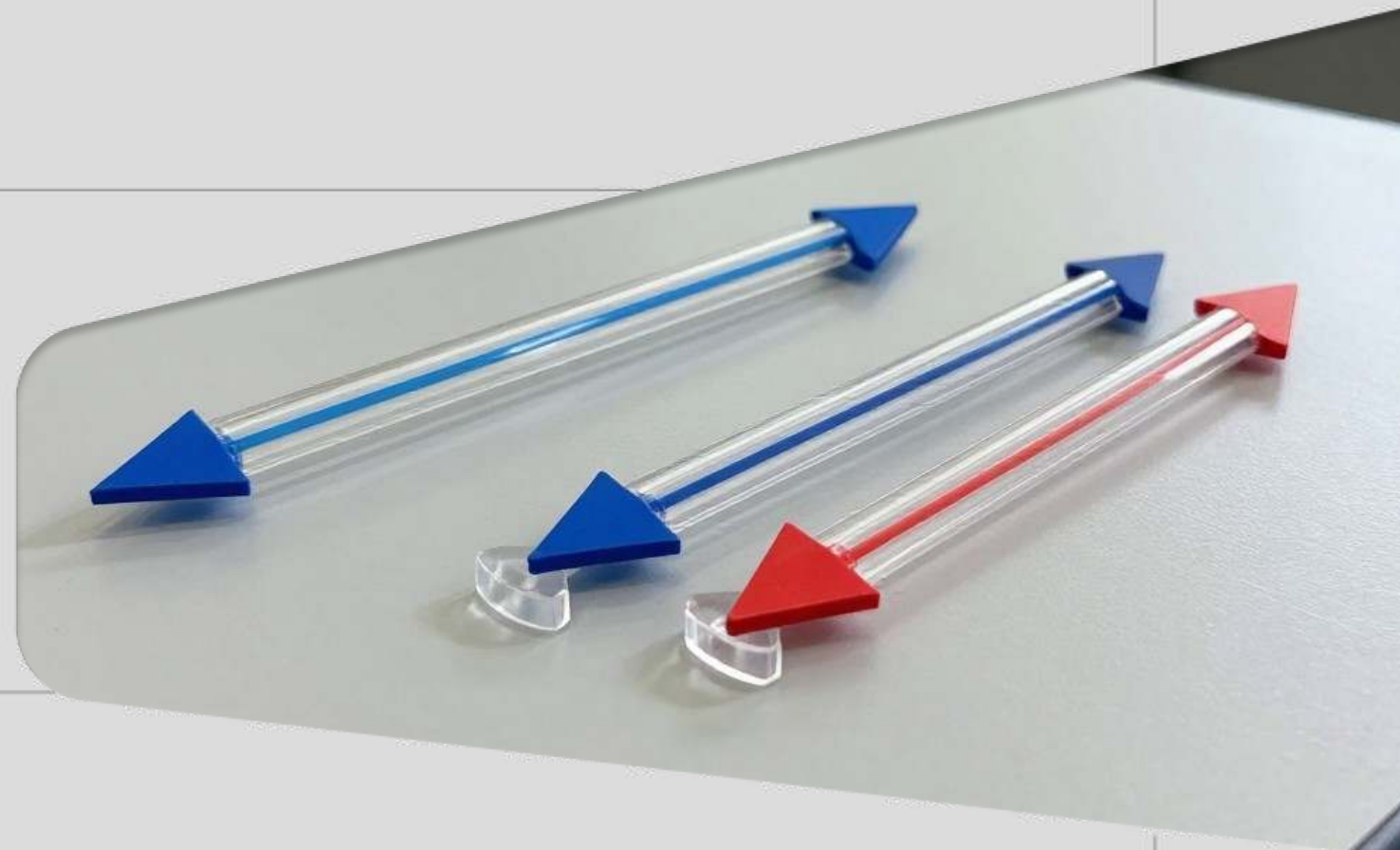


Умножение вектора на действительное число

Как число меняет длину и направление вектора?



Почему это важно в 8 классе

Это правило помогает работать с координатами, строить графики, описывать движение и сравнивать фигуры по масштабу. Оно соединяет геометрию с алгеброй и учит понимать, как числа изменяют вектор на плоскости.



Что такое вектор и как его записывают



Направленный отрезок

Вектор изображают стрелкой: у него есть начало, конец, длина и направление. Именно эти два признака отличают его от обычного отрезка.



