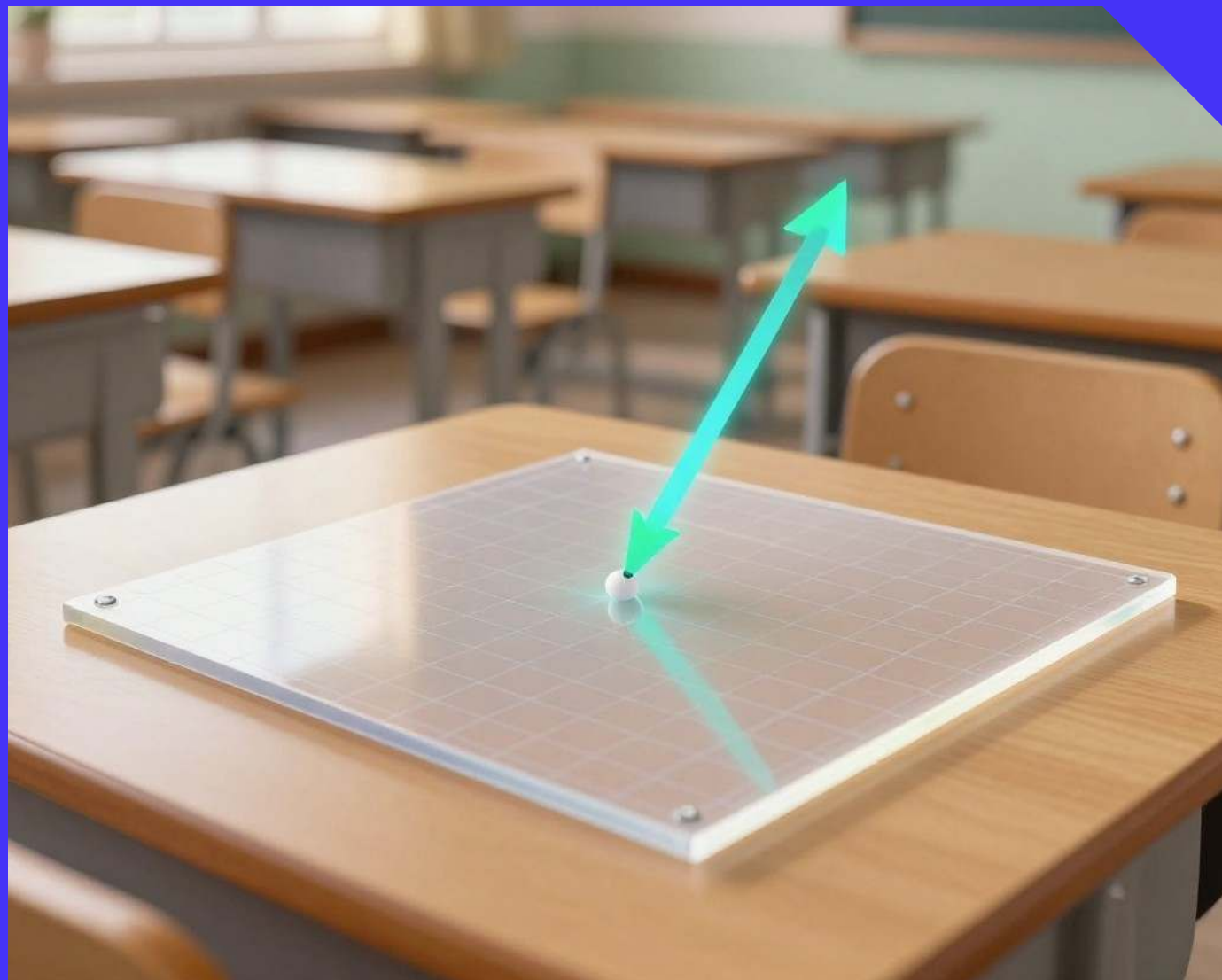


Действия с векторами в координатной форме

Векторы считаются точно и быстро по координатам.





Координатная плоскость превращает чертёж в точные числа. Это помогает сравнивать векторы, находить длины и середины отрезков, а также быстро проверять решения без лишних построений.

