■ Умножение на 2

При умножении на 2 число удаляется от нуля в два раза дальше. Например, 3 превращается в 6, а -3 — в -6.

■ Умножение на -1

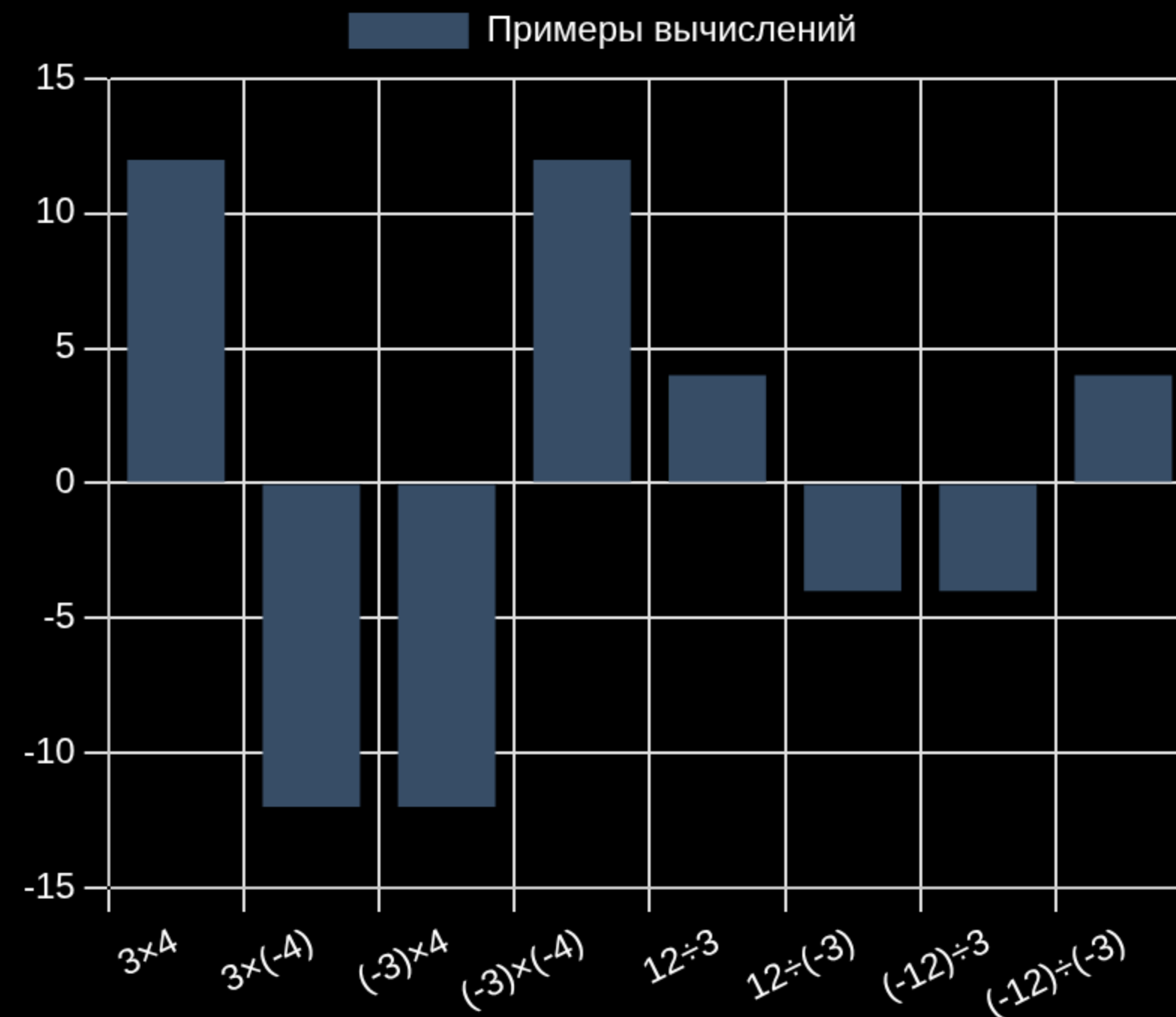
Умножение на -1 меняет направление на противоположное. Поэтому 3 переходит в -3, а знак результата показывает, куда сдвигается точка.