Как обозначают

Вектор можно записать буквами a , b , AB или в координатах как $(x; y)$. Такая запись удобна для вычислений и построений.



Равные векторы

Равные векторы имеют одинаковую длину и одно направление, даже если расположены в разных местах рисунка. Их можно переносить параллельно без изменения.



Нулевой вектор

Нулевой вектор имеет длину 0 и не задаёт направления. Его получают, когда начало и конец совпадают.



Зачем это нужно

Понимание записи вектора важно для дальнейшей работы с умножением на число, потому что именно так удобно отслеживать изменение его свойств.

Смысл умножения вектора на число k

.01

Новый вектор

Произведение $k \cdot a$ обозначает вектор, полученный из исходного по правилу умножения. Число k задаёт, насколько сильно изменится вектор.

.02

Длина результата

Длина нового вектора равна $|k| \cdot |a|$. Значит, важен не только сам коэффициент, но и его модуль, который показывает размер изменения.

.03

Знак коэффициента

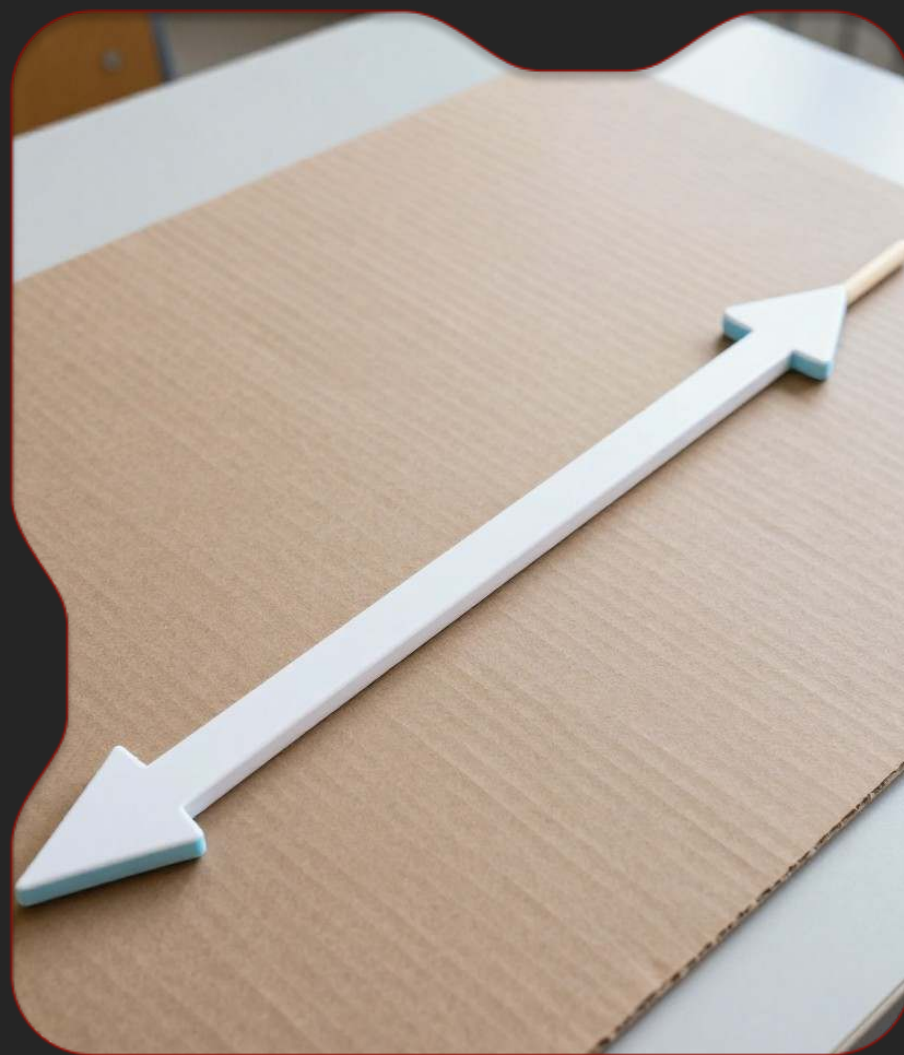
Если k положительное, направление сохраняется. Если k отрицательное, вектор поворачивается в противоположную сторону, хотя его длина определяется тем же модулем.

.04

Особый случай нуля

При $k=0$ получается нулевой вектор. Он не имеет направления, а его длина равна нулю, поэтому исходный вектор полностью исчезает.