Зачем координаты вектору

Что такое вектор в координатах

01

Два числа

Вектор на плоскости задаётся двумя координатами: по горизонтали и по вертикали. Они показывают, на сколько и в каком направлении выполнено смещение точки.

02

Запись через точки

Если вектор обозначен как AB , то его координаты находят по разности координат конца и начала: $x_B - x_A$ и $y_B - y_A$. Так получают точную запись без чертежа.

03

Нулевой вектор

Нулевой вектор имеет координаты $(0; 0)$. Его длина равна нулю, а направление не определяется, потому что перемещения на плоскости нет совсем.

04

Зачем это нужно

Координатная форма позволяет сравнивать векторы, выполнять действия с ними и решать геометрические задачи через вычисления, а не только через построение на рисунке.

Основные формулы действий с векторами

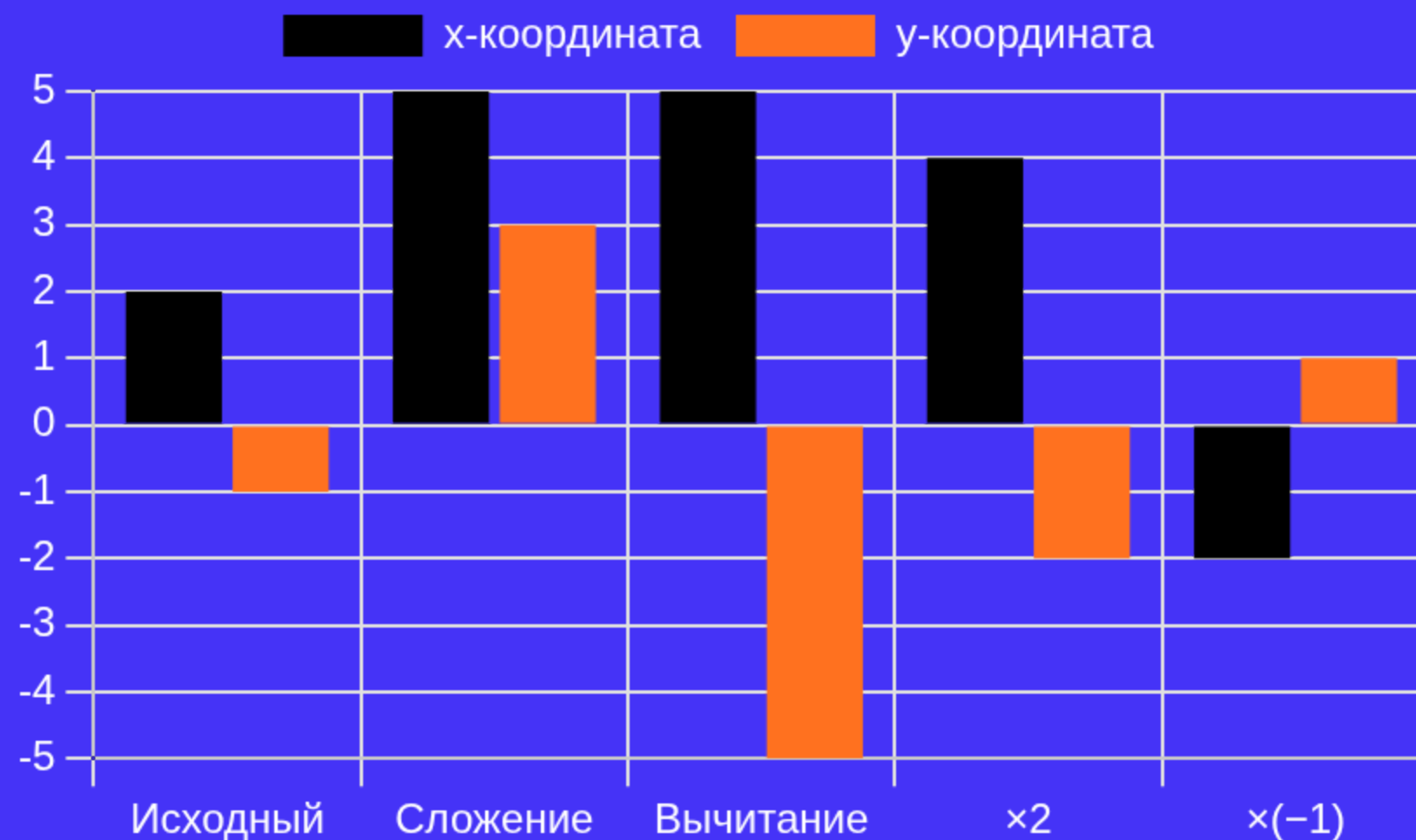
Краткая таблица поможет быстро вспомнить записи для основных операций с векторами и отрезком.

