

Выпуклый многоугольник: основные понятия и свойства

Что делает многоугольник выпуклым и как это видно по углам и диагоналям.

Зачем изучают выпуклые многоугольники в 9 классе

Тема из планиметрии помогает решать задачи на углы, диагонали и разбиение фигур на треугольники. Используя свойства выпуклых многоугольников, находят неизвестные углы, считают диагонали и проверяют правильность построений.



Что такое многоугольник

Многоугольник — это замкнутая ломаная, составленная из отрезков. Его основные элементы — стороны и вершины, а также внутренние углы, которые образуются соседними сторонами.

Количество сторон задаёт название: треугольник, четырёхугольник, пятиугольник, шестиугольник и далее. В школьной геометрии важно различать эти виды по числу вершин, потому что правила вычислений зависят от n .

Рассматривают простые многоугольники: их стороны не пересекаются, кроме соседних. Такая «чистая» форма нужна, чтобы корректно изучать углы и диагонали без путаницы.

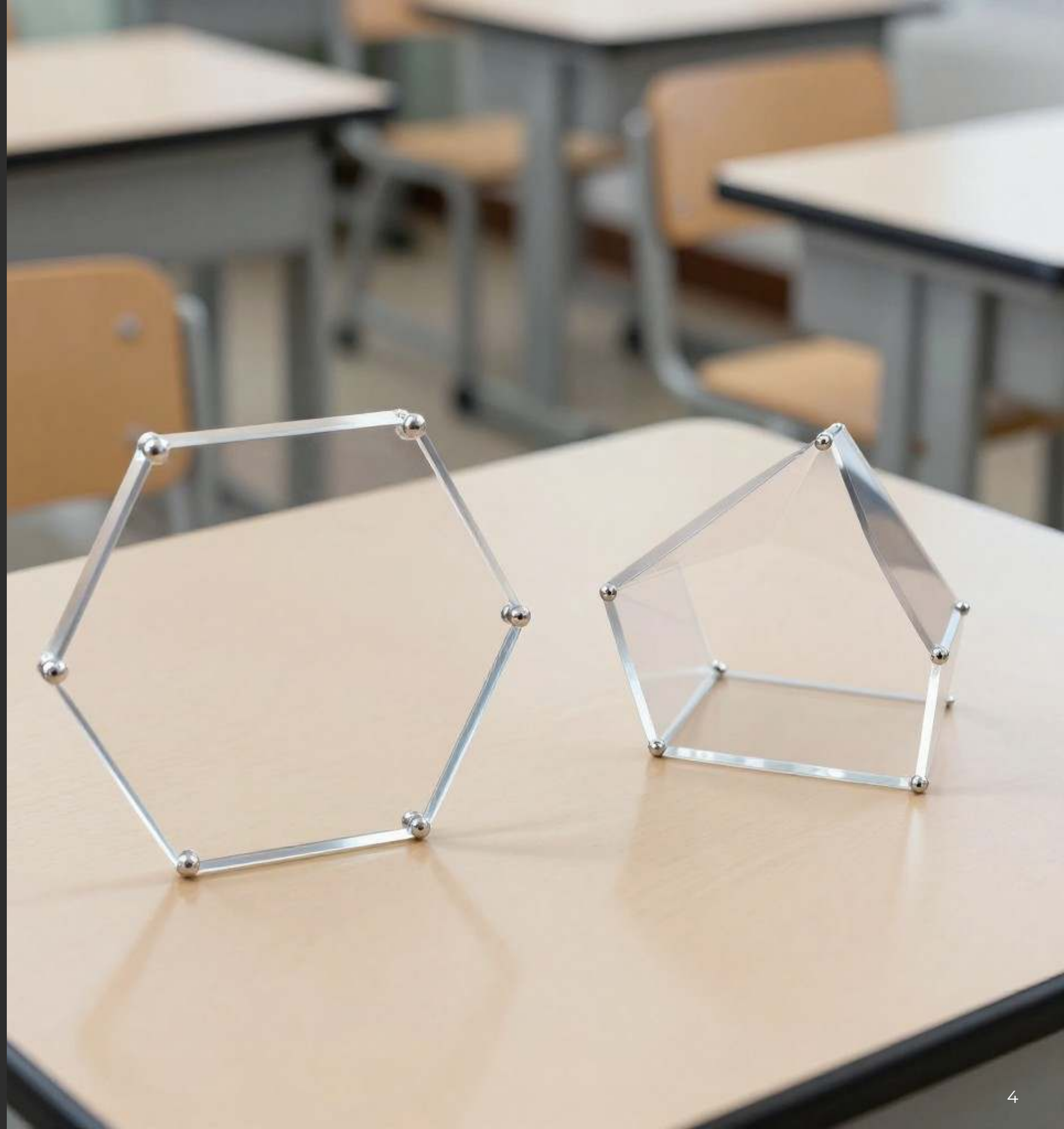
Как выглядит выпуклый многоугольник

Отсутствие «впадин»

У выпуклого многоугольника нет вогнутых участков и «впадин». Если провести прямую через любую сторону, остальные вершины окажутся по одну сторону от неё.

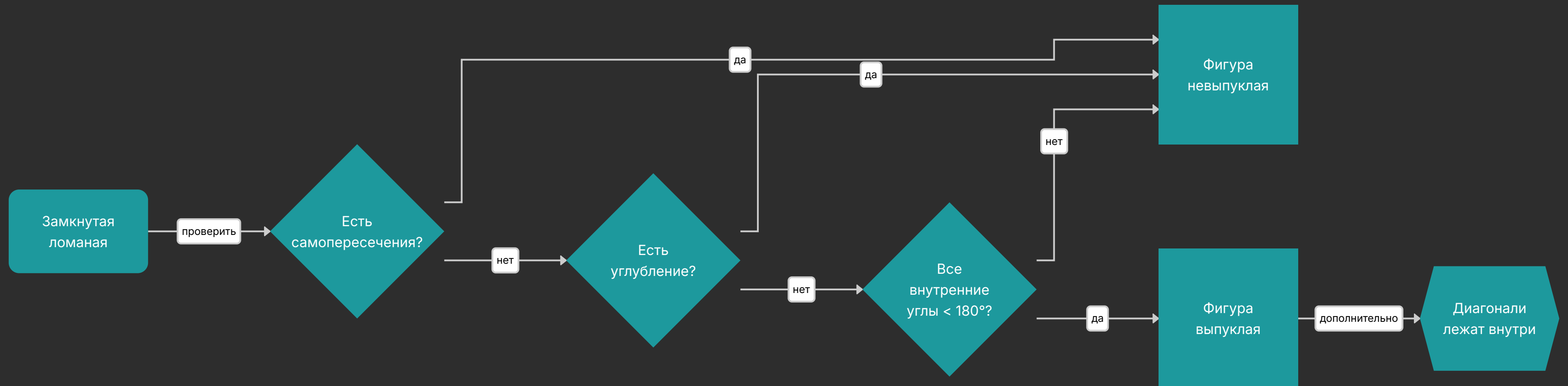
Роль диагоналей

Любая диагональ выпуклого многоугольника целиком лежит внутри фигуры. На сравнении удобно показать выпуклый шестиугольник и невыпуклую фигуру с заметным углублением.



Проверка выпуклости многоугольника

Последовательность действий: от самопересечений к углам и диагоналям.



Признак выпуклости через внутренние углы

У выпуклого многоугольника каждый внутренний угол меньше 180° . Это означает, что «поворот» границы всегда остаётся направленным внутрь фигуры.

Если хотя бы один внутренний угол больше 180° , такой угол называют вогнутым (или рефлексным). Наличие вогнутого угла автоматически делает многоугольник невыпуклым.