Как меняется результат при разных знаках

Сравнение показывает, что одинаковые по модулю числа могут давать противоположные знаки. Это удобно замечать при проверке вычислений.

Знак результата определяется правилами, а его модуль зависит от самих чисел. При одинаковых знаках ответ положительный, при разных — отрицательный.

Составлено по правилам умножения и деления рациональных чисел



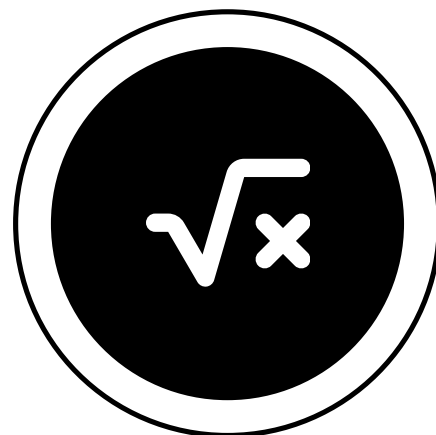
Сравнение правил для умножения и деления

Краткая таблица помогает быстро увидеть, как связаны знак результата, модуль и запрет деления на ноль.

Сначала определяют знак, затем вычисляют модуль. Деление на ноль исключено, поэтому такое выражение не имеет значения.

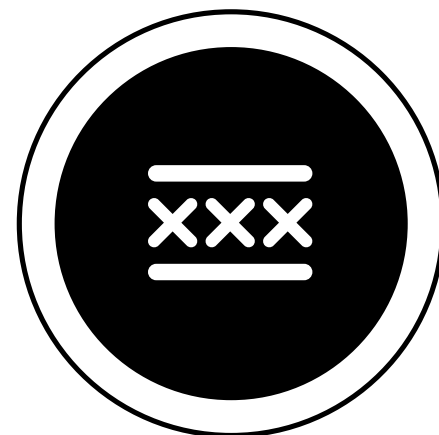
Операция	Знак	Пример
×, одинаковые	+	$(-3) \times (-4) = 12$
×, разные	-	$5 \times (-2) = -10$
÷, одинаковые	+	$(-15) \div (-5) = 3$
÷, разные	-	$12 \div (-3) = -4$
÷ 0	нельзя	$5 \div 0$

Умножение дробей и целых чисел



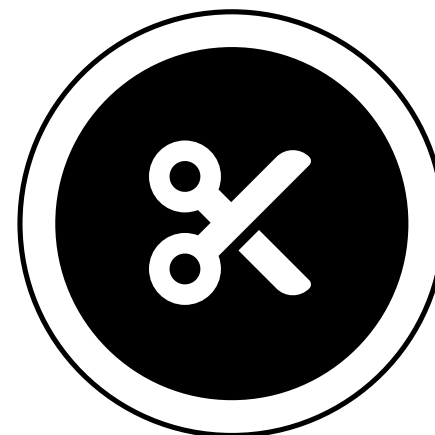
Целое как дробь

Любое целое число можно представить дробью со знаменателем 1: например, $5 = 5/1$. Это удобно, когда нужно умножать целые числа и дроби по одному правилу.



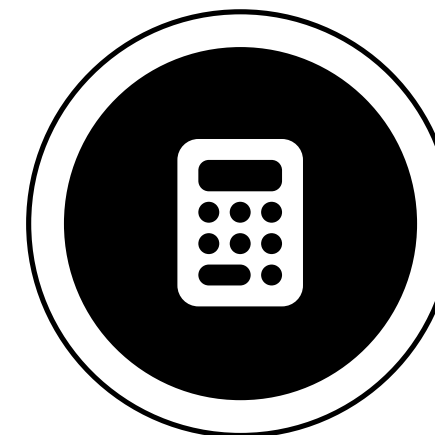
Перемножаем отдельно

При умножении дробей сначала перемножают числители, затем знаменатели. Так сохраняется точность вычислений, а результат можно сразу записать в виде обычной дроби.



Сокращаем заранее

Перед умножением полезно сократить дроби, если числитель и знаменатель имеют общий делитель. Тогда вычисления становятся короче, а ответ легче проверить.



