

Свойства гомотетии: как меняются фигуры

Гомотетия изменяет размер, сохраняя форму и пропорции.



Гомотетия и подобие в 7 классе

Гомотетия показывает, как одна и та же фигура может стать больше, меньше или оказаться по другую сторону от центра, не теряя своей формы. Эта тема помогает понять подобие, масштаб и измерение на чертежах.



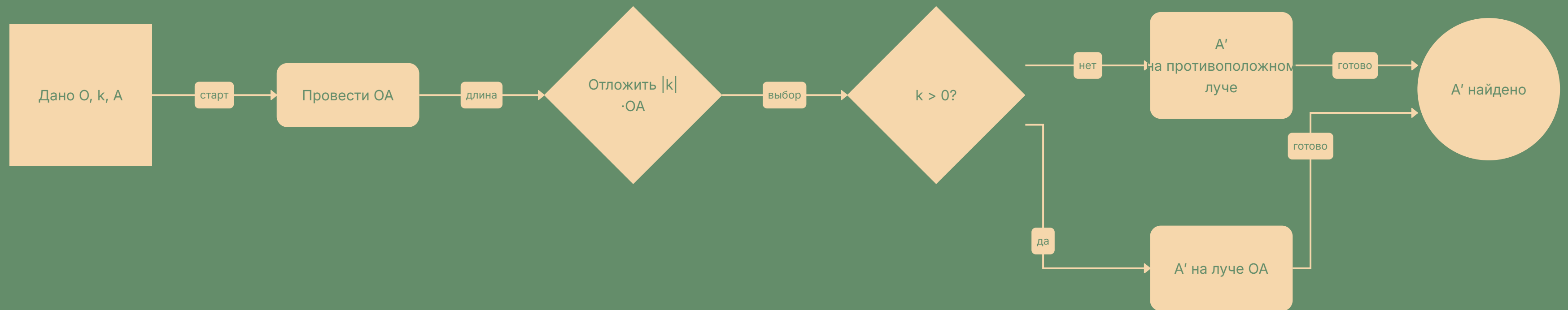
Все точки фигуры преобразуются по одному правилу относительно одного центра, поэтому образ получается строго однозначным.

Школьный курс геометрии 7 класса:
определение гомотетии



Как строится образ точки при гомотетии

Построение выполняется от центра O по заданному коэффициенту k .



Что сохраняется при гомотетии

Углы не меняются

Соответствующие углы исходной фигуры и её образа остаются равными, поэтому рисунок не искажается. Именно это позволяет говорить о сохранении формы при изменении размеров.

Параллельность сохраняется

Если стороны или прямые были параллельны, после гомотетии они тоже останутся параллельными. Фигура как будто «растягивается» от центра, но не ломается и не поворачивается случайным образом.

Точки лежат на одной линии

Коллинеарные точки переходят в коллинеарные: они продолжают располагаться на одной прямой. Это удобно при построении многоугольников, потому что направление каждой вершины задаётся однозначно.