Граница проходит ровно при 180° : равный 180° — это особый случай, а для школьных задач важнее всего различать «меньше 180° » и «больше 180° ».

Выпуклый и невыпуклый многоугольник: сравнение признаков

Сравните ключевые признаки: углы, диагонали, положение вершин относительно стороны и наличие углубления.

Один нарушенный признак уже достаточно, чтобы сделать вывод о невыпуклости.

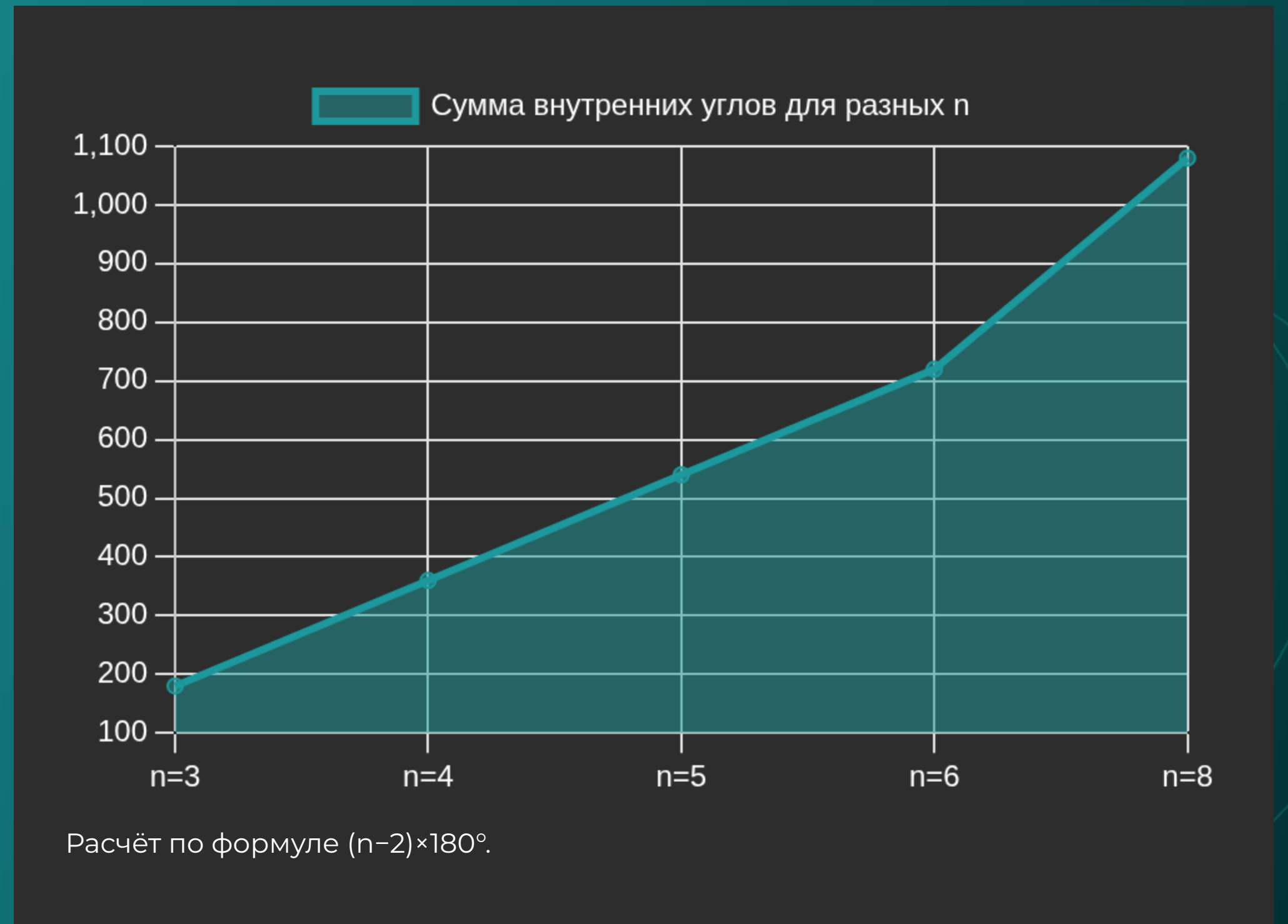
Признак	Выпуклый	Невыпуклый
Внутренние углы	Все $< 180^\circ$	Есть $> 180^\circ$
Диагонали	Лежат внутри	Выходят наружу
Вершины относительно стороны	По одну сторону	Могут быть по обе стороны
Углубление	Нет	Есть