Примеры вычислений

Например, $3 \times 2/5 = 6/5$. Если умножать $-4 \times 3/8$, удобно сократить 4 и 8, после чего получается $-3/2$ без лишних действий

Деление дробей и обратная дробь

01

Запоминаем правило

Деление на дробь заменяют умножением на обратную дробь. Это позволяет свести задачу к знакомому действию и избежать ошибок при прямом делении дробей.

02

Находим обратную

Для дроби a/b обратная дробь — это b/a . При этом ноль не может стоять в знаменателе, поэтому делить на нулевую дробь нельзя.

03

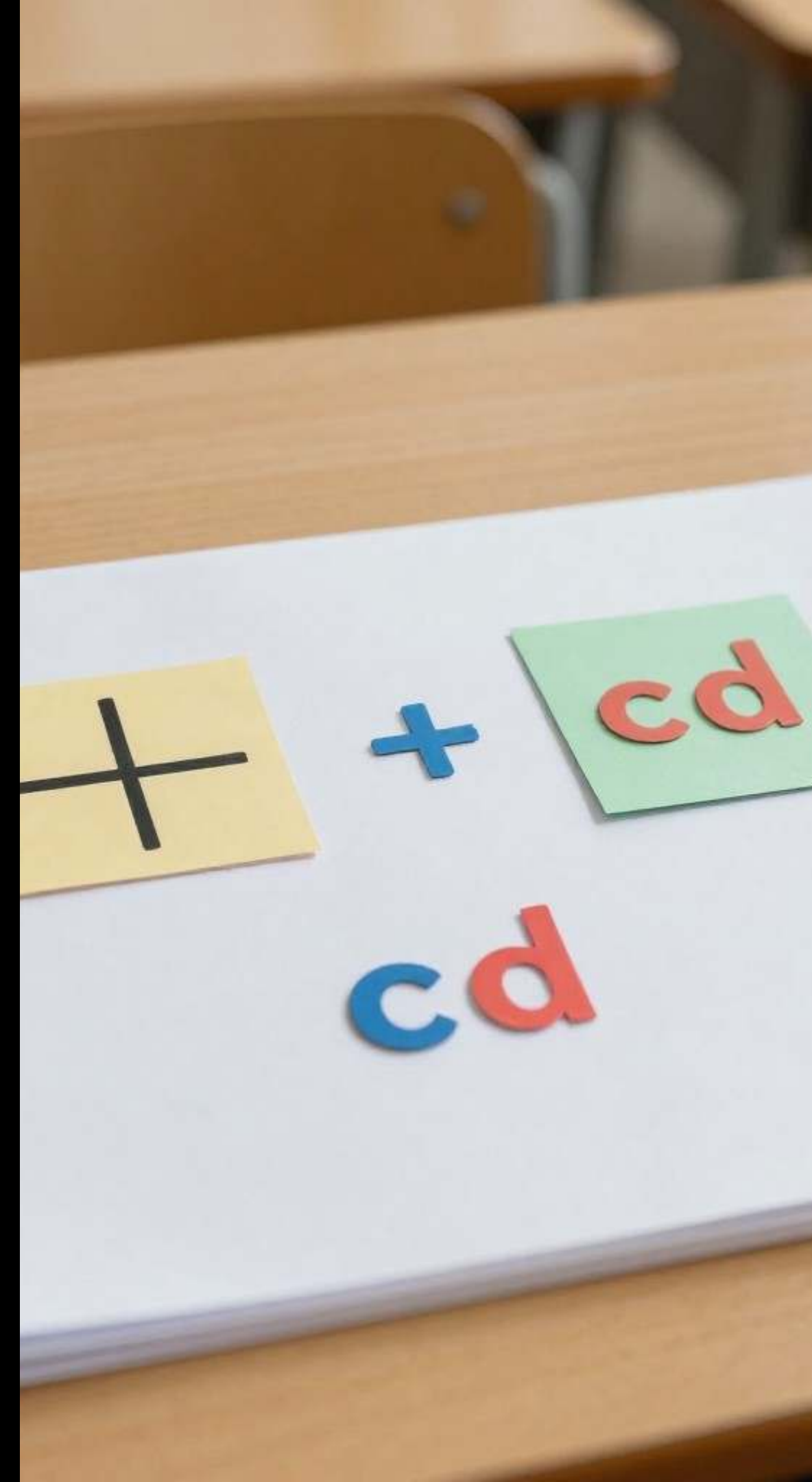
Применяем формулу

Запись $a/b \div c/d$ заменяют выражением $a/b \times d/c$, если c/d не равно нулю. Сначала меняют действие, затем умножают дроби по обычному правилу.