Геометрический смысл на одном луче



Вектор на луче

Если изобразить векторы на одном луче, легко увидеть, что они отличаются только длиной. Такое сравнение помогает заметить действие коэффициента без лишних вычислений.



Удвоение

Вектор $2a$ выглядит вдвое длиннее исходного. При этом его направление остаётся тем же, потому что коэффициент положительный.



Половина длины

Вектор $0,5a$ вдвое короче a . Это наглядно показывает, как число меньше 1 сжимает вектор, не меняя его направления.



Роль числа

На рисунке хорошо видно: число управляет масштабом вектора. Оно не просто связано с координатами, а изменяет саму геометрическую длину.

Основные случаи умножения вектора на число

Таблица показывает, как знак и модуль коэффициента влияют на результат.

Знак коэффициента определяет направление, а его модуль — изменение длины.

k	Результат	Смысл
>1	Длиннее	Увеличение
$0 < k < 1$	Короче	Сжатие
$k < 0$	Противоположно	Разворот
$k = 0$	Нулевой	Исчезновение

Правило умножения вектора на действительное число, школьный курс геометрии

Частные значения коэффициента

.01

$k = 1$

При $k=1$ вектор остаётся таким же: ни длина, ни направление не меняются. Это самый простой случай, который удобно использовать для проверки записи.

.02

$k = -1$

При $k=-1$ длина сохраняется, но направление становится противоположным. Такой результат помогает быстро понять, где произошёл разворот вектора.

.03

$k = 2$

При $k=2$ вектор удваивается по длине. Этот случай показывает, как положительное число больше 1 растягивает вектор без изменения направления.

.04

$k = \frac{1}{2}$

При $k=\frac{1}{2}$ длина уменьшается в два раза. Такое значение удобно для проверки, умеем ли мы правильно сжимать вектор по масштабу.