Учебные определения и признаки выпуклости.

Сумма внутренних углов многоугольника

Каждый раз, когда добавляют ещё одну сторону (увеличивают n на 1), сумма растёт на 180° .

Данные наглядно подтверждают зависимость суммы внутренних углов от числа сторон и помогают быстро сверять ответы.



180°

**Каждая «добавленная»
сторона увеличивает
сумму внутренних углов
на 180°.**

Формула $(n-2) \times 180^\circ$ выводится через разбиение выпуклого многоугольника на треугольники и применяется в задачах 9 класса.

Вывод из разбиения на треугольники (школьная планиметрия).

Количество диагоналей в многоугольнике

Из одной вершины n -угольника можно провести $n-3$ диагонали: нельзя соединять вершину с самой собой и с двумя соседними. Остальные вершины подходят для диагоналей.

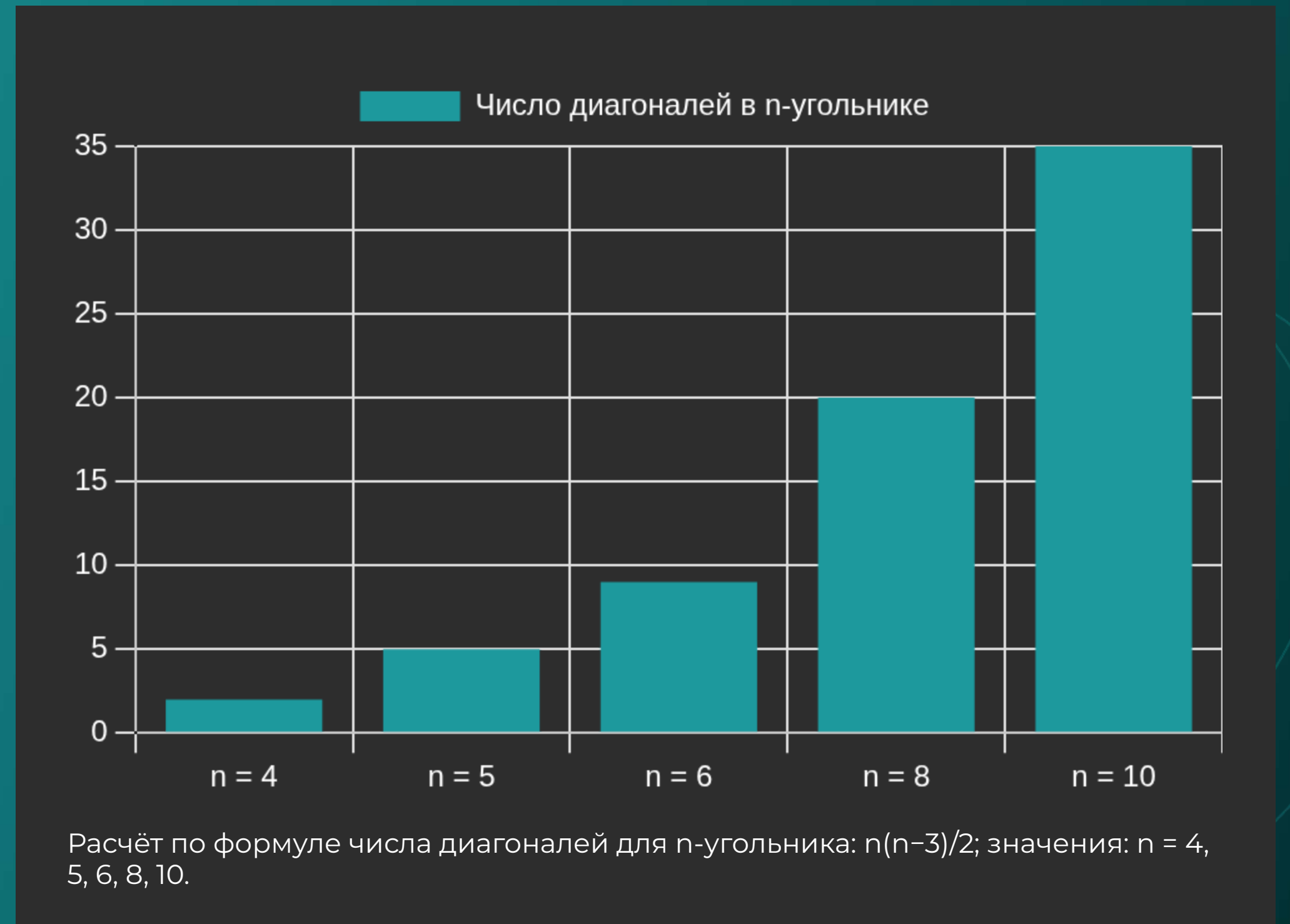
Если сложить диагонали для всех вершин, получится удвоенный счёт, поэтому общее число диагоналей равно $n(n-3)/2$. Это удобная формула для быстрых вычислений.