Пропорции совпадают

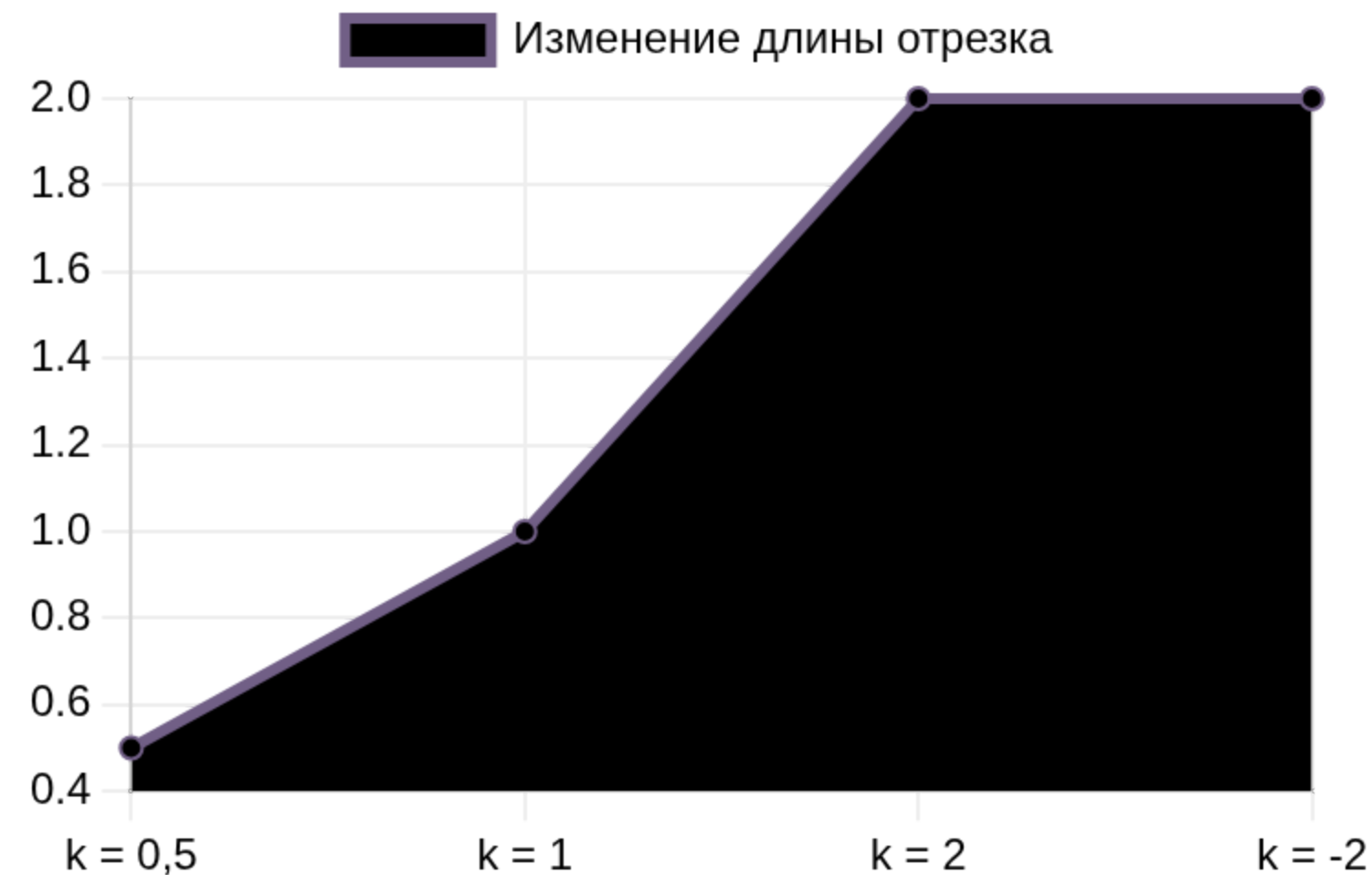
Все соответствующие длины меняются одинаково и зависят только от коэффициента k . Поэтому полученная фигура всегда подобна исходной, а отношение её сторон остаётся постоянным.



Как меняются длины при разных значениях k

Знак коэффициента задаёт сторону от центра, а модуль — величину изменения отрезка.

Чем больше $|k|$, тем сильнее меняется длина; при отрицательном k добавляется перенос на другую сторону от центра.



