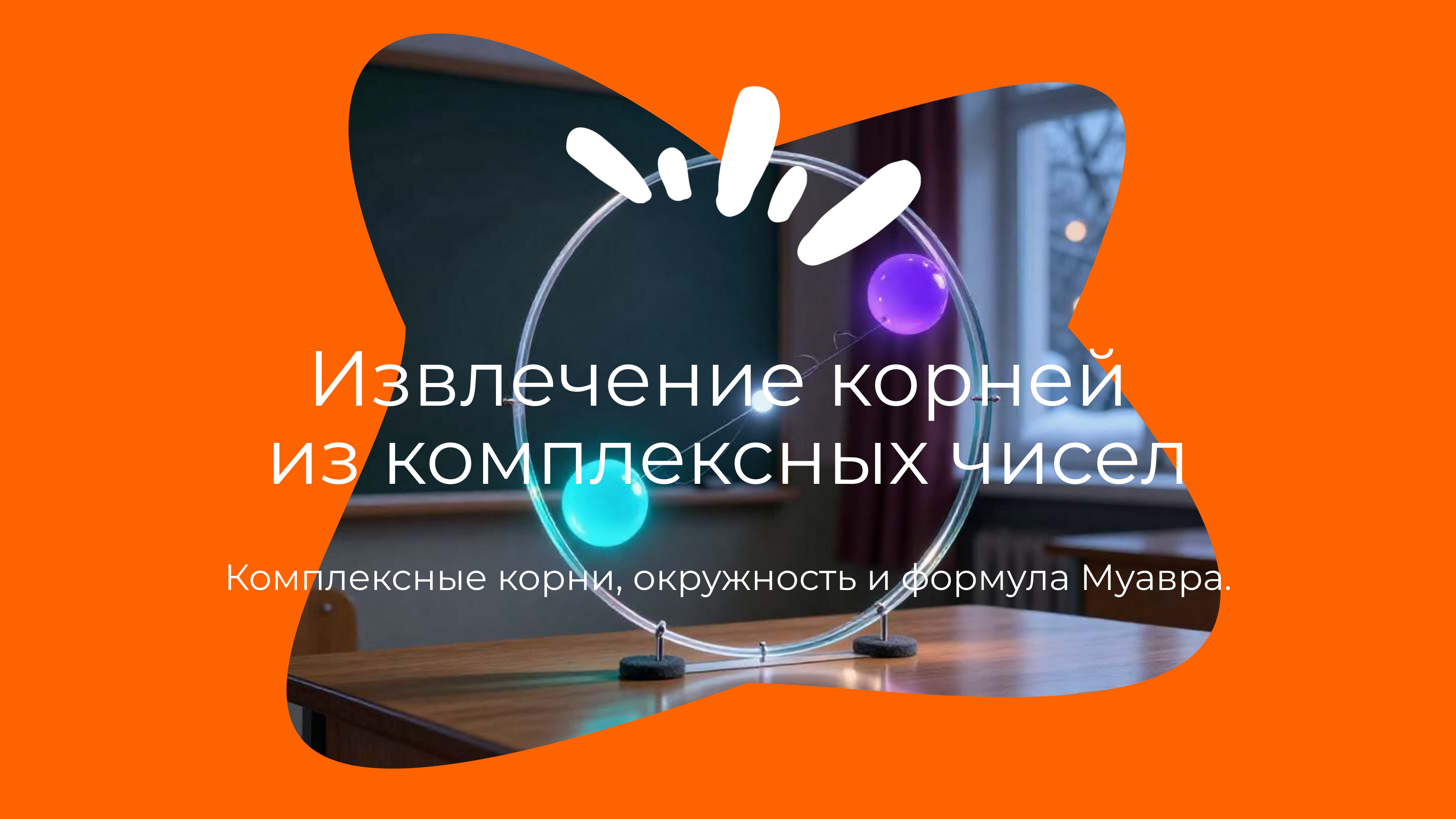




Извлечение корней из комплексных чисел

Комплексные корни, окружность и формула Муавра.

Почему эта тема важна

Эта тема завершает изучение комплексных чисел и соединяет алгебру, тригонометрию и геометрию. Она показывает, как уравнения с корнями находят решения даже там, где действительные числа бессильны.



Комплексное число в тригонометрической форме

Запись числа

Комплексное число удобно представлять как $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где r — модуль, а φ — аргумент. Такая форма сохраняет и величину, и направление.