Например, для четырёхугольника диагоналей 2, для пятиугольника — 5, для шестиугольника — 9. В выпуклом многоугольнике все эти диагонали лежат внутри фигуры.

Сколько диагоналей у разных многоугольников

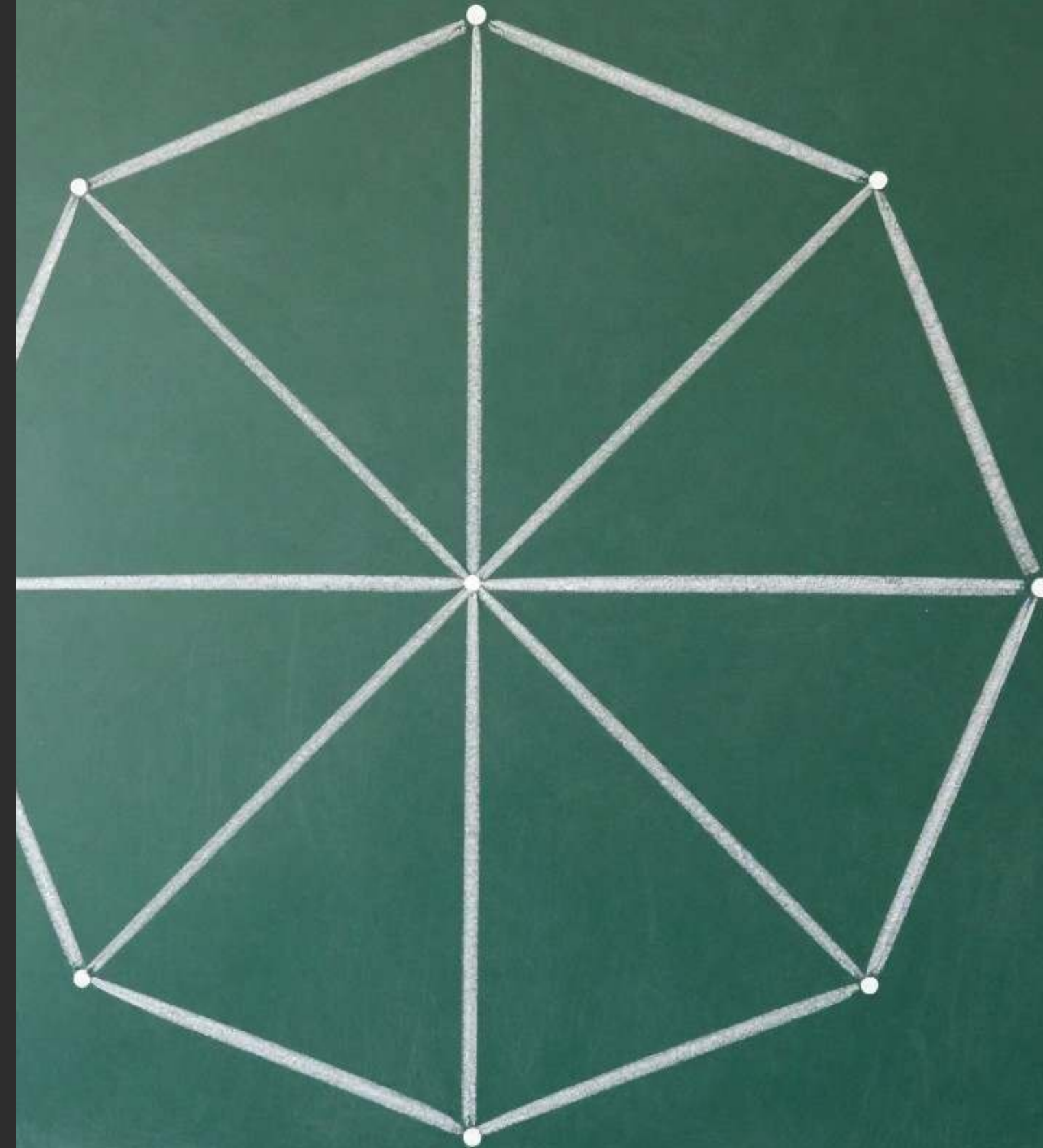
Число диагоналей — это количество внутренних отрезков, которые можно провести между несоседними вершинами. С ростом n их становится всё труднее перечислить вручную.

Увеличение числа вершин заметно ускоряет рост диагоналей: новая вершина добавляет сразу несколько дополнительных соединений, поэтому сложность растёт быстрее, чем n .



Разбиение выпуклого многоугольника на треугольники

- Если из одной вершины провести диагонали ко всем несоседним вершинам, выпуклый n -угольник разделится на треугольники. Их количество окажется равно $n-2$, так как каждая новая сторона добавляет один треугольник.
- Для наглядности: у пятиугольника получается 3 треугольника, у шестиугольника — 4, у восьмиугольника — 6. Именно это разбиение используют, чтобы выводить формулу суммы внутренних углов $(n-2) \times 180^\circ$.



Стороны, углы и правильные выпуклые многоугольники

Соседние стороны многоугольника соприкасаются в вершине, а соседние углы образуют участок внутренней области фигуры. Это помогает аккуратно рассматривать углы при разбиении и доказательствах.

В правильном выпуклом многоугольнике одновременно выполняются два условия: все стороны равны и все внутренние углы равны. Благодаря симметрии такие фигуры удобно изучать и распознавать по рисункам и чертежам.

Классические примеры правильных многоугольников: равносторонний треугольник, квадрат и правильный шестиугольник. В этих случаях углы и стороны можно находить с помощью известных свойств.

Важно различать понятия «выпуклый» и «правильный»: правильный многоугольник всегда выпуклый. Но выпуклый многоугольник может быть неправильным, если его стороны и углы не равны между собой.

Где встречаются выпуклые многоугольники



Плитка и покрытия

Узоры на полу и стенах часто строят из выпуклых многоугольников: треугольников, квадратов и шестиугольников. Форма без «впадин» помогает плиткам плотно стыковаться и не оставлять зазоров.