04

Проверяем ответ

Например, $2/3 \div 4/5 = 2/3 \times 5/4 = 5/6$. А $(-3/4) \div 1/2 = (-3/4) \times 2 = -3/2$, что подтверждает правило.



Типичные ошибки учеников

- **Теряется знак минус**
Часто знак «минус» не записывают в ответе или ставят его не там, где нужно. Из-за этого $(-2) \times (-3)$ ошибочно превращается в -6 .
- **Путают правило знаков**
Иногда считают, что любое умножение или деление с отрицательным числом даёт отрицательный результат. На самом деле одинаковые знаки дают положительный ответ.
- **Пытаются делить на ноль**
Выражение $5 \div 0$ нельзя вычислить как обычное деление. Не существует числа, которое при умножении на 0 даст 5.
- **Неверно находят обратную дробь**
При замене деления на умножение иногда переворачивают не ту дробь или забывают изменить действие. Тогда ответ становится неверным уже на первом шаге.
- **Смешивают модуль и знак**
Некоторые ученики правильно находят модуль, но забывают про знак результата. Важно сначала определить знак, а потом вычислить модуль частного или произведения.

Как проверить ответ

01

Проверяем произведение

Если найдено произведение, его удобно проверить делением. Например, после $7 \times (-2) = -14$ можно выполнить $-14 \div (-2)$ и получить 7.

02

Проверяем частное

Если вычислено частное, ответ проверяют умножением. Так, после $18 \div (-3) = -6$ нужно убедиться, что $-6 \times (-3) = 18$.

03

Сравниваем по смыслу

Проверка помогает заметить слишком большой или слишком маленький ответ. Например, $20 \div 5$ не может быть больше 20, поэтому результат 4 выглядит верно.