Свойства гомотетии и их следствия

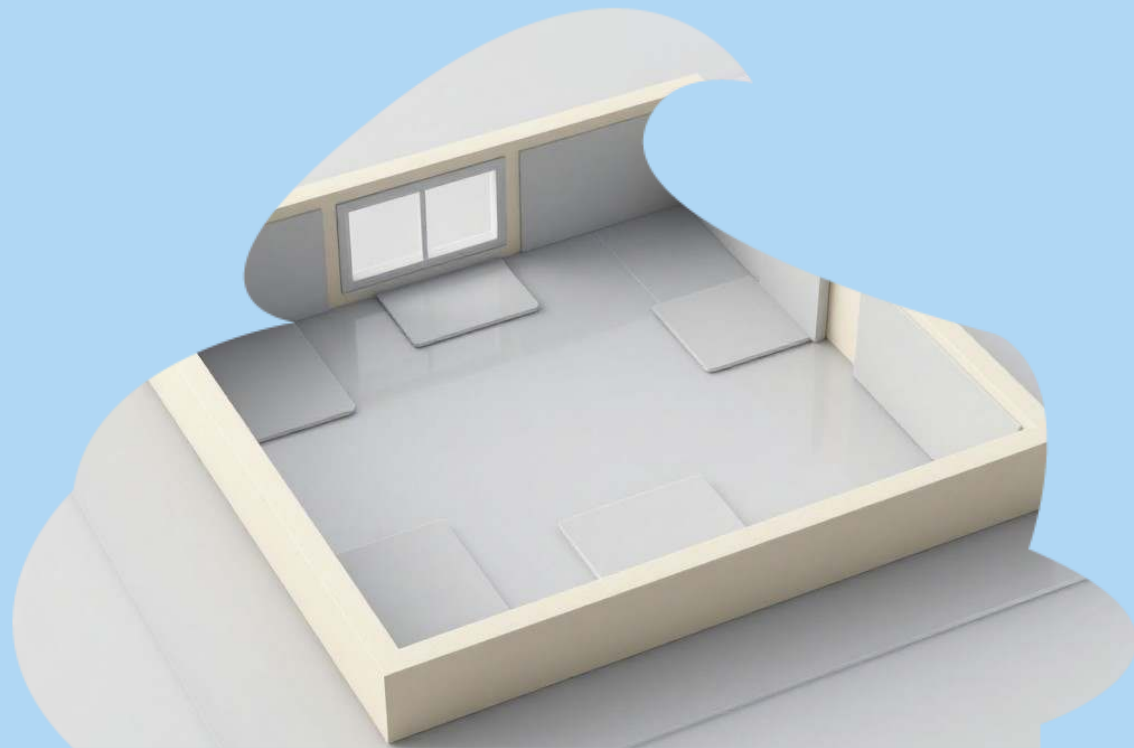
Краткая таблица показывает, что именно сохраняется и как это проявляется в построениях.

Гомотетия сохраняет форму, но изменяет размеры пропорционально коэффициенту. По этой причине её удобно использовать для подобных фигур и чертежей.

Школьный курс геометрии 7 класса; свойства гомотетии

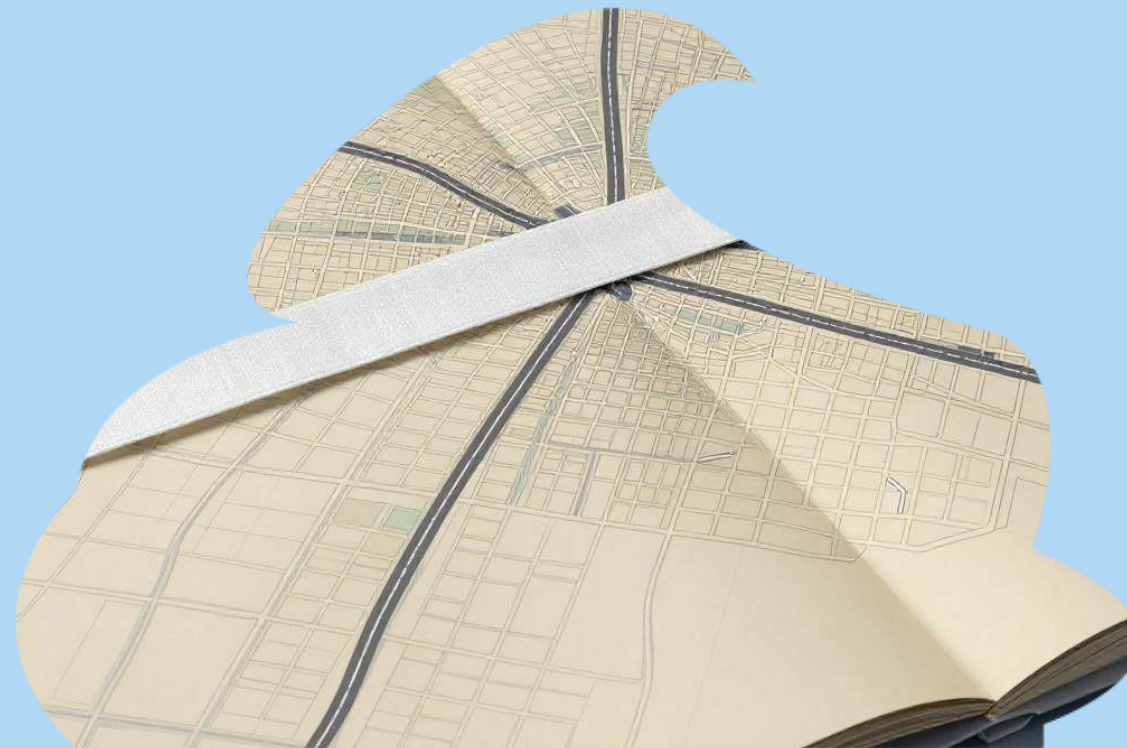
Свойство	Что происходит	Пример
Углы	равны	$30^\circ \rightarrow 30^\circ$
Длины	в $ k $ раз	4 см $\rightarrow$ 8 см
Параллельность	сохраняется	не пересекаются