Как зависит длина вектора от коэффициента

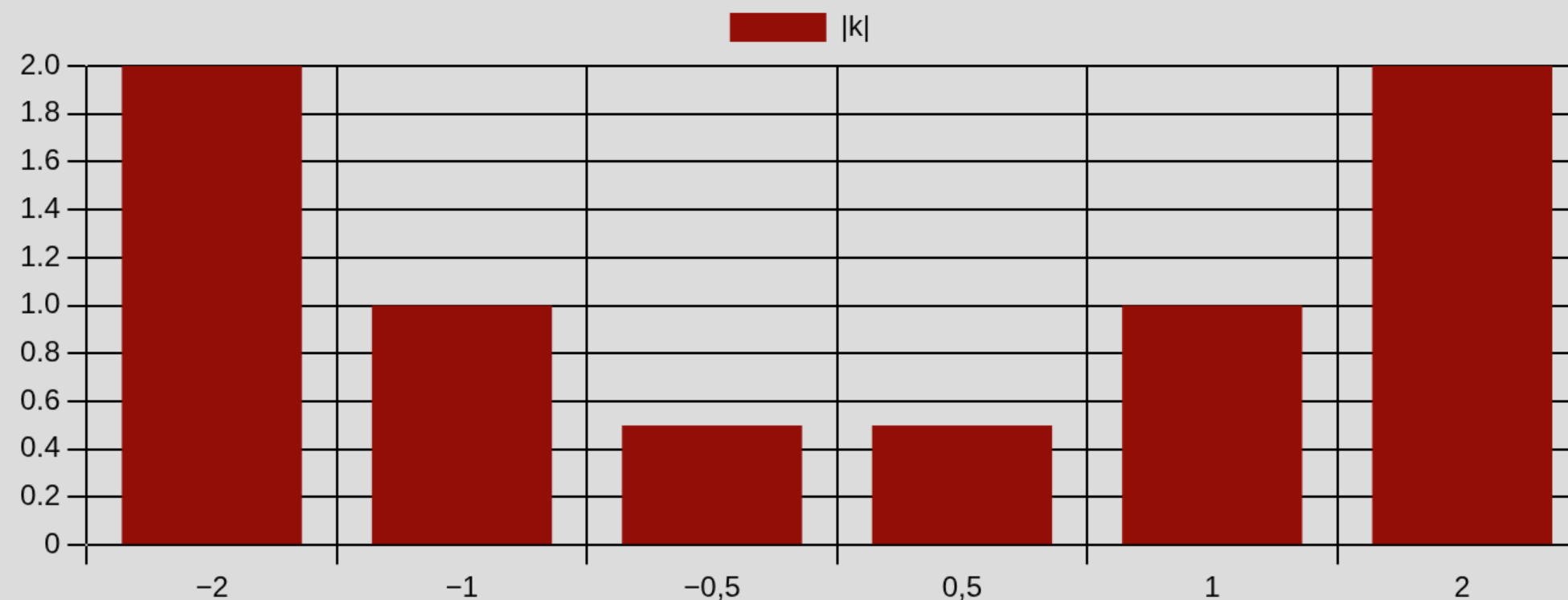


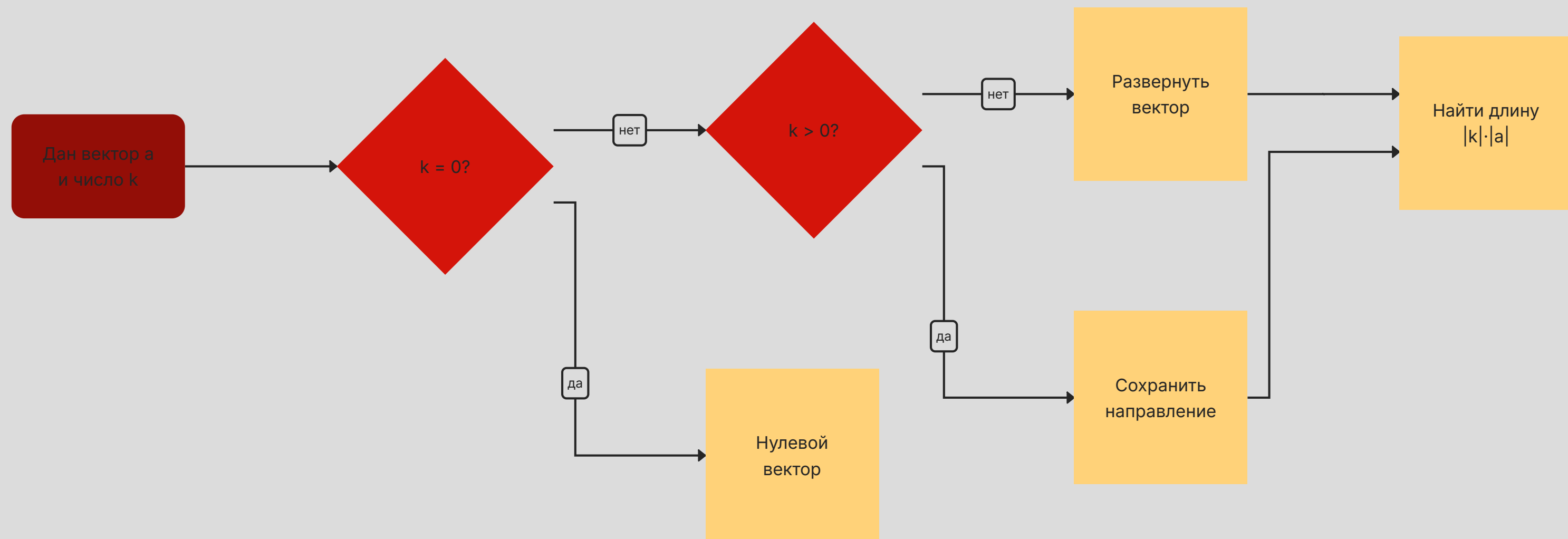
Диаграмма помогает увидеть, что одинаковые по модулю числа дают одинаковое изменение длины, даже если их знаки разные.

Для длины важен модуль коэффициента: пары -2 и 2 , -1 и 1 , $-0,5$ и $0,5$ дают одинаковый результат.

Модуль числа в правилах умножения вектора на число

Как построить вектор $k \cdot a$

Схема показывает, как знак и модуль коэффициента влияют на результат.



Умножение вектора в координатах

.01

Правило координат

Если вектор задан как $a=(x; y)$, то после умножения на число получаем $k \cdot a=(kx; ky)$. Каждая координата изменяется одинаковым коэффициентом.

.02

Что сохраняется

Такое умножение не ломает направление вектора как геометрического объекта. Меняются только длина и, при отрицательном k , ориентация на плоскости.

.03

Как проверять ответ

Полезно следить за знаком координат и знаком коэффициента. Это помогает понять, должен ли новый вектор смотреть в ту же сторону или в противоположную.