Окна и рамы

В оконных рамах и обрамлениях часто используют геометрию прямоугольников и других выпуклых фигур. Это упрощает изготовление и крепление деталей: линии проходят по границам без «переломов» внутрь.



Дорожные знаки

Многие дорожные знаки имеют выпуклые контуры: например, треугольные предупреждающие и круглые, которые можно рассматривать как частные случаи. Чёткий контур хорошо читается на расстоянии.



Инженерные чертежи

На чертежах встречаются фигуры, близкие к выпуклым многоугольникам: контуры деталей, разметка отверстий, панели. Выпуклость удобна для расчётов, так как диагонали лежат внутри фигуры.

Примеры выпуклых многоугольников и их числовые характеристики

Фигура	Число сторон	Сумма углов	Число диагоналей
Треугольник	3	180°	0
Квадрат	4	360°	2
Пятиугольник	5	540°	5
Шестиугольник	6	720°	9

Для суммы внутренних углов: $(n-2) \times 180^\circ$. Для диагоналей: $n(n-3)/2$. Подставлены $n = 3, 4, 5, 6$.

Сравнивая фигуры по таблице, легко увидеть закономерность: с ростом числа сторон увеличиваются и сумма внутренних углов, и количество диагоналей. Формулы в конце помогают быстро находить значения для любого n .

По данным таблицы видно ускорение: диагоналей становится всё больше, чем добавляется сторон. Это хорошо объясняет, почему задачи на построения усложняются при увеличении n .

Типичные ошибки при определении выпуклого многоугольника

Частая ошибка — считать фигуру выпуклой только потому, что она не самопересекается. Но невыпуклый многоугольник тоже может быть простым: у него не пересекаются стороны, однако есть «углубление».

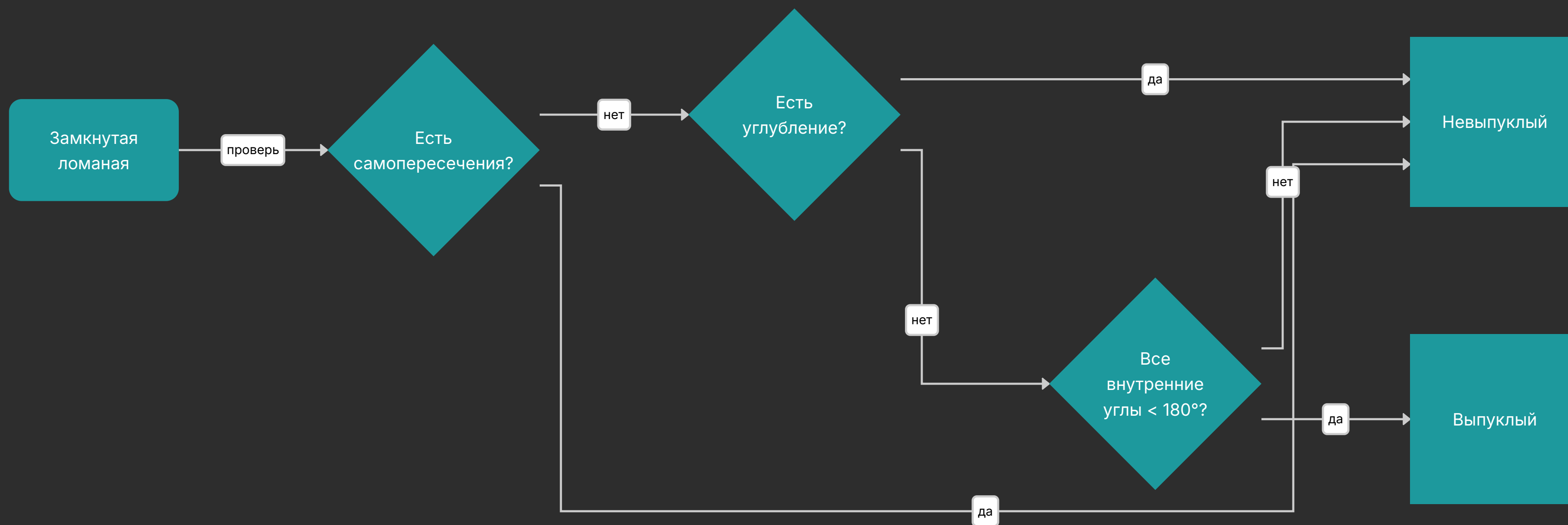
Ещё одна путаница — смешать понятия «выпуклый» и «правильный». Правильный многоугольник действительно выпуклый, а вот выпуклый многоугольник может быть неправильным, если его стороны и углы не равны.