Смысл модуля

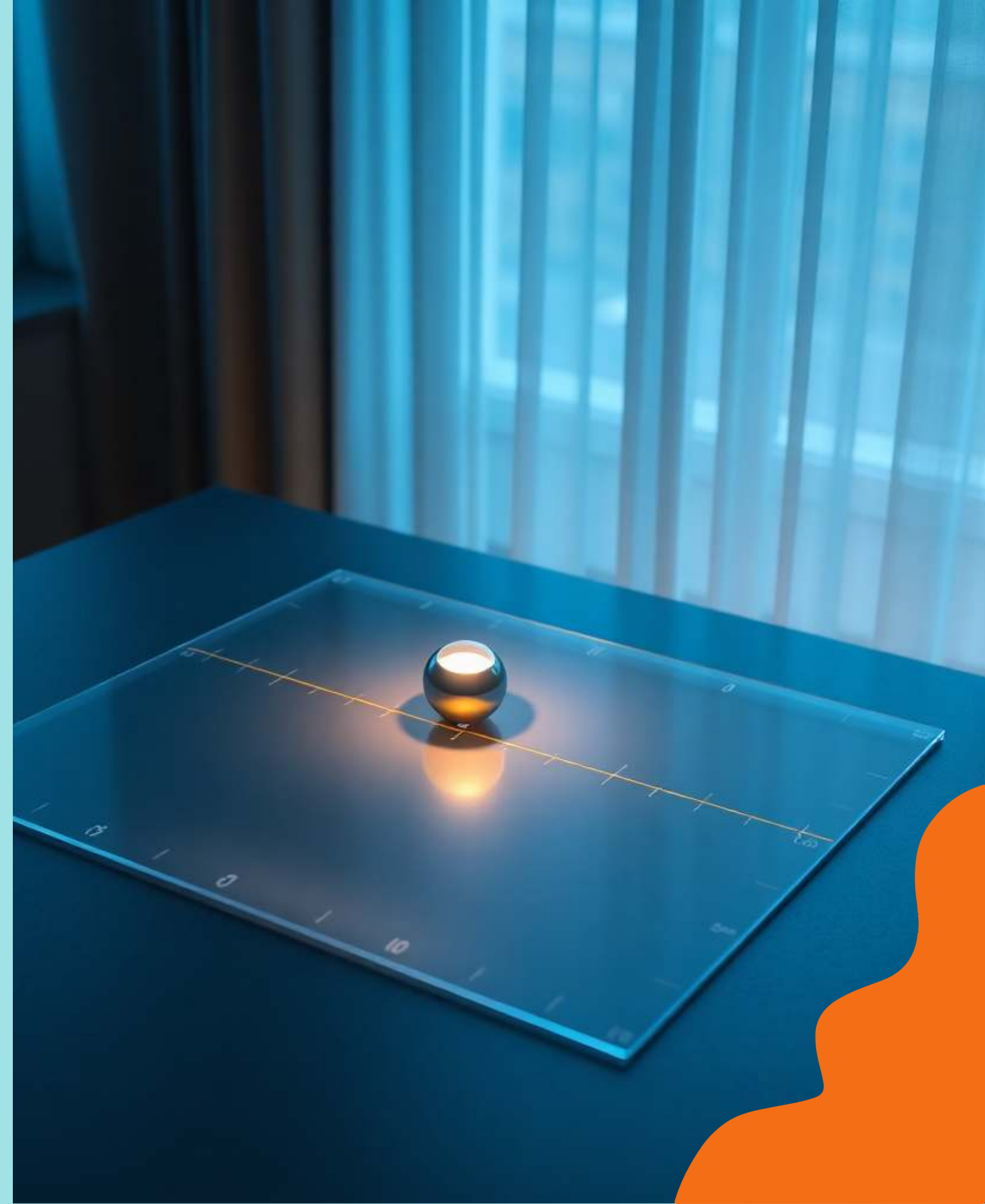
Модуль показывает расстояние от точки, изображающей число, до начала координат. Он всегда неотрицателен и задаёт «размер» комплексного числа на плоскости.

Смысл аргумента

Аргумент определяет угол между положительным направлением оси действительных чисел и радиус-вектором точки. Именно он отвечает за поворот числа на комплексной плоскости.

Почему форма удобна

В тригонометрической записи легко выполнять возведение в степень и извлечение корней. Поэтому она становится основной рабочей формой в этой теме.





