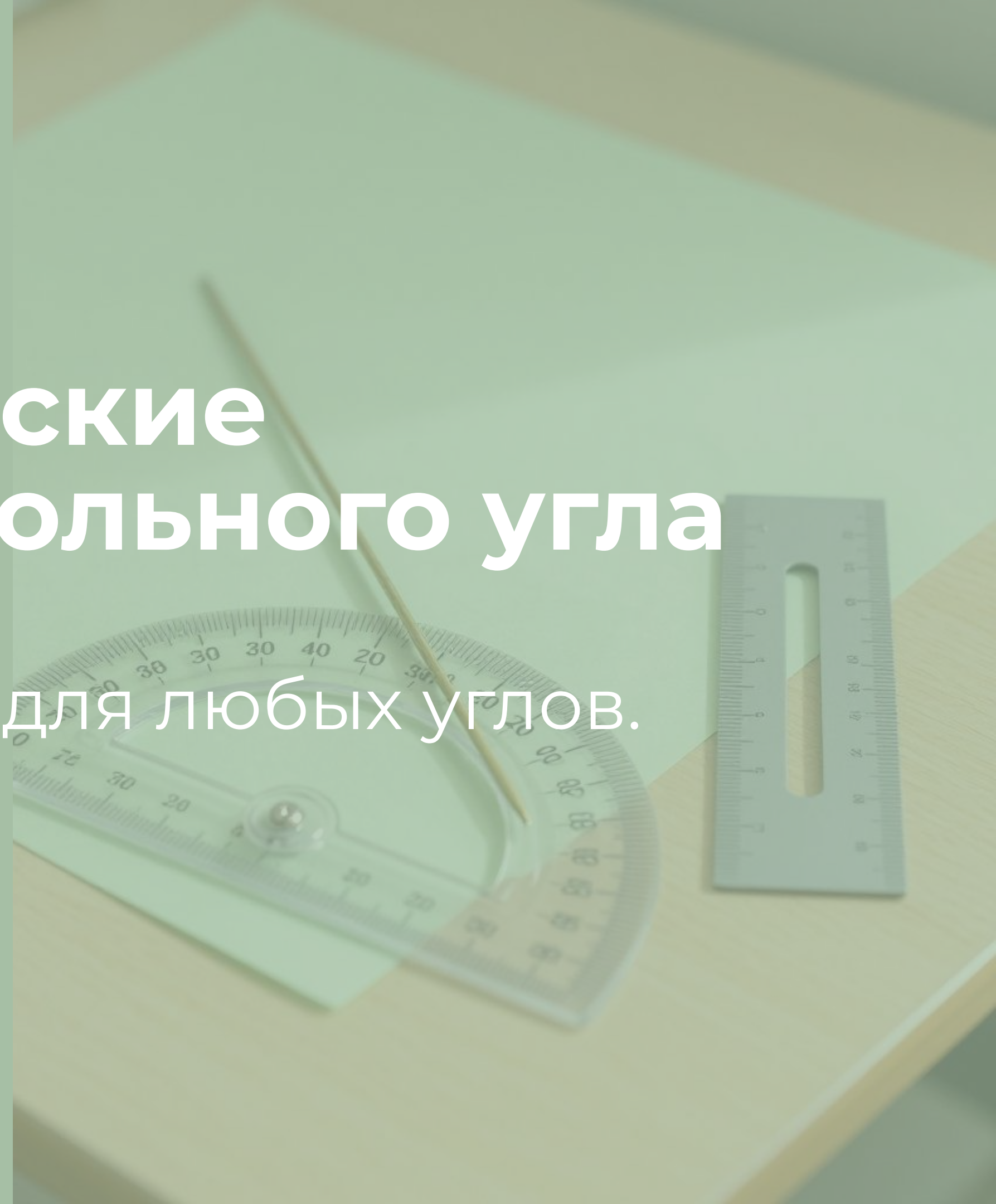


Тригонометрические функции произвольного угла

Синус, косинус и тангенс для любых углов.





Зачем нужны любые углы

В задачах поворота, движения и периодических явлений часто важны не только углы треугольника. Полные обороты, отрицательные значения и углы больше 360° помогают точно описывать положение точки на окружности.

Что называют произвольным углом

Любой угол на плоскости

Произвольный угол задают на координатной плоскости от начальной стороны к конечной. Он может быть острым, тупым, прямым, развернутым, а также больше 360° или отрицательным.

Положительное направление

Если поворот выполняют против часовой стрелки, угол считают положительным. Такой способ отсчета принят в математике, потому что он удобно описывает движение на плоскости и в окружности.

Отрицательный поворот

Поворот по часовой стрелке называют отрицательным. Это не отдельный вид угла, а другой способ его задания, который позволяет рассматривать повороты в обратном направлении.