Все действия сводятся к работе с числами: координаты складывают, вычитают, умножают или усредняют по готовым правилам.

Действие	Формула	Пример
Сложение	$(x_1+x_2; y_1+y_2)$	$(1; 2)+(3; 4)$
Вычитание	$(x_1-x_2; y_1-y_2)$	$(5; 1)-(2; 3)$
Умножение	$(kx; ky)$	$2 \cdot (1; -1)$
Длина	$\sqrt{x^2+y^2}$	$ (3; 4) =5$
Середина	$((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2)$	$M(2; 3)$

Школьные формулы координатной геометрии

Как меняются координаты при разных действиях



Учебный пример для иллюстрации действий с векторами

Диаграмма показывает один и тот же пример в разных операциях. Видно, что знак коэффициента влияет не только на число, но и на направление вектора.

Координаты изменяются по разным правилам: при сложении и вычитании — послойно, при умножении — одинаково для обеих координат.

Сложение векторов по координатам

Правило по координатам

Чтобы сложить два вектора, складывают их одноимённые координаты: первую с первой, вторую со второй. Это правило работает для любых чисел и не требует построения.

Геометрический смысл

На чертеже сумма двух векторов совпадает с диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах. Такой рисунок помогает увидеть результат и проверить вычисление.

Удобство метода

Координатная запись сокращает решение: достаточно аккуратно сложить числа и не перепутать знаки. Поэтому даже сложные на вид задачи становятся понятными и короткими.

Проверка результата

После вычисления полезно оценить, где должен оказаться итоговый вектор: он может стать длиннее, короче или остаться направленным в ту же сторону.



Определение разности векторов в координатной форме

2

Порядок координат при вычитании
нельзя менять: от него зависит весь
результат и дальнейшее решение задачи.

координаты всегда вычитают в заданном
порядке, иначе получится другой вектор.

Умножение вектора на число

Изменение длины

Если умножить вектор на число больше единицы, он станет длиннее. При коэффициенте между нулём и единицей вектор укорачивается, но остаётся направленным так же.

Отрицательный коэффициент

При умножении на отрицательное число вектор меняет направление на противоположное. Его длина зависит от модуля коэффициента, а не от знака.

Нулевой результат

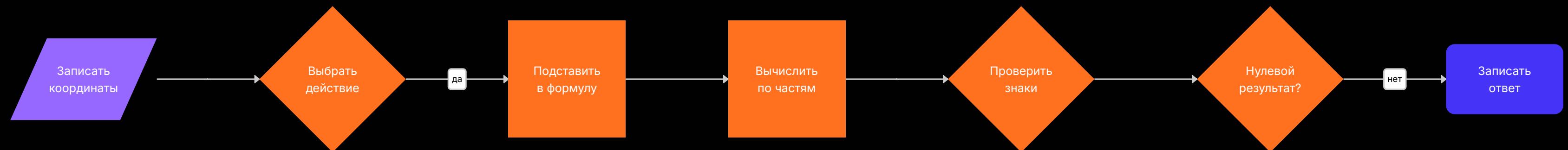
Если коэффициент равен нулю, получается нулевой вектор. Его координаты равны $(0; 0)$, поэтому он не имеет длины и направления.

Одинаковое правило для двух координат

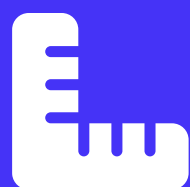
Коэффициент умножают на каждую координату отдельно: $k \cdot (x; y) = (kx; ky)$. Это простая операция, если внимательно следить за знаком и скобками.