04

Используем прикидку

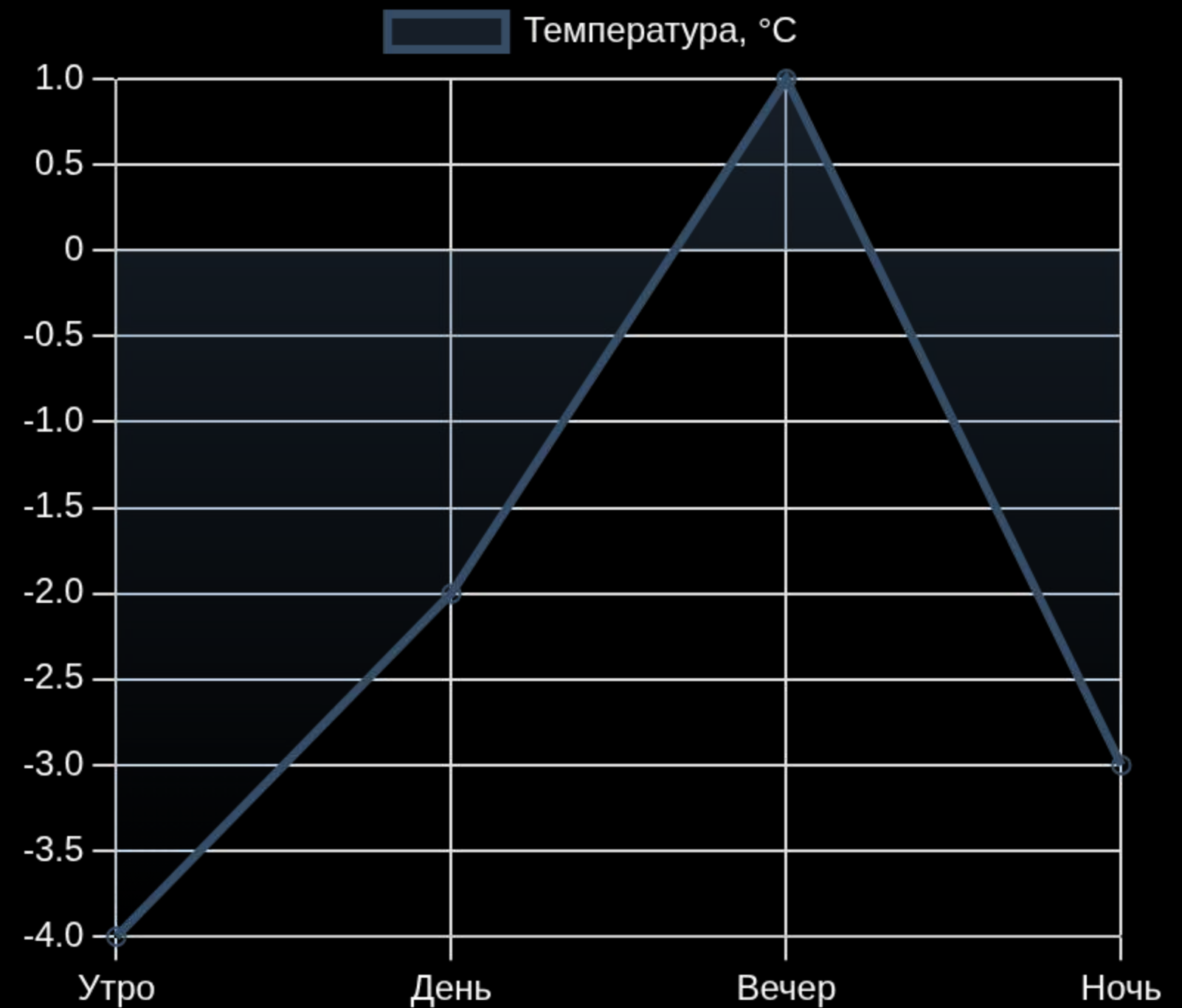
Перед окончательной записью полезно приблизительно оценить ответ по модулю. Если числа небольшие, результат тоже должен быть разумным и соответствовать условиям задачи.

Изменение температуры в течение дня

На графике видно, что значения постепенно приближаются к нулю, затем переходят через него и снова уходят в отрицательную область.

Температура меняет знак, а значит, в реальных задачах важно внимательно следить за переходом через 0 и направлением изменения.

Составлено по учебному примеру из условия задания.



Рациональные числа в жизни школьника



Покупка со скидкой

В магазине рациональные числа помогают считать цену после скидки и сравнивать выгоду. Если товар стоил 200 рублей, а скидка составила 25%, нужно работать с дробями и процентами. Это привычный способ увидеть, как число уменьшается или увеличивается.



Температура и глубина

На улице температура может быть ниже нуля, а в географии встречается глубина ниже уровня моря. Записи -8°C и -12 м показывают, что отрицательные числа нужны не только на уроках, но и для описания окружающего мира.



Деньги и долги

Рациональные числа удобны при расчётах с долгами, возвратом денег и балансом карманных расходов. Долг -50 рублей и возврат 50 рублей обозначаются разными знаками, поэтому важно точно понимать, что показывает число: потратил ты или получил.

Примеры вычислений по теме

▶ В таблице показано, что сначала определяется знак результата, а затем вычисляется модуль чисел.

▶ Во всех примерах действует один алгоритм: сначала знак, потом вычисление модулей. Это делает решение быстрым и предсказуемым.

Пример	Знак	Модуль	Ответ
$6 \times (-2)$	разные	6×2	-12
$(-15) \div 3$	разные	$15 \div 3$	-5
$(-8) \times (-4)$	одинаковые	8×4	32

Составлено по правилам умножения и деления рациональных чисел.