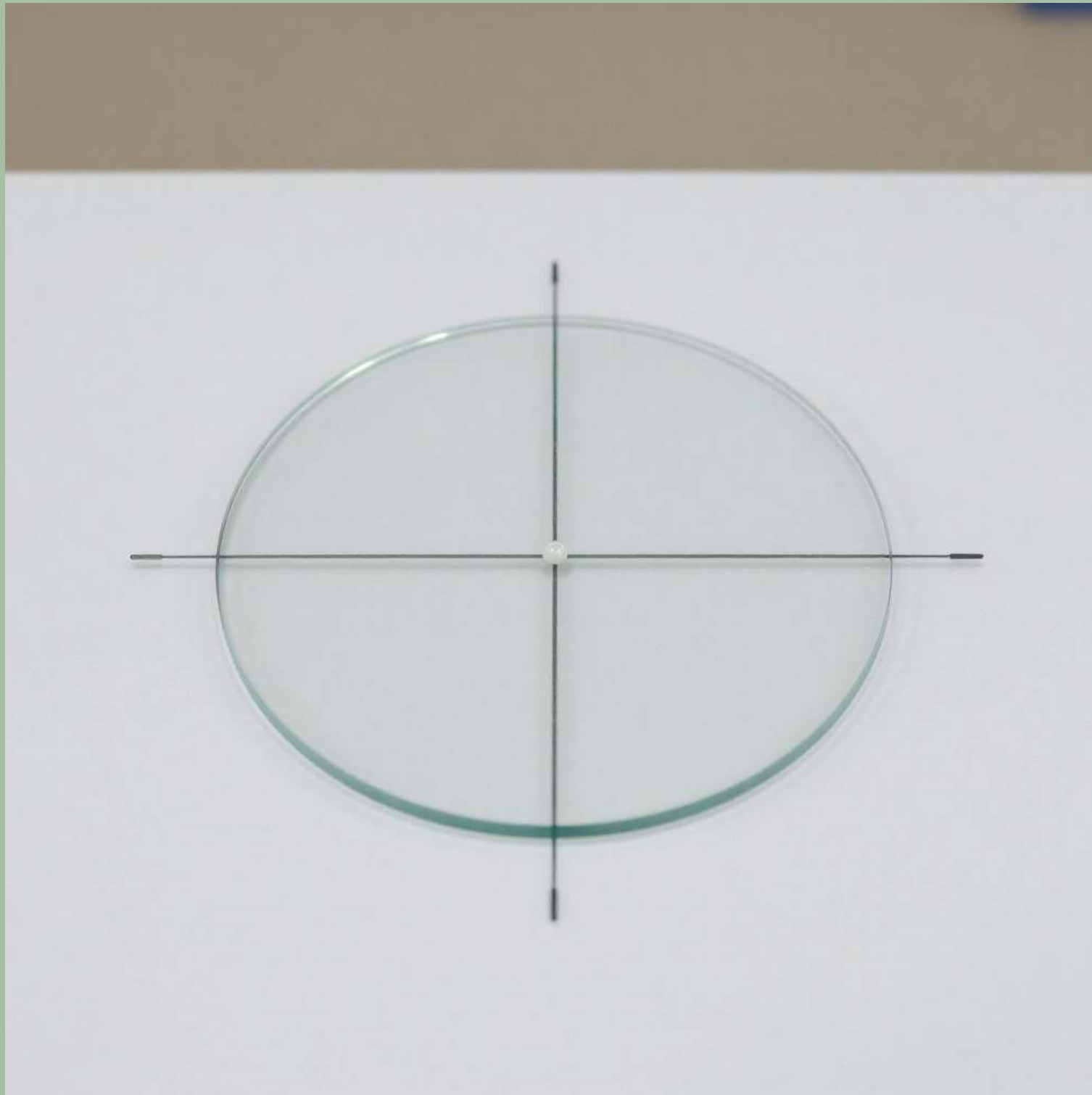
Полные обороты

Углы 450° , 765° и другие большие значения тоже допустимы. Чтобы понять их положение, нужно выделить число полных оборотов и оставить только «остаток» от поворота.

Единые правила

Для всех таких углов действуют одни и те же правила. Поэтому синус, косинус и тангенс можно находить не только для привычных углов, но и для любых поворотов.

Едини́чная окру́жность и координаты точки



Что это за окружность

Едини́чная окру́жность расположена в начале координат и имеет радиус 1. Она служит удобной моделью, где каждый угол связан с положением одной точки.

Точка пересечения

Конечная сторона угла пересекает окружность в точке M с координатами x и y . Именно эта точка показывает, куда «пришел» луч после поворота.