.04

Связь с чертежом

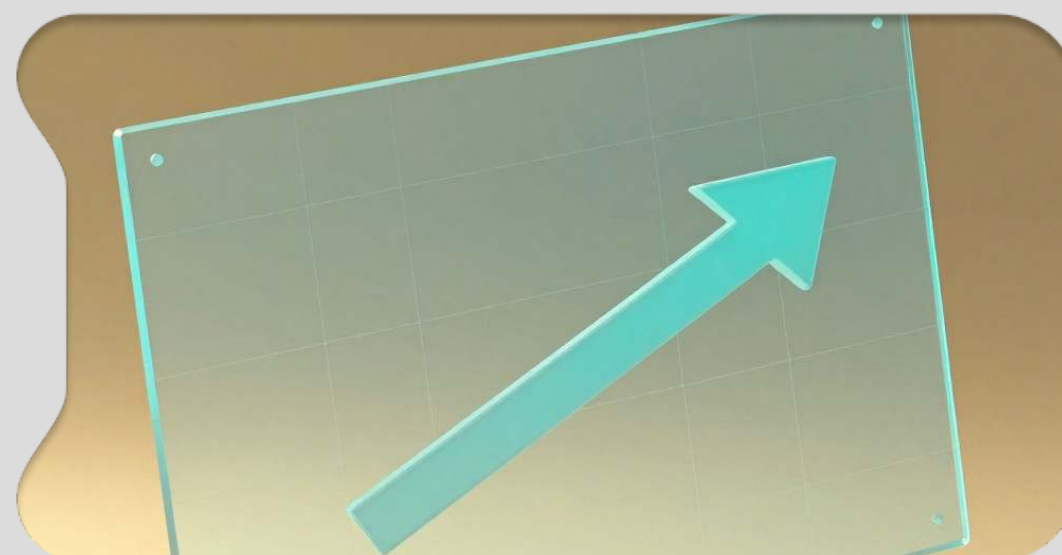
После вычислений результат удобно отметить на координатной сетке. Тогда сразу видно, насколько изменилось расстояние от начала координат и куда направлен вектор.

Как вектор меняется при умножении на число



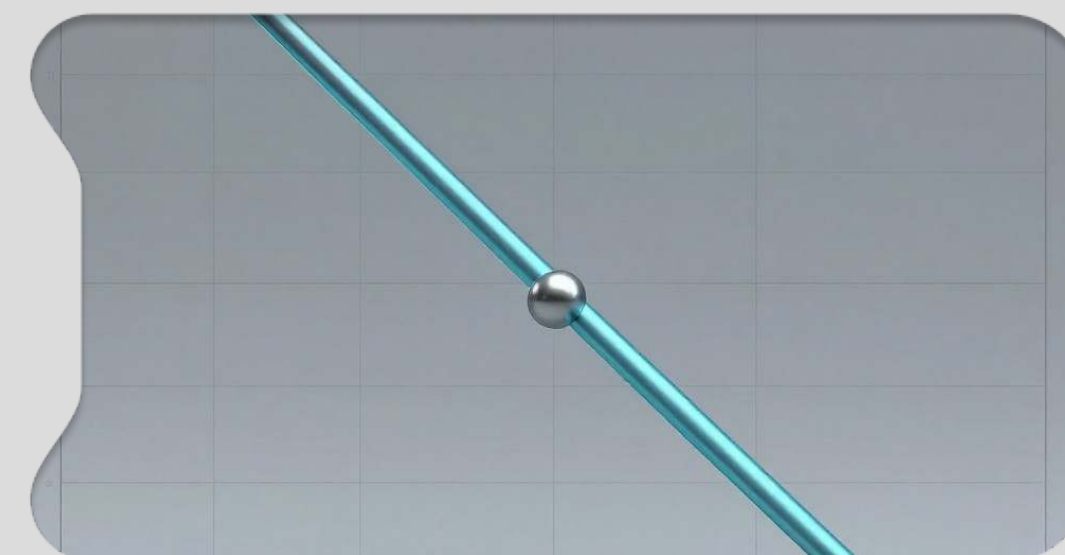
Исходный вектор на сетке

Вектор $a = (2; 3)$ можно увидеть как стрелку, выходящую из начала координат. Его конец задаёт направление в первом квадранте, а координаты показывают, насколько он смещён по горизонтали и вертикали.