Как найти результат действия с вектором

Последовательность вычислений по координатам



Длина вектора по его координатам



Формула

Длину вектора находят по формуле $|a| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Она подходит для любого вектора на плоскости и позволяет сразу получить точный ответ.



Связь с Пифагором

Координаты вектора образуют стороны прямоугольного треугольника, а сам вектор — его гипотенузу. Поэтому длину можно найти через теорему Пифагора без дополнительных построений.



Простой пример

Для вектора $(3; 4)$ длина равна 5, потому что $3^2 + 4^2 = 25$, а $\sqrt{25} = 5$. Такой пример удобно запомнить как образец для проверки решения.

Координаты середины отрезка

Берём концы отрезка

Пусть отрезок задан точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Чтобы найти середину, нужно использовать координаты обоих концов и работать с каждой осью отдельно.

Находим средние значения

Координата середины по каждой оси равна среднему арифметическому соответствующих координат концов. Поэтому x -координату и y -координату находят по одной и той же схеме: складывают и делят пополам.

Проверяем смысл ответа

Если точка M действительно середина, то она лежит ровно посередине между A и B . Формула удобна для симметричных построений, проверки деления отрезка пополам и решения координатных задач.

Типичные ошибки при действиях с векторами

В таблице собраны частые неточности, которые возникают при вычислениях с координатами векторов. Они помогают заранее заметить, где нужно быть особенно внимательным.

Большинство ошибок связано не со сложностью темы, а с невнимательностью к знакам, порядку действий и делению каждой координаты отдельно.

Ошибка	Неверно	Верно
Порядок вычитания	$b-a$	$a-b$
Потеря знака	$+(-3)=3$	$+(-3)=-3$
Коэффициент	$2(a; b)=(a; 2b)$	$2(a; b)=(2a; 2b)$
Середина	$(x_1+x_2; y_1+y_2)$	$((x_1+x_2)/2; \dots)$

Обобщение учебных формул по теме «Действия с векторами в координатной форме»

Когда получается нулевой или противоположный вектор

■ $a-a$ ■ $a+(-a)$ ■ $0 \cdot a$ ■ $k < 0$



Учебные правила координатной записи векторов;
дата не требуется

Нулевой вектор появляется в разных ситуациях, но результат всегда один: обе его координаты равны нулю. Для противоположного вектора важны одинаковая длина и обратное направление.

Если действие уничтожает координаты или меняет знак у обеих сразу, получается нулевой или противоположный вектор. Это легко проверить по формулам.

Ключевые свойства на плоскости



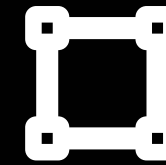
Параллельный перенос

Вектор можно переносить в любое место координатной плоскости параллельно самому себе. При таком переносе его координаты не меняются, потому что сохраняются направление и длина.



Равенство векторов

Два вектора равны, если у них совпадают соответствующие координаты. На чертеже это означает одинаковое направление и одинаковую длину, даже если они расположены в разных местах.



Свободный объект

Вектор не привязан к одной точке рисунка, поэтому удобно рассматривать его как свободный объект. Это упрощает сравнение, сложение и построение в координатной форме.

Пример вычислений по шагам

01

Сложение векторов

Для $a=(2; -1)$ и $b=(-3; 4)$ складываем координаты отдельно: $2+(-3)=-1$, а $-1+4=3$. Получаем $a+b=(-1; 3)$, то есть вектор с новым направлением.

02

Вычитание векторов

В разности $a-b$ из первой координаты вычитаем -3 , а из второй — 4 . Поэтому $2-(-3)=5$ и $-1-4=-5$. Ответ: $(5; -5)$, знак меняется по правилам вычитания.