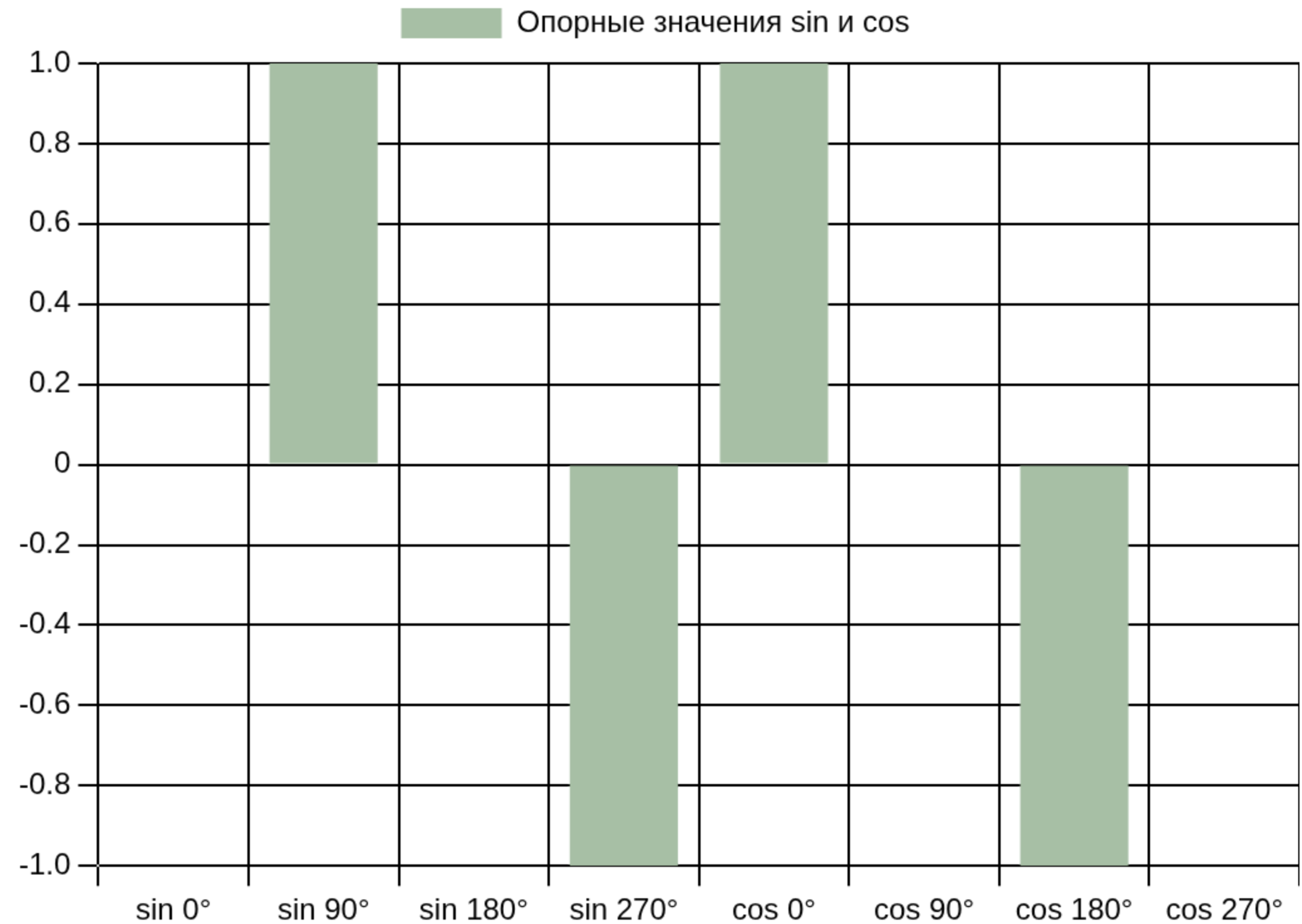
Связь с функциями

Координата x соответствует косинусу угла, а координата y — синусу. Поэтому значения тригонометрических функций можно читать прямо по положению точки на окружности.

Как меняются $\sin$ и $\cos$ на основных углах

Эти точки помогают быстро увидеть, как координаты меняются при повороте на четверть и половину оборота.

Значения повторяются по кругу и полностью согласуются с координатами точки на единичной окружности.



Опорные значения тригонометрических функций для 0° , 90° , 180° и 270° ; учебный курс геометрии.

Определение синуса и косинуса

01 Синус как ордината

Для угла α на единичной окружности синусом называют у-координату точки. Это определение не зависит от формы треугольника и работает для любого угла.

02 Косинус как абсцисса

Косинус угла α равен х-координате точки на окружности. Так можно сразу связывать значение функции с расположением точки слева, справа, выше или ниже оси.