Гомотетия в чертеже и на картах



План комнаты на листе

Чтобы уместить большую комнату на бумаге, все размеры уменьшают в одном масштабе. Тогда стены, окна и двери сохраняют взаимное расположение, а план остаётся похожим на реальный объект.



Карта и расстояния

На карте города линии дорог и контуры кварталов изображают в уменьшенном виде. Масштаб позволяет измерять расстояния на листе и переводить их в реальные значения без изменения формы объектов.



Макет здания

Почему фигуры остаются подобными



1

1. Соответствующие стороны

Стороны исходной фигуры и её образа изменяются пропорционально одному коэффициенту. Поэтому любая новая сторона сохраняет то же отношение к другой соответствующей стороне, что и раньше.



2

2. Равенство углов

Все соответствующие углы остаются равными, а значит, форма не искажается. Именно поэтому после гомотетии фигура выглядит как точная копия, только другого размера.



3

3. Периметр и площадь

Периметр меняется в $|k|$ раз, а площадь — в k^2 раз. Например, при увеличении стороны квадрата в 3 раза его площадь возрастает уже в 9 раз.



4

4. Итог для подобия

Сохранение углов и пропорциональность сторон доказывают подобие исходной и полученной фигур. Гомотетия меняет размер, но не разрушает геометрическое сходство между ними.

Связь коэффициента и площади

Площадь зависит не линейно, а квадратично, поэтому растёт или уменьшается быстрее, чем длина стороны.

Формула $S' = k^2 S$ показывает, что даже небольшое изменение коэффициента сильно влияет на площадь фигуры.



Отрицательный коэффициент гомотетии

1

Масштаб по модулю

Модуль коэффициента $|k|$ показывает, во сколько раз изменятся расстояния в образе. Если $|k|$ больше 1, фигура увеличивается, а если меньше 1 — уменьшается.

2

Переход через центр

При отрицательном k каждая точка образа оказывается на противоположной стороне от центра O . При этом направление луча меняется, хотя пропорции фигуры сохраняются.

3

Частный случай $k = -1$

Если k равно -1, размер фигуры не меняется. Это центральная симметрия: точка O становится серединой отрезка AA' , а фигура словно отражается через центр.

4

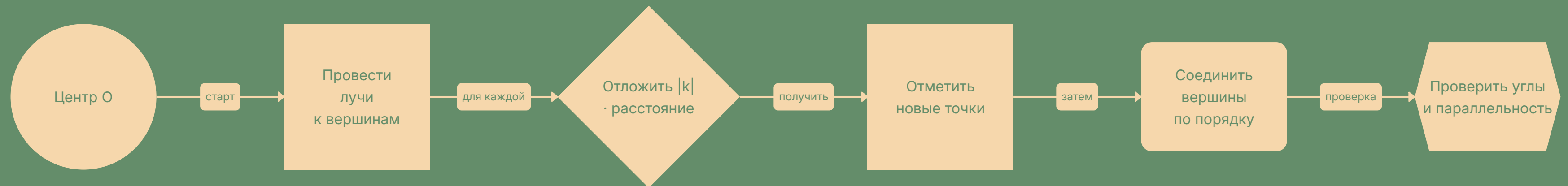
Что важно помнить

Знак коэффициента отвечает за расположение образа, а модуль — за размер. Поэтому при одном и том же $|k|$ можно получить одинаковую по форме, но иначе расположенную фигуру.


$$k = -1$$

Алгоритм построения многоугольника при гомотетии

Последовательность построения образа многоугольника с центром O и коэффициентом k