03

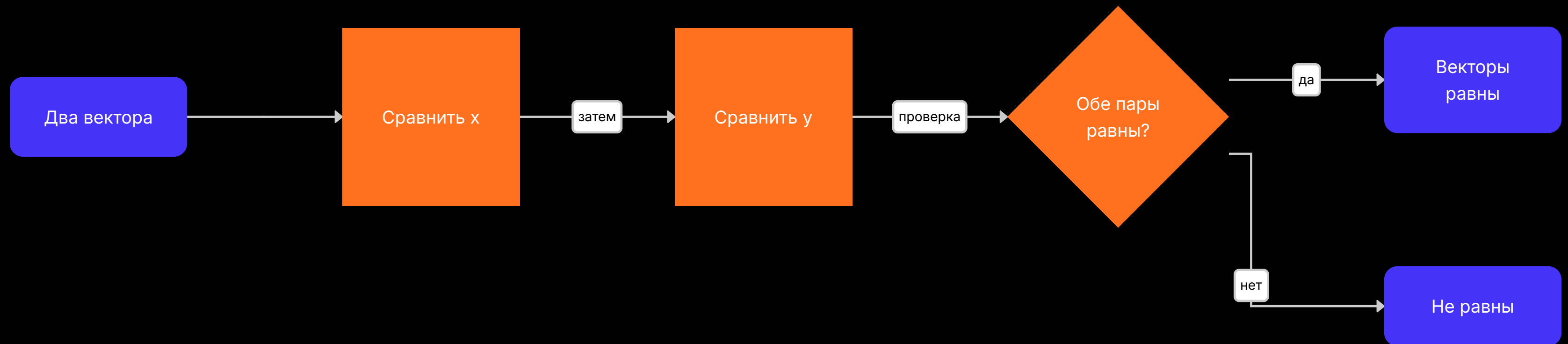
Умножение на число

При умножении a на 2 обе координаты удваиваются: $2 \cdot (2; -1) = (4; -2)$. Вектор становится длиннее, но направление сохраняется, потому что коэффициент положительный.



Проверяем, равны ли векторы

Последовательность действий для сравнения координат и получения точного вывода.



Где применяются координатные действия с векторами

Школьная геометрия

Координатные действия помогают быстро находить длины, середины отрезков и сравнивать векторы. Они особенно полезны, когда чертёж есть, но точный ответ нужно получить без лишних построений.

Физика

В физике векторы описывают перемещение, скорость и направление движения. Координатная запись позволяет складывать и сравнивать такие величины так же удобно, как обычные числа.

Компьютерная графика

При создании изображений координаты векторов помогают задавать смещения объектов на плоскости. Это важно для точного размещения, поворотов и повторяющихся элементов рисунка.

Практические задачи

В задачах на план местности или маршрут векторы показывают, куда и насколько нужно переместиться. Координатная форма делает такие расчёты понятными и короткими.

Мини-набор формул для урока

Перед вами самые нужные формулы темы. Они позволяют выполнять основные действия с векторами и быстро проверять ответы в задачах.

Если помнить пять записей, можно решить большинство школьных задач по теме: сложить, вычесть, умножить, найти длину и координаты середины отрезка.

Формула	Смысл	Когда использовать
$a+b$	Сумма	Сложение
$a-b$	Разность	Вычитание
$k \cdot a$	Изменение	Умножение
$ a $	Длина	Найти размер
M	Середина	Деление пополам

Основные формулы темы «Действия с векторами в координатной форме»

Проверка результата и самоконтроль

Сохраняем запись

Ответ нужно записывать в виде пары чисел и не путать порядок координат. Перед окончательным ответом стоит ещё раз проверить скобки, знаки и соответствие формуле.

Проверяем длину

При нахождении длины важно возводить в квадрат обе координаты, а не обращать внимание на их знаки. После этого вычисляют корень из суммы квадратов.

Ищем середину аккуратно

Для середины отрезка каждую координату делят на 2 отдельно после сложения координат концов. Нельзя делить только одну координату или забывать про скобки.

Сверяем с чертежом

Если дан рисунок, полезно сравнить ответ с направлением вектора и расположением точки. Подстановка чисел в исходную формулу помогает быстро заметить ошибку.



Координатная форма превращает действия с векторами в понятные вычисления. Она объединяет геометрию и алгебру, помогает быстрее находить ответы и увереннее проверять их.

Координаты помогают считать точно