03 Не только острые углы

Новые определения подходят не только для углов в прямоугольном треугольнике. Они позволяют рассматривать углы больше 360° и отрицательные углы без изменения правил.

04 Универсальный способ

Если известна точка на единичной окружности, можно найти $\sin$ и $\cos$ любого угла. Поэтому окружность становится главным инструментом для вычислений и проверки ответов.

Тангенс и котангенс через синус и косинус

01 Тангенс угла

Тангенс определяют как отношение $\sin \alpha$ к $\cos \alpha$. Он показывает, как связаны вертикальная и горизонтальная координаты точки на окружности.

03 Когда нет значения

Тангенс не существует, если $\cos \alpha = 0$, а котангенс — если $\sin \alpha = 0$. В таких случаях деление на ноль невозможно.

02 Котангенс угла

Котангенс равен отношению $\cos \alpha$ к $\sin \alpha$. Эта функция обратна тангенсу по смыслу и тоже выражается через координаты точки на окружности.

04 Связь с осями

Такие ситуации возникают, когда конечная сторона угла попадает на ось координат. Тогда одна из координат точки равна нулю, и функция становится неопределенной.



Знаки тригонометрических функций по четвертям

Знак функции определяется тем, в какой четверти находится конечная сторона угла на единичной окружности.

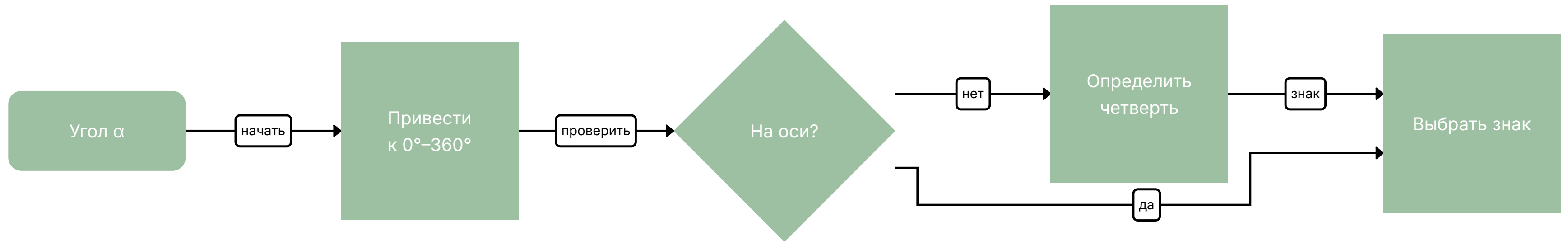
Чтобы определить знак, достаточно узнать четверть: синус связан с y , косинус — с x , а тангенс зависит от их отношения.

Четверть	sin	cos	tan
I	+	+	+
II	+	−	−
III	−	−	+
IV	−	+	−

Положение точки на единичной окружности и знаки её координат.

Как определить знак функции для любого угла

Схема основана на приведении угла, определении четверти и проверке координат точки на единичной окружности.

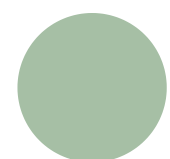


Опорные значения для основных углов



30° и 60°

Эти углы легко запомнить через значения $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$ и их перестановку. Они часто используются как опорные при вычислении значений в других четвертях.



0° и 90°

На концах четверти функции принимают особенно простые значения: 0 или 1. Эти точки помогают быстро проверять построения и ответы в задачах.



45°

Для угла 45° синус и косинус равны. Значение $\frac{\sqrt{2}}{2}$ удобно тем, что показывает симметрию равнобедренного прямоугольного треугольника.