Формула n-х корней комплексного числа

1. Исходная запись

01

Если число задано как $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то его n -е корни ищут не в алгебраической, а в тригонометрической форме. Это сразу делает видимыми все решения.

2. Модуль корней

02

Каждый корень имеет один и тот же модуль $\sqrt[n]{r}$. Значит, все решения лежат на окружности одного радиуса, а различаются только направлением радиус-векторов.

3. Аргументы решений

03

Аргументы корней получаются по формуле $(\varphi + 2\pi k)/n$, где $k = 0, 1, \dots, n-1$. Добавление $2\pi k$ учитывает все равнозначные углы.

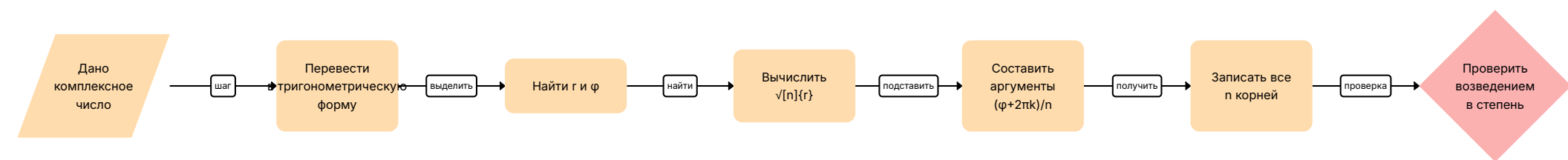
4. Итоговое число корней

04

Для ненулевого комплексного числа всегда получается ровно n различных корней. Они равномерно распределены по окружности и образуют полный набор решений.

Как находить n-е корни

Последовательность действий при работе с комплексным числом в тригонометрической форме.



Геометрический смысл корней на комплексной плоскости

Одна окружность

Все n корней одного числа располагаются на окружности с центром в начале координат. Её радиус равен $\sqrt[n]{r}$, поэтому модуль полностью определяет размер фигуры.

Равные углы

Соседние корни разделены одинаковым угловым шагом $2\pi/n$. Из-за этого точки распределяются строго равномерно и не образуют случайного набора решений.

Правильный многоугольник

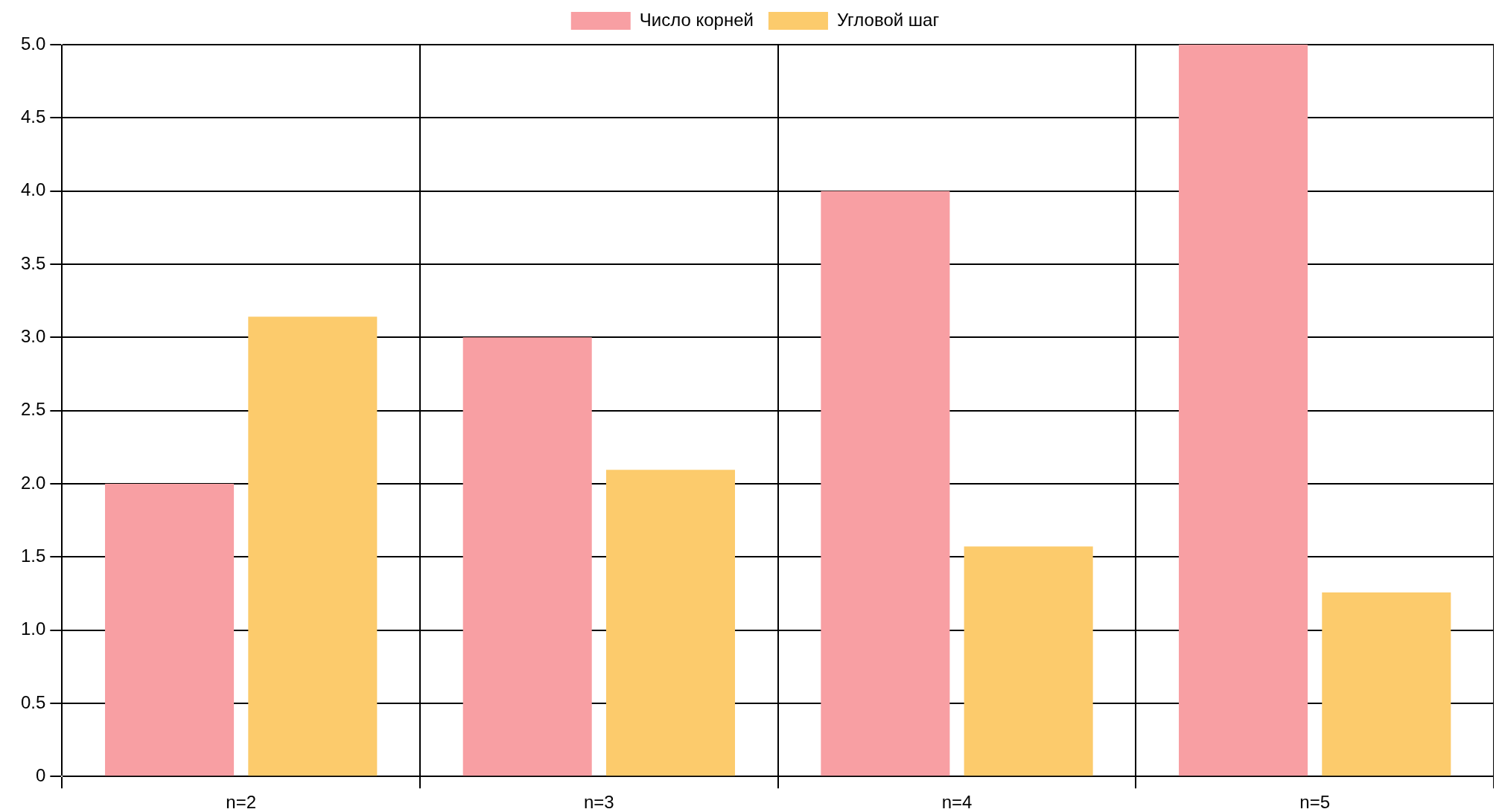
Если соединить точки-корни, получится правильный n -угольник. На чертеже удобно показать оси Re и Im , окружность и сами точки как вершины многоугольника.