Связь с другими темами алгебры

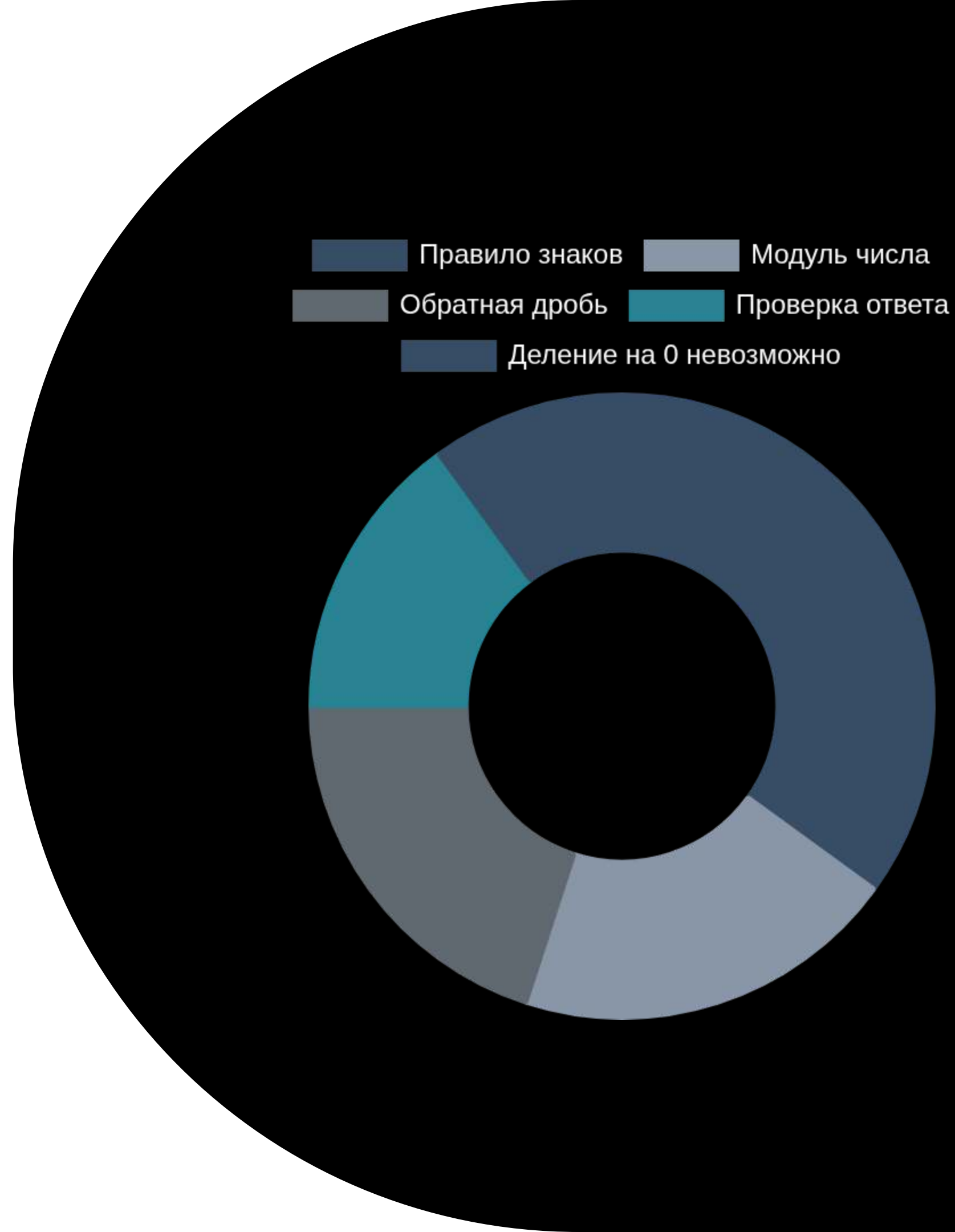


Что важно запомнить по теме

Диаграмма помогает быстро увидеть, какие идеи встречаются чаще всего при решении примеров и задач по теме.

Главная опора — правило знаков: оно используется почти в каждом вычислении, а остальные элементы помогают не потерять точность и избежать ошибок.

Составлено по основным правилам темы «Умножение и деление рациональных чисел».



Главное о рациональных числах

Чтобы уверенно работать с рациональными числами, нужно сначала определить знак результата, затем вычислить модуль. Если помнить правило знаков, обратную дробь и проверку действия, ошибки становятся заметно реже.