Примеры вычислений при гомотетии

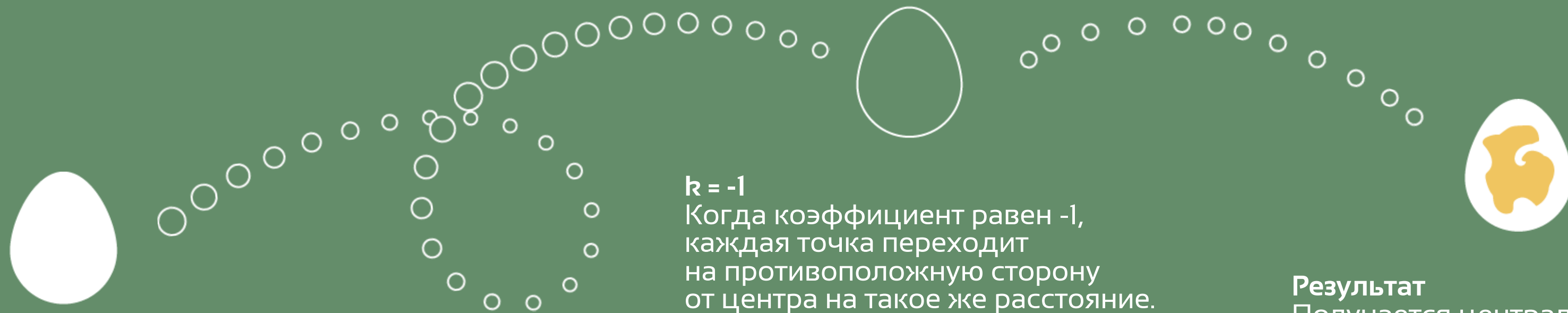
Небольшие расчёты показывают, как коэффициент влияет на длину и положение образа.

Длина меняется по модулю коэффициента, а отрицательный знак меняет только сторону от центра, не саму величину расстояния.

Школьные примеры по теме «Гомотетия»

Объект	Длина	k	Новая длина
Отрезок	6 см	2	12 см
Отрезок	10 см	0,5	5 см
Сторона	8 см	-3	24 см

Гомотетия и центральная симметрия



Общий случай

При гомотетии фигура меняет размер относительно центра O , а положение каждой точки определяется одним и тем же коэффициентом.

$k = -1$

Когда коэффициент равен -1 , каждая точка переходит на противоположную сторону от центра на такое же расстояние.