Зависимость числа корней от показателя степени

Диаграмма показывает два связанных результата: число корней растёт вместе с показателем, а расстояние между ними по углу уменьшается.

Чем больше n , тем больше решений и тем плотнее они располагаются на окружности.



Вывод по формуле n -х корней комплексного числа

Корни единицы

1. Особый случай

Уравнение $z^n = 1$ имеет ровно n решений. Эти решения называют корнями единицы и рассматривают как базовый пример всей теории корней.

01

2. Общий вид

Каждый корень можно записать как $\cos(2\pi k/n) + i \sin(2\pi k/n)$, где $k = 0, 1, \dots, n-1$. Формула сразу задаёт все решения без пропусков.

02

3. Обязательный корень

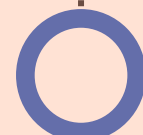
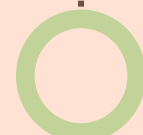
Среди корней всегда есть число 1. Оно соответствует нулевому углу, а остальные корни равномерно заполняют единичную окружность.

03

4. Симметрия решения

Корни единицы обладают строгой вращательной симметрией: при увеличении n рисунок повторяет ту же идею, но с меньшим угловым шагом между точками.

04



n	Корни	Шаг
2	1, -1	π
3	1, $-\frac{1}{2} \pm i\sqrt{3}/2$	$2\pi/3$
4	1, i, -1, -i	$\pi/2$

Корни единицы для малых значений n

Сравнение показывает, как меняются корни единицы и угловой шаг при разных показателях степени.

Во всех случаях корни лежат на одной окружности и делят её на равные дуги.

2

корня имеет число $-a$
при $a > 0$, и они равны $i\sqrt{a}$
и $-i\sqrt{a}$.

Отрицательное число в комплексной области получает два квадратных корня, хотя в действительных числах решения отсутствуют. Это подчёркивает расширение алгебры.