Удвоение и разворот

При умножении на 2 получается вектор $2a = (4; 6)$. Стрелка остаётся направленной так же, но становится заметно длиннее, поэтому на координатной плоскости её конец лежит дальше от начала.



Половинный коэффициент

Для $0,5a = (1; 1,5)$ стрелка сохраняет направление, но сокращается. На рисунке удобно сравнить все три вектора: их концы лежат на одной прямой, а расстояния меняются пропорционально коэффициенту.

Сравнение исходного вектора и его образов



Учебный пример по теме «Умножение вектора на действительное число».

На диаграмме видно, что знак коэффициента не влияет на длину, а только на направление результата.

Длина определяется модулем коэффициента: у $-a$ и a она одинакова, а $2a$ вдвое длиннее исходного вектора.

Как работают основные свойства

.01

Последовательное умножение

Если сначала умножить вектор на одно число, а потом на другое, результат можно заменить одним умножением на их произведение. Это помогает сокращать записи и быстрее преобразовывать выражения.

.02

Сложение коэффициентов

Когда один и тот же вектор умножают на сумму чисел, можно сначала сложить коэффициенты, а затем умножить вектор один раз. Такое правило делает вычисления короче и понятнее.

.03

Распределение по сумме векторов

Число можно вынести сразу ко всей сумме векторов: сначала умножить каждый вектор отдельно, а потом сложить результаты. Это удобно при решении задач с несколькими стрелками.

.04

Практический смысл

Эти свойства нужны не только для преобразований, но и для проверки ответов. Они показывают, что действия с числами и векторами подчиняются чётким правилам и согласуются друг с другом.



3

**раза увеличится
длина вектора
при коэффициенте -3,
а направление
станет
противоположн
ым.**

Модуль коэффициента показывает, во сколько раз меняется длина вектора, а знак указывает только на направление.

Учебный пример к формуле $|k \cdot a| = |k| \cdot |a|$.

Где это правило встречается в жизни



Карта и масштаб

Когда карту уменьшают или увеличивают, все расстояния меняются одинаково. Вектор в такой задаче показывает направление и длину, а число задаёт, насколько сильно нужно изменить изображение.