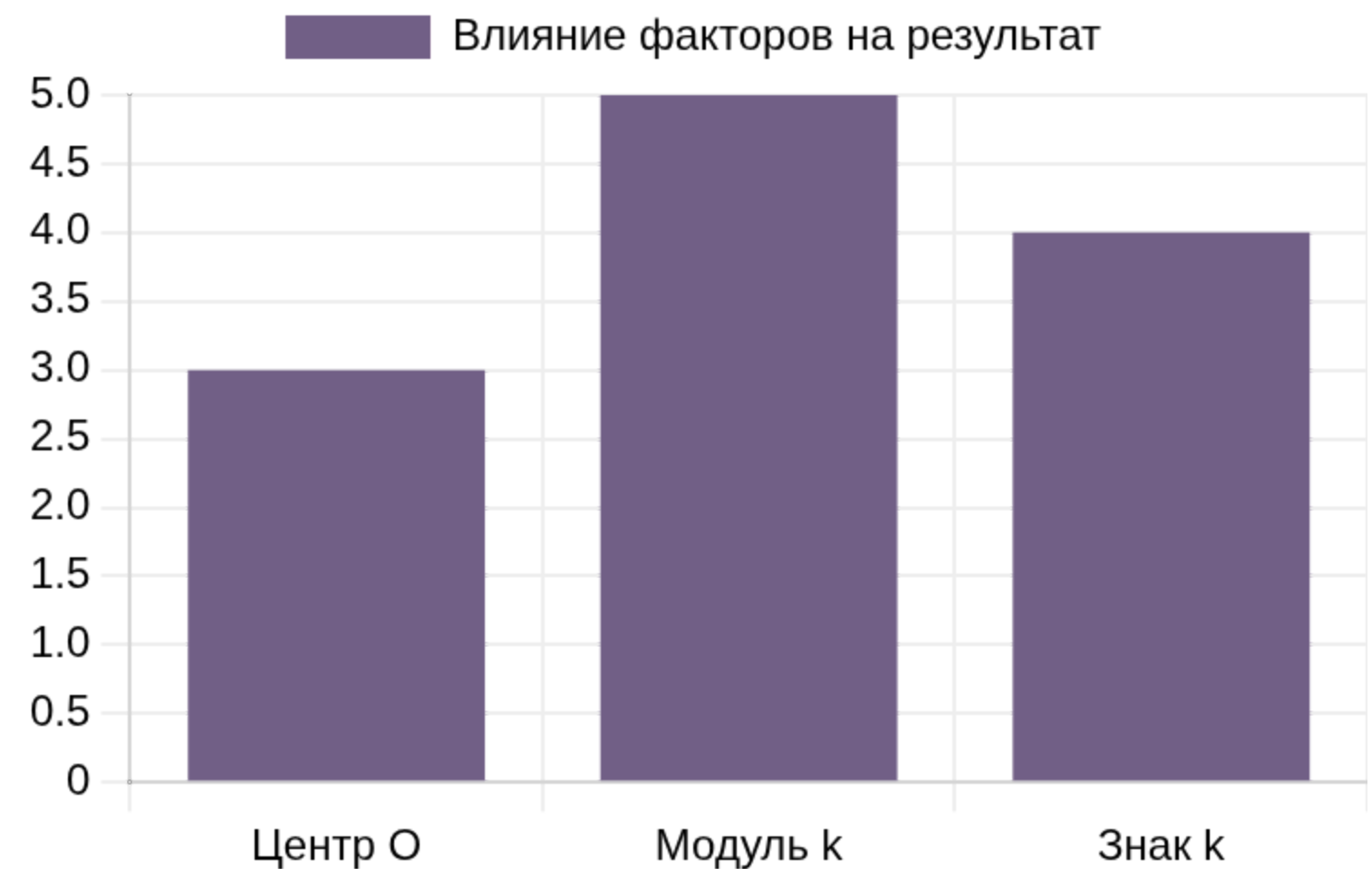
Результат

Получается центральная симметрия: центр O становится серединой отрезка AA' для любой точки исходной фигуры.

Что влияет на результат преобразования

На построение влияет не один параметр: центр задаёт опору, а коэффициент одновременно меняет размер и расположение образа.

Модуль коэффициента сильнее всего определяет изменение размеров, а знак отвечает за сторону от центра. Центр O фиксирует всё преобразование.



Схематическая оценка факторов по теме гомотетии

Типичные ошибки при построении гомотетии

Неверный знак

Часто забывают, что при отрицательном k образ строится по другую сторону от центра. Из-за этого фигура получается в неправильном месте и не совпадает с условием.

Смешанный порядок вершин

Если соединить точки в неверной последовательности, многоугольник исказится. Вершины образа следует соединять точно в том же порядке, что и вершины исходной фигуры.