Применение формулы n -х корней к числу $-a$, $a > 0$

Кубические корни числа 8: по шагам

Запись числа

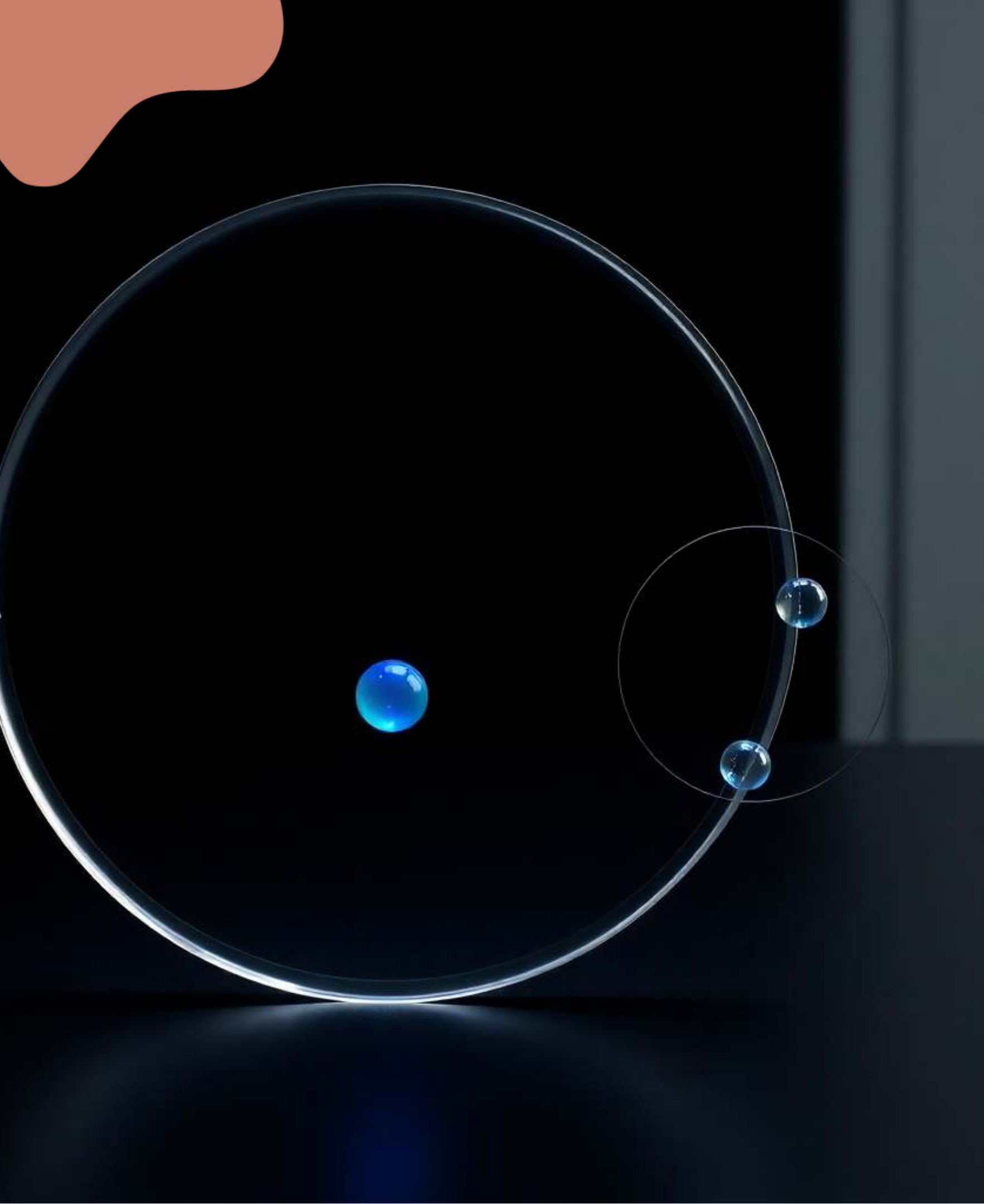
Представим 8 в тригонометрической форме: $8(\cos 0 + i \sin 0)$. У числа модуль равен 8, а аргумент равен 0, поэтому исходная запись особенно проста.

Геометрический итог

Все три корня лежат на окружности радиуса 2 и расположены через 120° . На комплексной плоскости они образуют правильный треугольник, что удобно для проверки ответа.

Нахождение корней

По формуле кубических корней получаем модуль 2. Затем подставляем $k=0,1,2$ и получаем три различных значения с аргументами $0, 2\pi/3$ и $4\pi/3$.



Пример: корни числа -1

Тригонометрическая запись

01

Число -1 удобно рассматривать как точку на единичной окружности с модулем 1 и аргументом π . Именно эта запись позволяет применять общую формулу для извлечения корней.

Квадратные корни

02

При $n=2$ получаем два решения: i и $-i$. Они симметричны относительно действительной оси и находятся на одинаковом расстоянии от начала координат.

Кубические корни

03

Для уравнения $z^3 = -1$ существует три корня, и один из них равен -1 . Остальные два располагаются на единичной окружности под углами, отличающимися на $2\pi/3$.