Основа для других углов

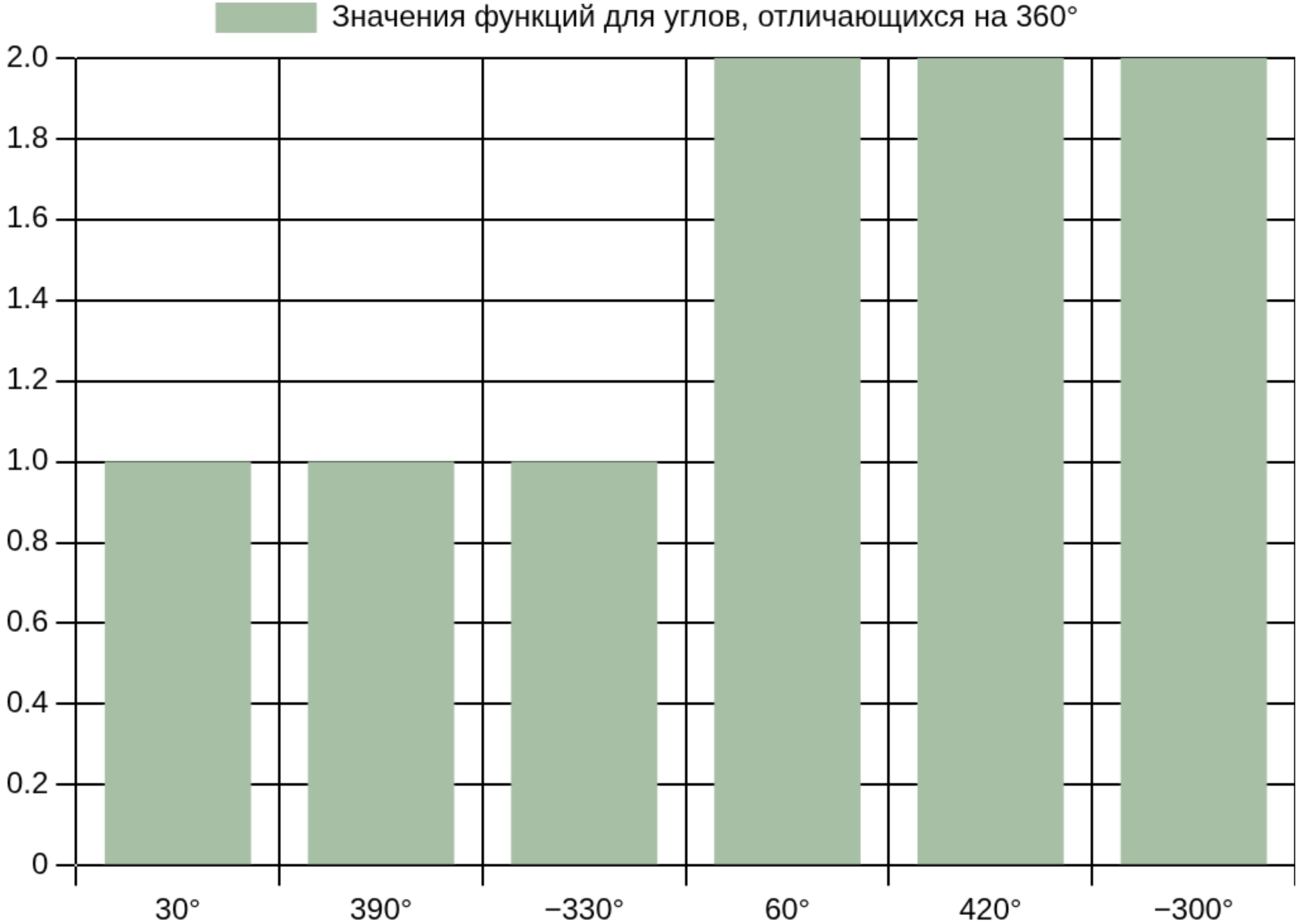
Опорные значения нужны не сами по себе, а как шаблон. С их помощью находят значения в остальных четвертях, меняя только знак по положению угла.



Одинаковые значения у углов, отличающихся на 360°

После полного оборота конечная сторона угла возвращается в то же положение, поэтому значения функций совпадают.

Углы, отличающиеся на 360° , задают один и тот же луч и дают одинаковые значения тригонометрических функций.



Школьные значения тригонометрических функций для углов 30° , 60° и их сонаправленных углов