Потеря параллельности

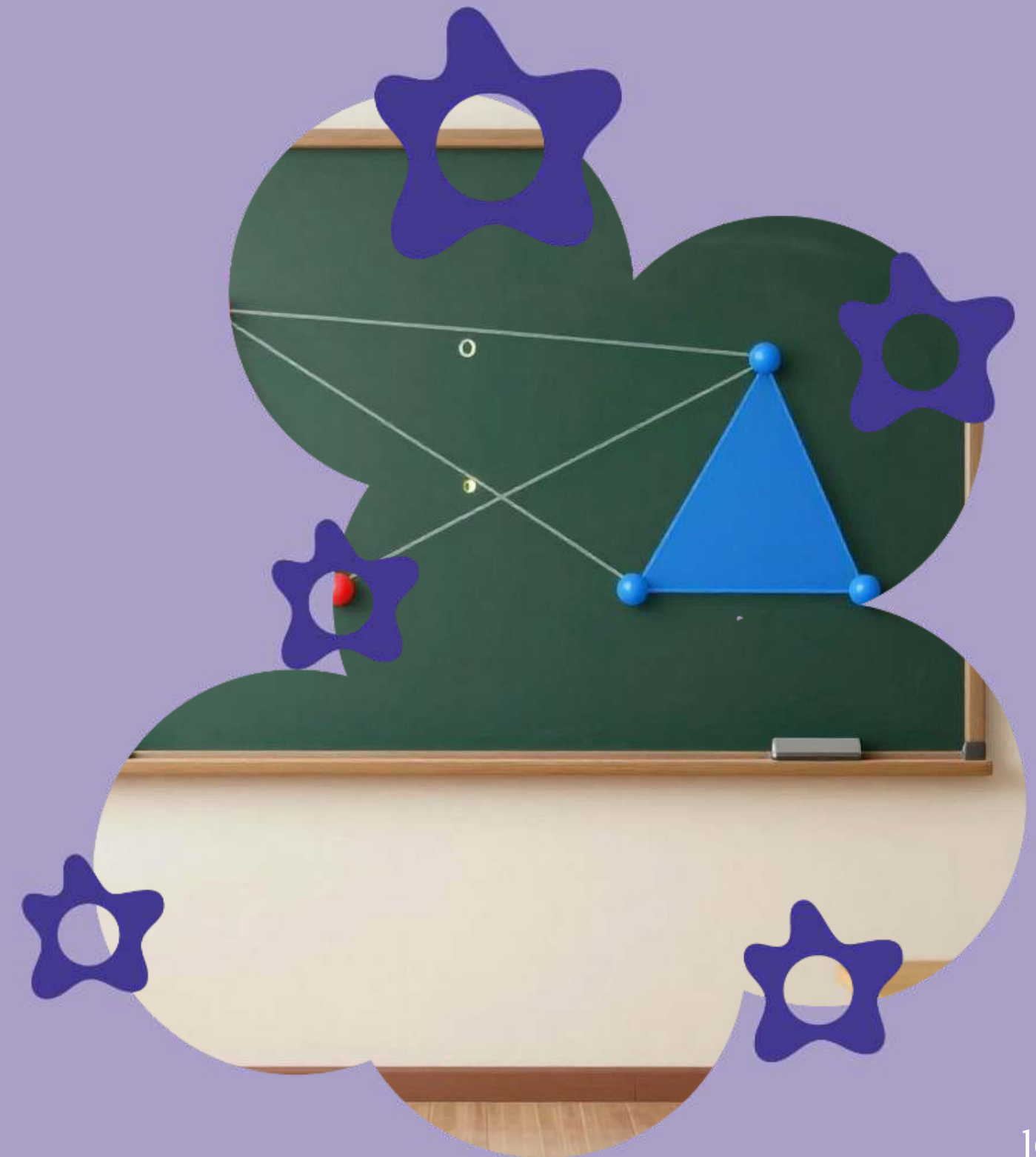
Ещё одна ошибка — не учитывать параллельность соответствующих сторон. Если линии перестают быть параллельными, значит, построение выполнено неверно и гомотетия нарушена.

Неправильный луч

Расстояние иногда откладывают не на той прямой. Для каждой вершины нужно проводить луч через центр O , иначе новая точка не будет соответствовать исходной.

Забутые углы

Некоторые считают только длины и не проверяют углы. Но при гомотетии соответствующие углы равны, и это помогает заметить ошибку в построении.



Где встречается гомотетия в жизни



Карты и планы

На картах, схемах и планах помещений реальные расстояния уменьшают по масштабу. Так большой объект удобно показать на листе бумаги без искажения формы.



Чертежи и макеты

В архитектуре и моделировании используют уменьшенные или увеличенные копии зданий, деталей и комнат. Гомотетия помогает сохранить пропорции и точность изображения.



Печать и копирование

При копировании изображение можно увеличить или уменьшить, не меняя его очертания. Это удобно для документов, рисунков и учебных материалов.