Нечётные степени

04

Если показатель n нечётный, число -1 обязательно является одним из n -х корней. Это следует из равенства $(-1)^n = -1$, которое сохраняется для всех нечётных степеней.

Расположение четвёртых корней единицы

Каждый корень соответствует повороту на четверть окружности. Такая симметрия делает структуру особенно наглядной при построении на комплексной плоскости.

Все четыре решения равноправны: они образуют квадрат на единичной окружности и отличаются только аргументом.

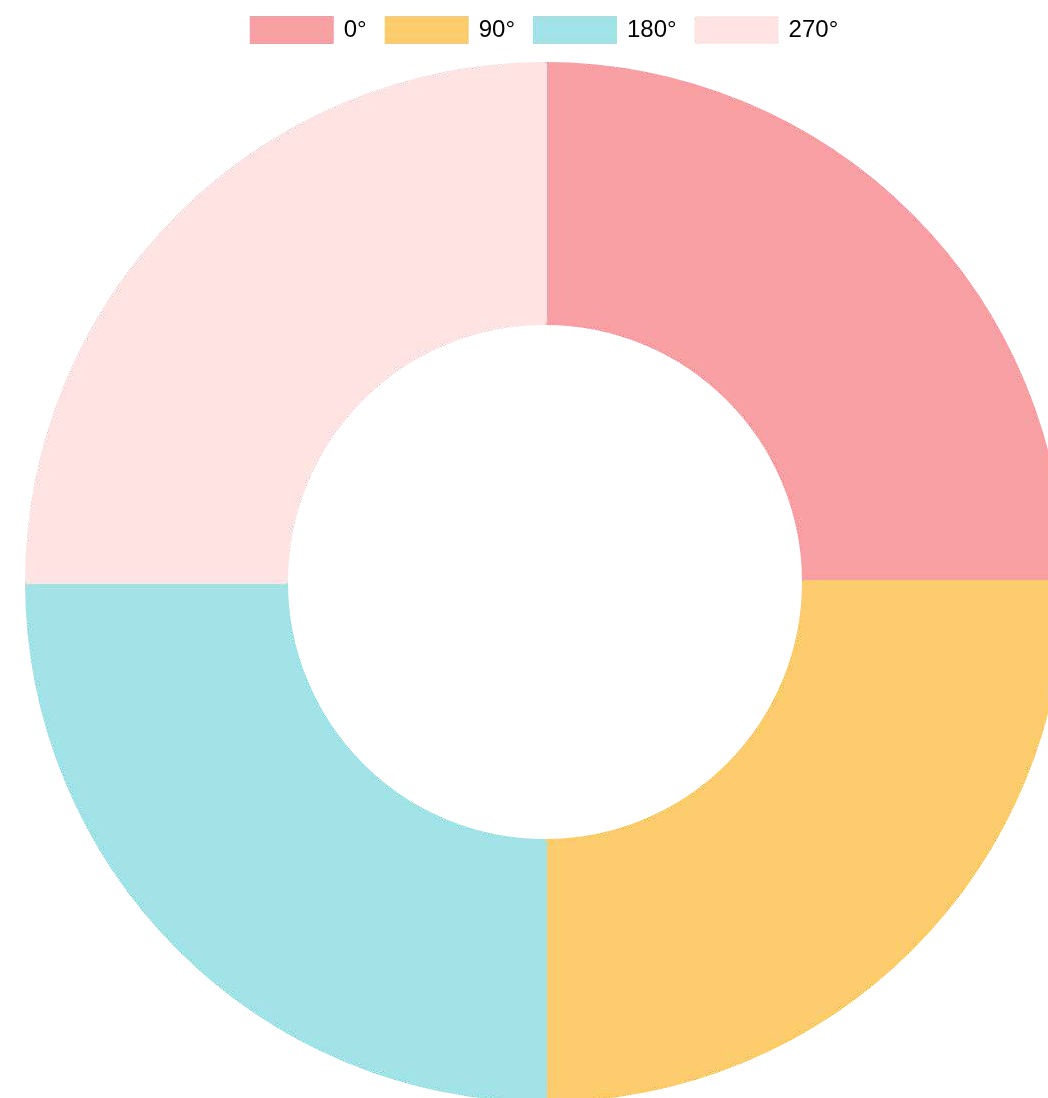


Схема по материалу темы «Извлечение корней из комплексных чисел»

Формула Муавра и её роль

01

Связь со степенью

Формула Муавра показывает, что возведение комплексного числа в степень сводится к умножению аргумента на показатель степени. Это делает тригонометрическую форму особенно удобной для вычислений.