Что происходит с отрицательными углами

01 Направление отсчёта

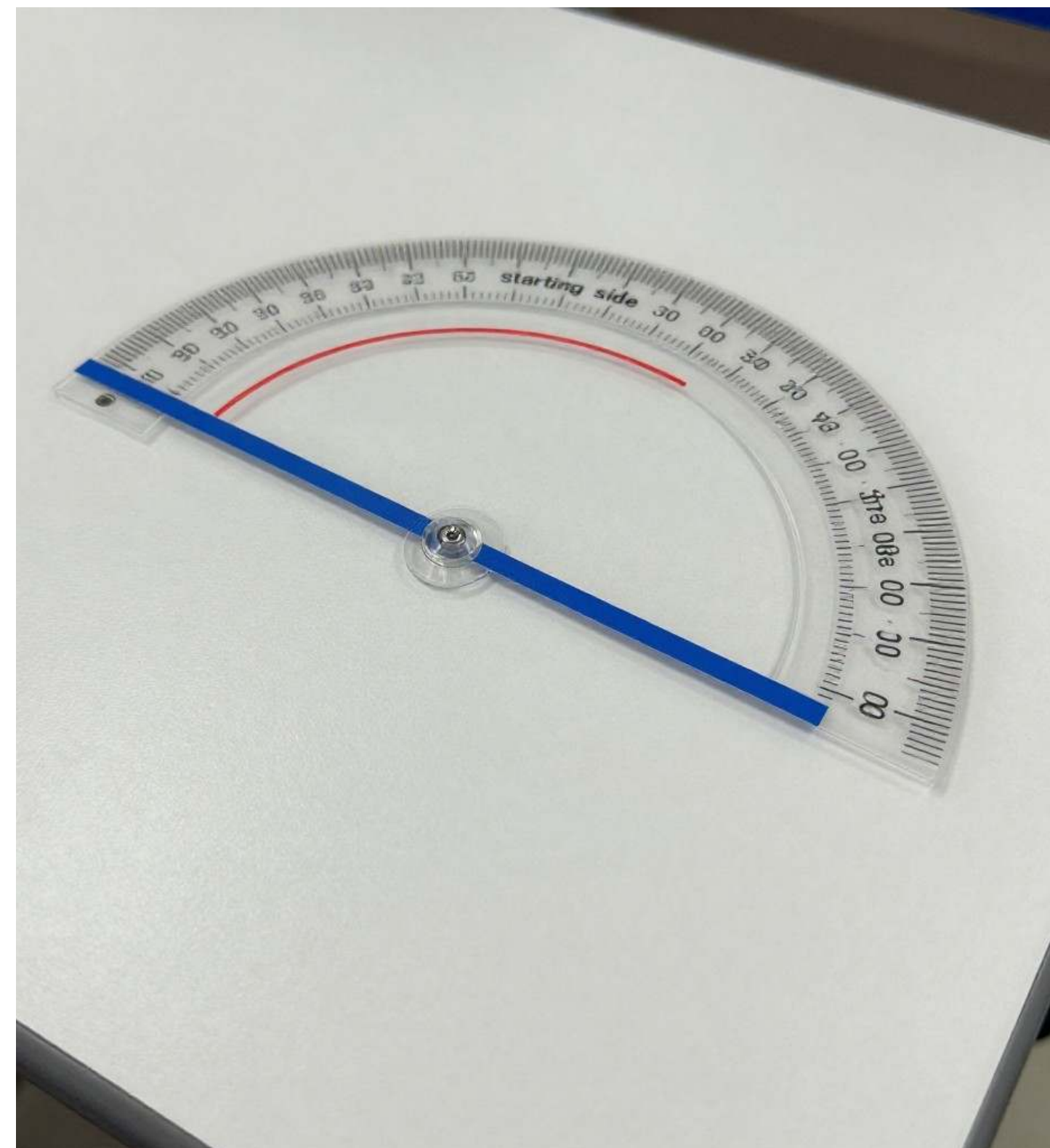
Отрицательный угол откладывают по часовой стрелке от начальной стороны. Это такой же поворот, как и положительный, но выполненный в обратном направлении.

02 Сравнение с полным оборотом

Угол -30° можно заменить углом 330° , потому что оба заканчиваются на одной и той же стороне. Так удобнее определять значения тригонометрических функций.

03 Практический смысл

Если нужно найти синус, косинус или тангенс отрицательного угла, сначала переводят его в удобный положительный вид. Затем используют четверть и известные опорные значения.