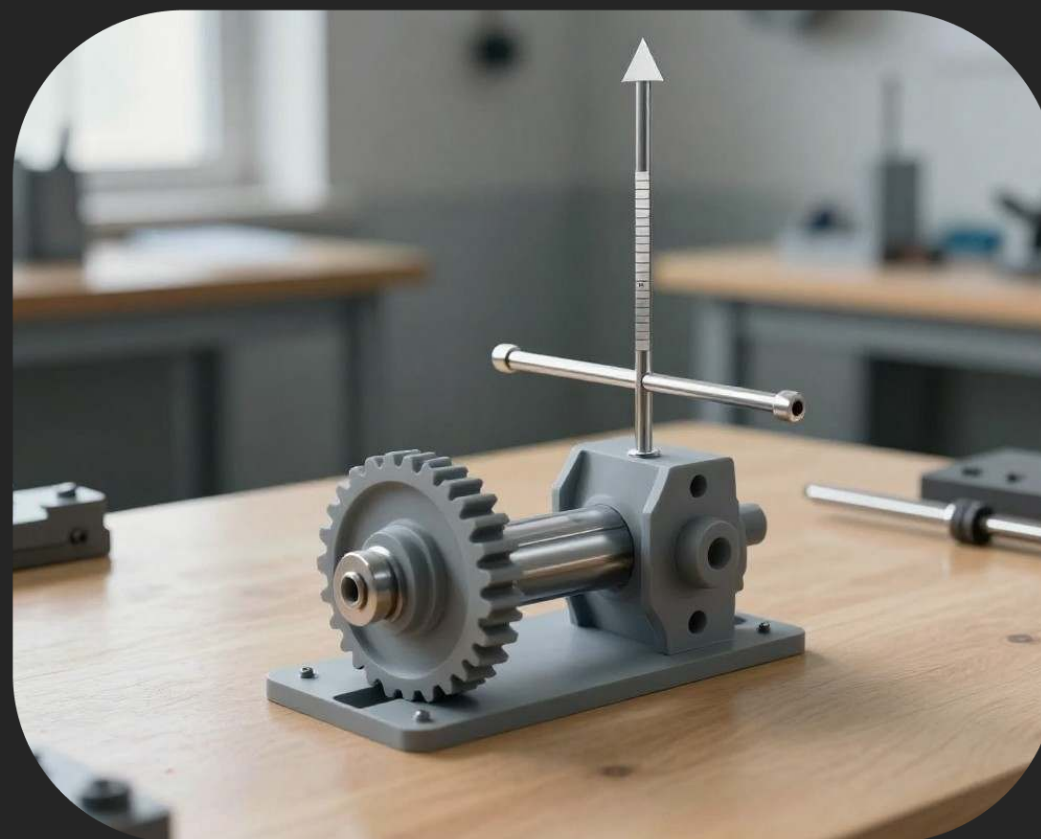


Чертёж и модель

Инженеры и конструкторы часто работают с уменьшенными моделями предметов. Если длину стрелки изменить в несколько раз, форма сохраняется, а размеры становятся удобными для чертежа или макета.



Движение и скорость

При описании движения вектор помогает показать, куда направлен объект и как быстро он движется. Умножение на число позволяет сравнить более медленное и более быстрое движение на одном рисунке.

Типичные ошибки при работе с векторами

Ошибка	Как правильно
« $-k$ уменьшает длину»	Длина зависит от $ k $
« $k=0$ — точка»	Получается нулевой вектор
« $a \cdot k$ — другое действие»	Это то же самое

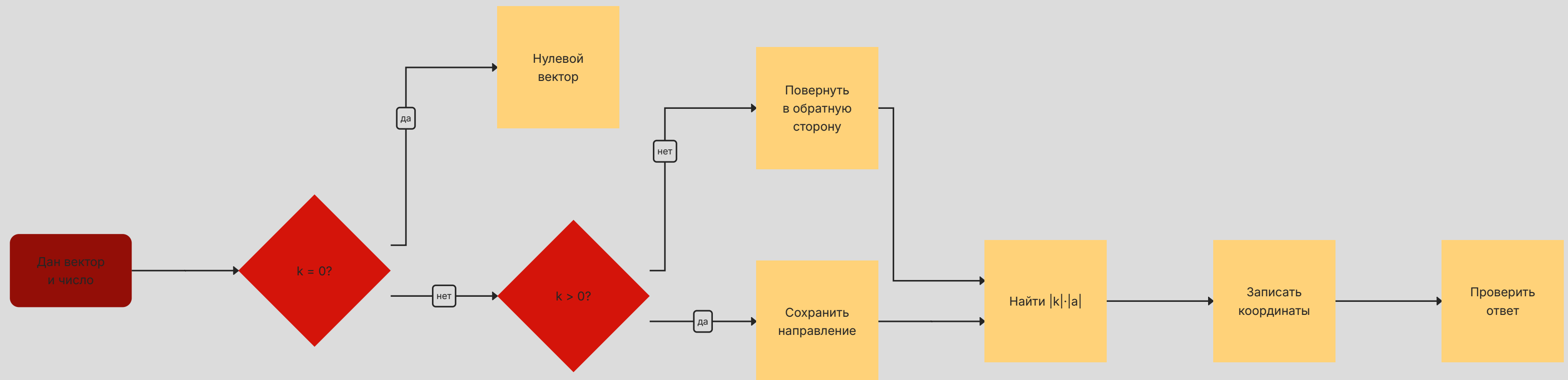
Сравните неверные представления с правильными формулировками и проверьте себя перед решением задач.

Чаще всего ошибки связаны с путаницей между знаком числа и его модулем. Также важно помнить, что нулевой коэффициент не даёт обычный отрезок.