Переход к корням

Если нужно найти корень, операция меняется на обратную: аргумент делится на n , а к нему добавляются все значения $2\pi k/n$. Так появляется полный набор решений.

02

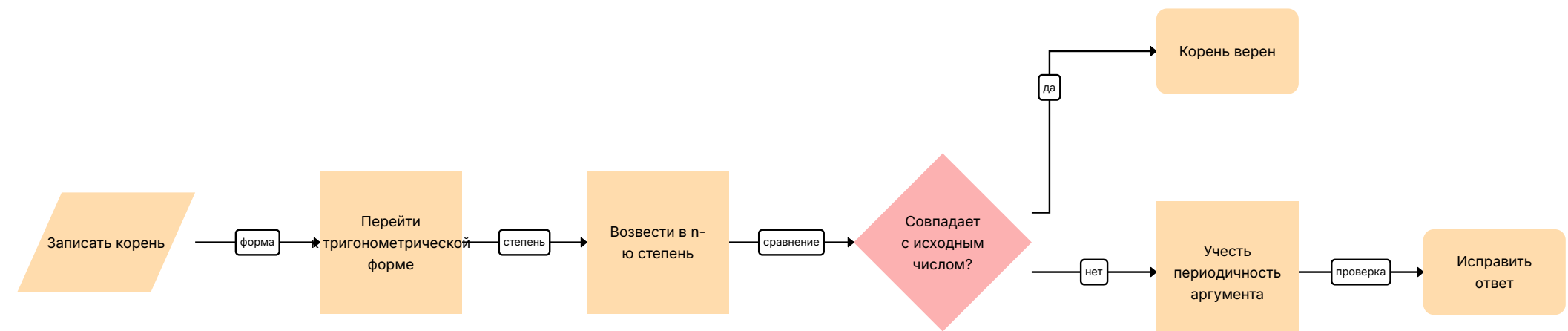
03

Основа метода

Именно формула Муавра объясняет, почему корни расположены равномерно и почему их число равно n для любого ненулевого комплексного числа. Без неё общий способ был бы неочевиден.

Проверка корня через возведение в степень

Последовательность действий
при проверке найденного n -го
корня комплексного числа



Типичные ошибки при извлечении корней

Потеря множителя $2\pi k$

Часто записывают только один аргумент и забывают добавить $2\pi k/n$. Из-за этого получают не все корни, а лишь одно из возможных решений.

Неверный аргумент

Для отрицательных чисел важно брать аргумент π , а не 0. Ошибка в выборе угла сразу искажает всю систему корней и приводит к неверной геометрии.

Путаница с модулем

Модуль задаёт расстояние до начала координат, а не угол. Если перепутать эти величины, корни окажутся на неправильной окружности или с неверным радиусом.

Пропуск части решений

Иногда находят только первый корень и останавливаются. Но при $z \neq 0$ нужно перечислить все n значений, иначе ответ считается неполным.



Вещественные и комплексные корни: сравнение

Сравнение показывает, как расширение области чисел меняет наличие решений и их геометрический смысл.

Комплексная область устраняет отсутствие решений для многих уравнений и даёт полное множество корней с наглядным расположением на плоскости.

Область	Решения	Геометрия
Вещественные	могут отсутствовать	числовая прямая
Комплексные	ровно n при $w \neq 0$	окружность
Пример $x^2+1=0$	нет	i и $-i$

Практическое значение темы



Алгебраические уравнения

Метод извлечения корней помогает решать уравнения, которые в действительных числах не имеют ответов. Он расширяет набор доступных решений и делает алгебру завершённое.



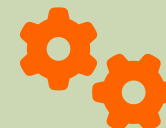
Геометрический взгляд

Тема связывает вычисления с изображением на плоскости: модуль задаёт радиус, а аргумент — поворот. Это развивает умение видеть формулу как геометрический объект.



Корни единицы и гармоники

Корни единицы лежат в основе разложения на периодические составляющие. Позднее эта идея встречается в физике, обработке сигналов и цифровых технологиях.



Навык точной работы

При решении задач ученик учится аккуратно пользоваться формулами, координатами и тригонометрической записью. Эти навыки полезны не только в алгебре, но и в смежных дисциплинах.