1

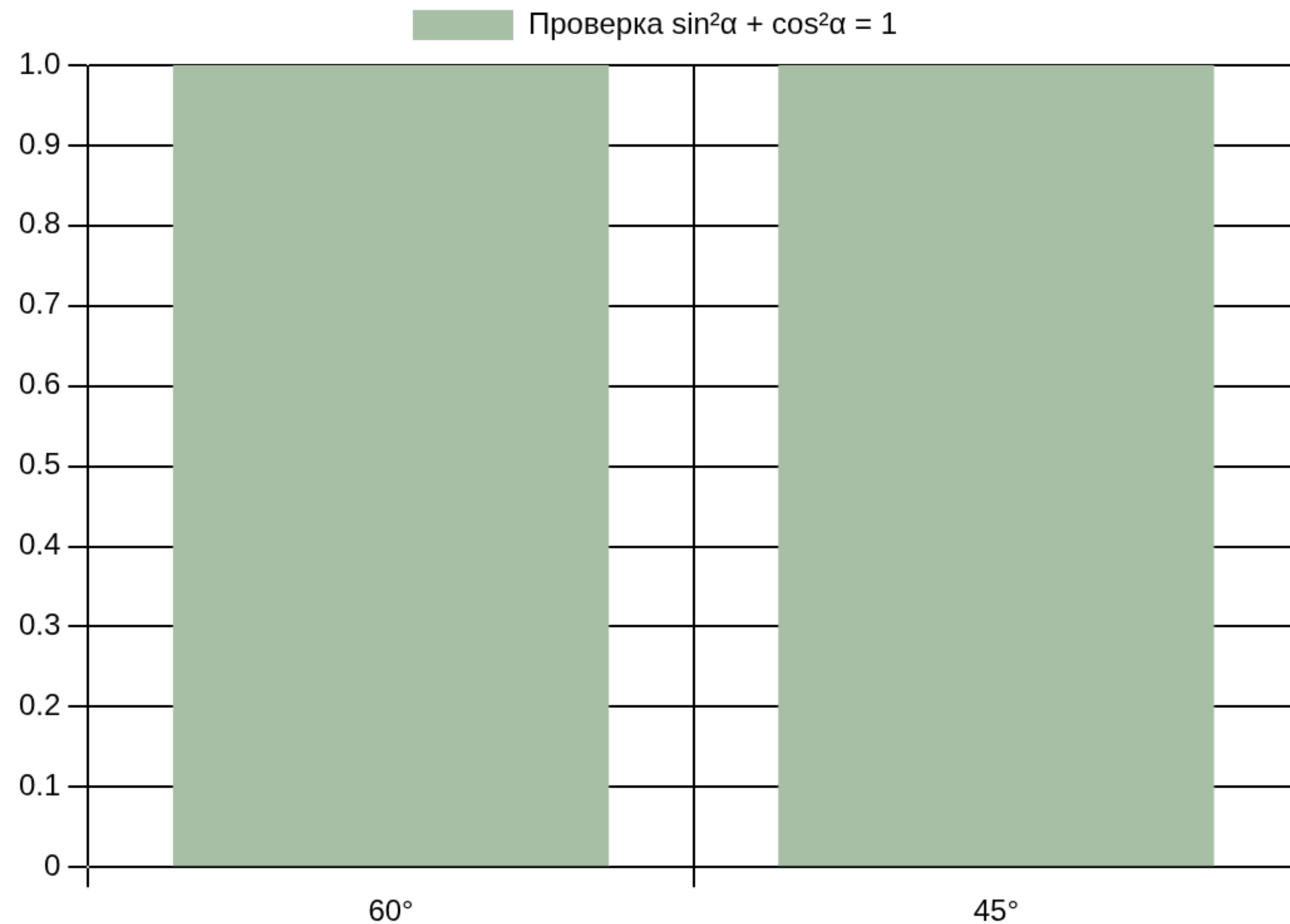
— это сумма квадратов
синуса и косинуса
любого угла.

Это равенство показывает, что
координаты точки на единичной
окружности всегда связаны одной
и той же закономерностью.

Проверка тождества на примерах

Для каждого угла отдельно возводятся в квадрат значения синуса и косинуса, а затем сравнивается их сумма.

Оба примера подтверждают одно и то же правило: сумма квадратов синуса и косинуса равна 1 для любого угла.



Табличные значения $\sin$ и $\cos$ для углов 45° и 60°

Краткая сводка свойств функций

Связь с координатами

Синус показывает вертикальное положение точки на единичной окружности, а косинус — горизонтальное. Поэтому их значения читаются прямо по координатам точки.

Ограниченные значения

Синус и косинус не выходят за пределы от -1 до 1 . Это связано с тем, что радиус единичной окружности равен 1 .

Знаки по четвертям

Знак тангенса меняется в зависимости от четверти: он положителен в I и III, а отрицателен во II и IV. Это удобно проверять по положению точки.

Повторяемость

После поворота на 360° значения синуса, косинуса и тангенса повторяются. Поэтому углы, отличающиеся на полный оборот, дают одинаковый результат.

Примеры значений для углов из разных четвертей

Угол	sin	cos
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
225°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

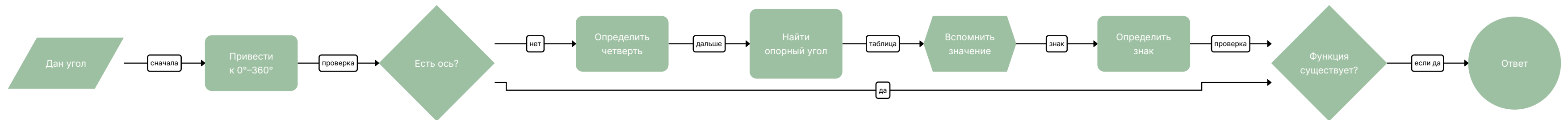
В таблице показано, как одно и то же опорное значение меняет знак в зависимости от четверти, где находится угол.

Опорное значение сохраняется, а знак определяется четвертью. Это позволяет быстро находить значения для многих углов без новых вычислений.

Табличные значения тригонометрических функций для опорных углов

Как найти значение тригонометрической функции

Алгоритм основан на приведении угла к удобному виду, выборе четверти и использовании табличных значений.