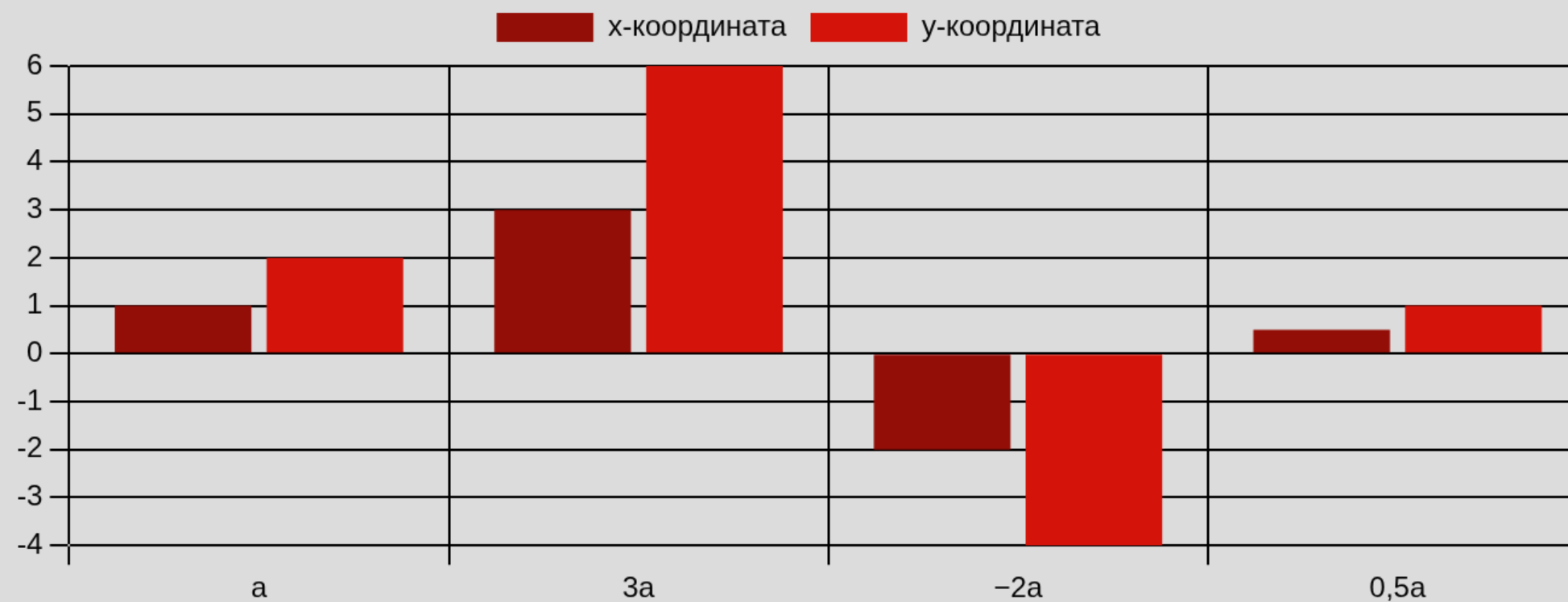
Правила умножения вектора на число.

Шаги решения задач на умножение вектора на число

Схема построена по алгоритму работы с коэффициентом, длиной и направлением вектора.



Проверка правила на нескольких примерах



Учебный пример: $a = (1; 2)$, $3a$, $-2a$, $0,5a$.

Сравнение удобно показывает, что обе координаты меняются по одному и тому же коэффициенту.

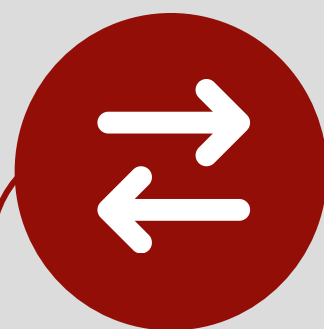
Правило kx и ky работает одинаково для любой координаты: знак и модуль числа сразу отражаются в результате.

Что важно запомнить по теме



Масштаб вектора

Умножение на число изменяет длину вектора, но само правило остаётся простым: исходный отрезок как бы растягивается или сжимается в заданное количество раз.



Направление

При положительном коэффициенте направление сохраняется, а при отрицательном вектор разворачивается. Это помогает быстро понять, куда будет направлен новый отрезок.



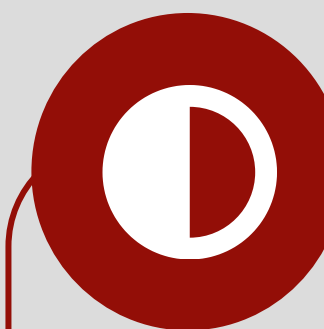
Нулевой случай

Если коэффициент равен нулю, вектор исчезает как направленный отрезок и превращается в нулевой вектор. У него есть длина 0, но нет направления.



Координаты

В координатной записи каждую координату умножают на одно и то же число. Поэтому результат легко проверить: надо отдельно посчитать новую x - и y -координаты.



Модуль коэффициента

Именно модуль числа отвечает за то, во сколько раз меняется длина. Знак числа важен только для направления, поэтому его нельзя путать с модулем.

Главный вывод по теме

Умножение вектора на действительное число
объединяет алгебру и геометрию: модуль задаёт длину,
знак — направление, а координаты меняются по одному
и тому же правилу.