СВЯЗЬ ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ ТЕМЫ

Последовательность показывает, как одно понятие логично выводит следующее и превращает вычисление в понятный алгоритм.

Аргумент определяет распределение корней, модуль — их радиус, а показатель n — число решений и шаг между ними.

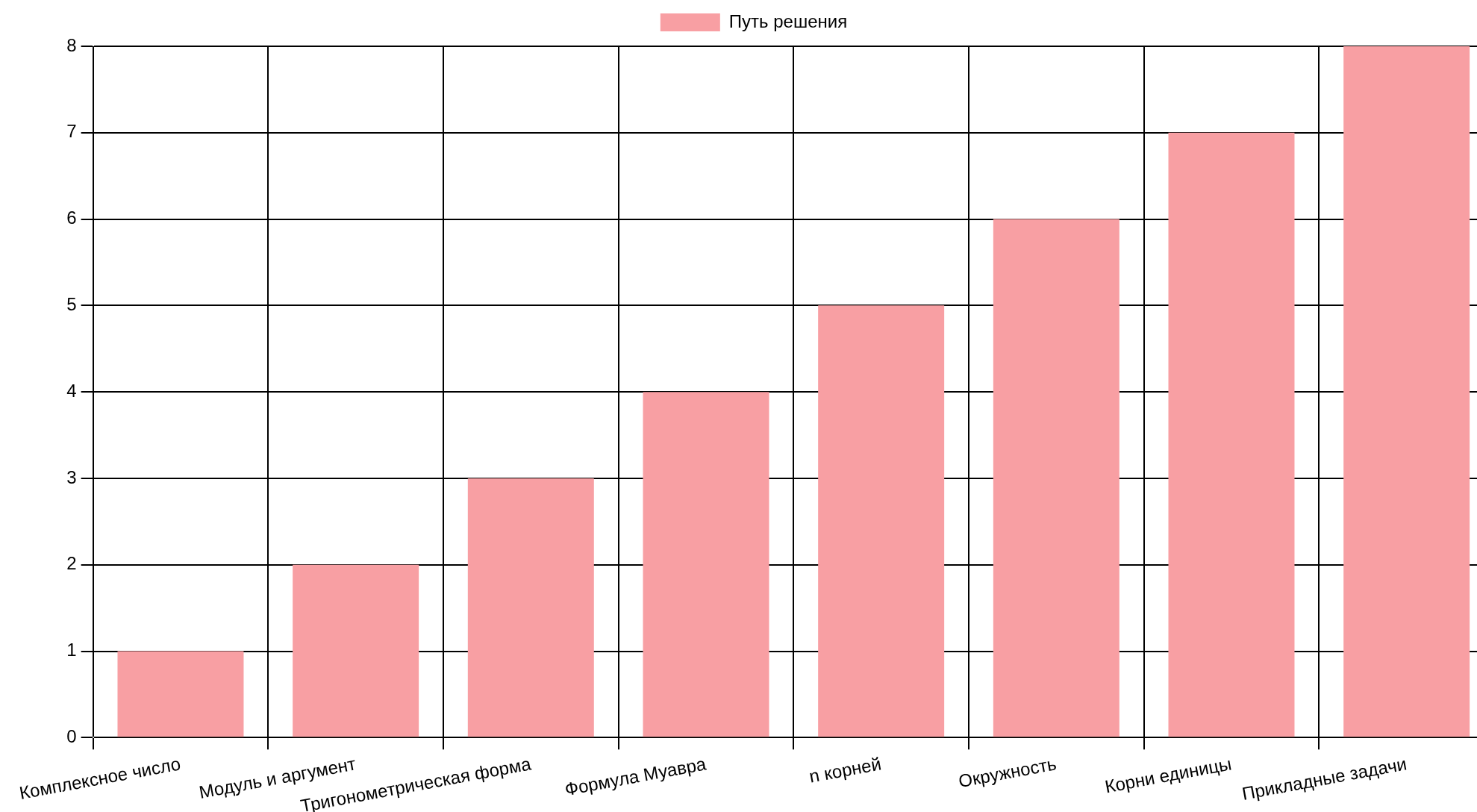


Схема связи понятий по материалу темы

Тема, которая соединяет алгебру и геометрию

Мы увидели, что извлечение корней из комплексных чисел опирается на тригонометрическую форму и формулу Муавра. Этот подход делает решения полными, наглядными и удобными для проверки.