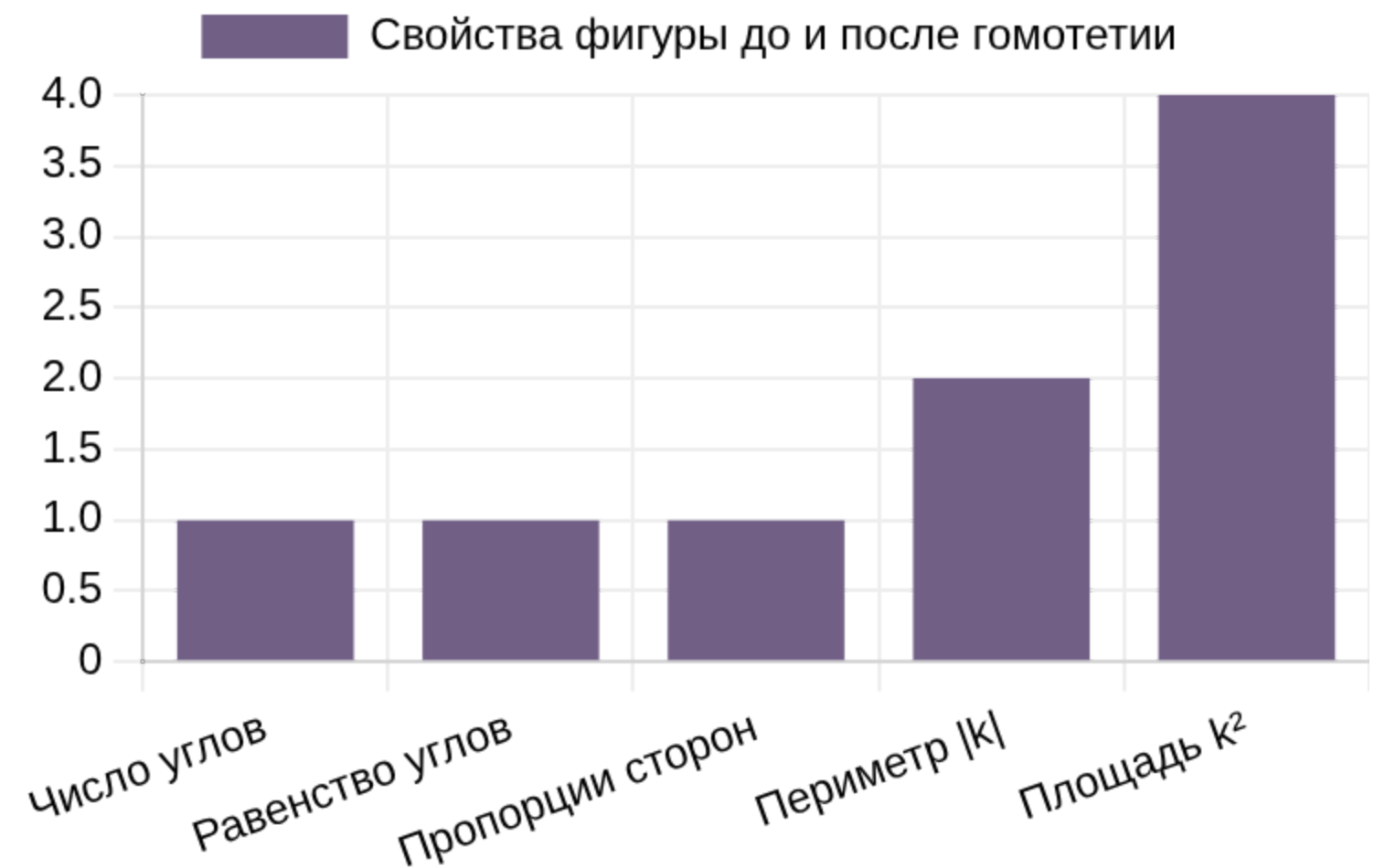
Компьютерная графика

В редакторах изображений масштабирование объектов основано на тех же идеях. Фигура остаётся узнаваемой, потому что сохраняются форма и пропорции.

Сравнение фигуры до и после гомотетии

Если коэффициент отрицательный, фигура ещё и переходит на другую сторону от центра, но её внешний вид остаётся тем же.

Гомотетия сохраняет геометрию фигуры, но по-разному изменяет линейные размеры и площадь. Именно поэтому она связана с подобием.



Ключевые формулы гомотетии

1

Расстояние до образа

Для любой точки A расстояние до её образа выражается формулой $OA' = |k| \cdot OA$. Она показывает, во сколько раз меняется удалённость точки от центра.

2

Периметр фигуры

Если вся фигура увеличивается или уменьшается одинаково, её периметр тоже меняется в $|k|$ раз. Это удобно при сравнении похожих многоугольников.

3

Площадь фигуры

Площадь после преобразования вычисляют по формуле $S' = k^2 S$. Поэтому даже небольшое увеличение стороны заметно сильнее отражается на площади.

4

Особые значения

При $k = 1$ получается тождественное преобразование: фигура не меняется. При $k = -1$ возникает центральная симметрия, а размер остаётся тем же.

5

Что связывают формулы

Эти выражения соединяют длины, периметр, площадь и коэффициент гомотетии. Благодаря им можно заранее предсказать результат построения и проверить ответ.

Гомотетия: форма сохраняется, размеры меняются

Гомотетия помогает точно менять масштаб фигур, не нарушая их форму. Она сохраняет углы и параллельность, а размеры и площадь изменяются по понятным формулам.