Где тригонометрия встречается в жизни

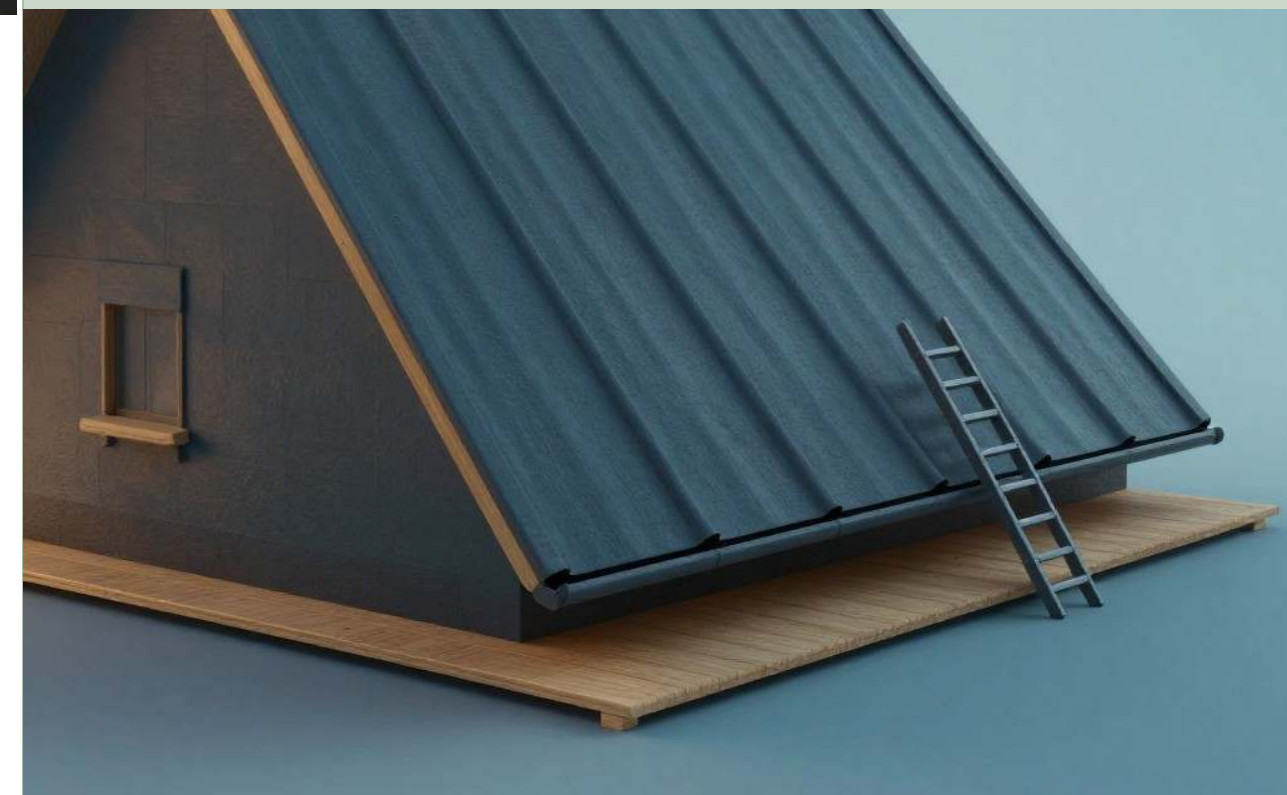
Стрелка часов и поворот

Когда стрелка часов движется по кругу, её положение удобно описывать углом. Один и тот же поворот можно рассматривать как часть полного оборота, а значит, использовать тригонометрические идеи для сравнения положений в разные моменты времени.



Крыши и наклоны

Наклон крыши, лестницы или ската можно связать с углом и его тригонометрическими функциями. Это помогает понять, насколько крутым будет подъём и как меняется форма конструкции при изменении угла.



Волны и колебания

Гладкая линия волны помогает представить, как меняются значения синуса и косинуса. Такие формы встречаются не только в математике, но и в описании звука, движения маятника и других повторяющихся процессов.



Сравнение свойств $\sin$, $\cos$, $\tan$ и $\cot$

Синус и косинус связаны с координатами точки, поэтому их значения ограничены длиной радиуса.

Синус и косинус всегда ограничены, а тангенс и котангенс требуют проверки особых случаев, где значение не существует.

- $\sin$: диапазон $-1...1$
- $\cos$: диапазон $-1...1$
- $\tan$: без ограничений
- $\cot$: без ограничений
- Тангенс не определён при $\cos \alpha = 0$
- Котангенс не определён при $\sin \alpha = 0$



Определения тригонометрических функций на единичной окружности

Что важно запомнить

Тригонометрические функции любого угла помогают описывать повороты, координаты точки и повторяющиеся изменения. Единичная окружность и четверти делают вычисления понятными, а полный оборот сохраняет значения функций.