Третья ошибка — не замечать угол больше 180° . Такой угол называют вогнутым (рефлексным), и сразу следует вывод: фигура невыпуклая. Граница проходит при значении 180° .

Для проверки удобно держать в голове три признака: нет углублений, каждый внутренний угол меньше 180° , а все диагонали лежат внутри фигуры. Если нарушен один признак — многоугольник невыпуклый.

Алгоритм определения выпуклого и невыпуклого многоугольника

Последовательность проверок, удобная для школьных задач по геометрии.



Выпуклые многоугольники в реальных объектах

Устойчивые фермы и треугольники

Треугольные элементы часто встречаются в опорах и фермах: такая форма помогает конструкции сохранять устойчивость. Треугольник жёсткий, поэтому его удобно использовать при сборке каркасов и перекрытий. Обычно линии выглядят как выпуклые отрезки без «впадин».



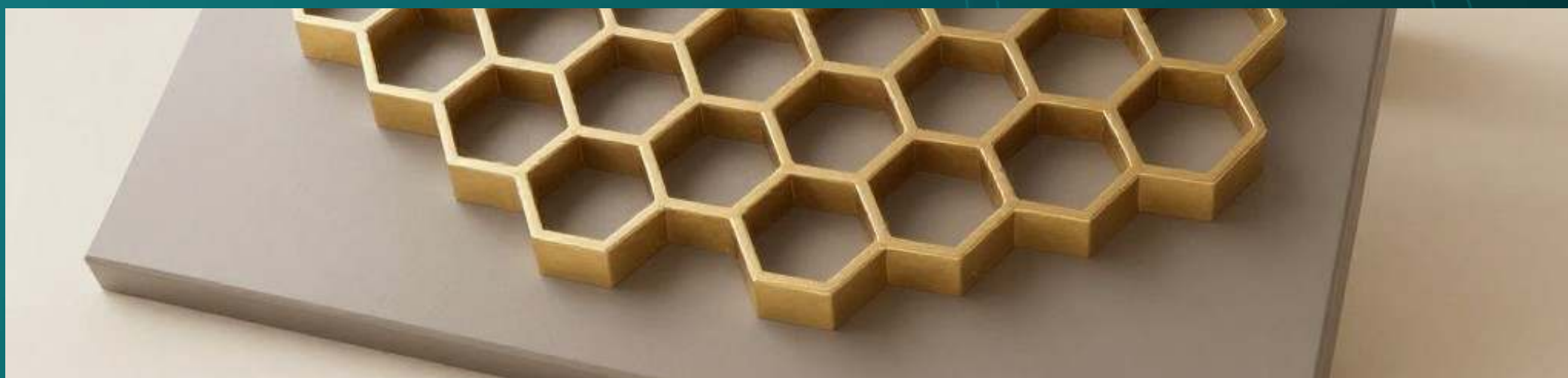
Окна, экраны и прямоугольные рамы

Квадраты и прямоугольники привычны в оконных рамах, экранах и облицовочных панелях. Они хорошо подходят для сборки из отдельных деталей и разметки креплений. Их контур остаётся выпуклым, поэтому диагонали целиком лежат внутри фигуры.



Пчелиные соты и декоративные контуры

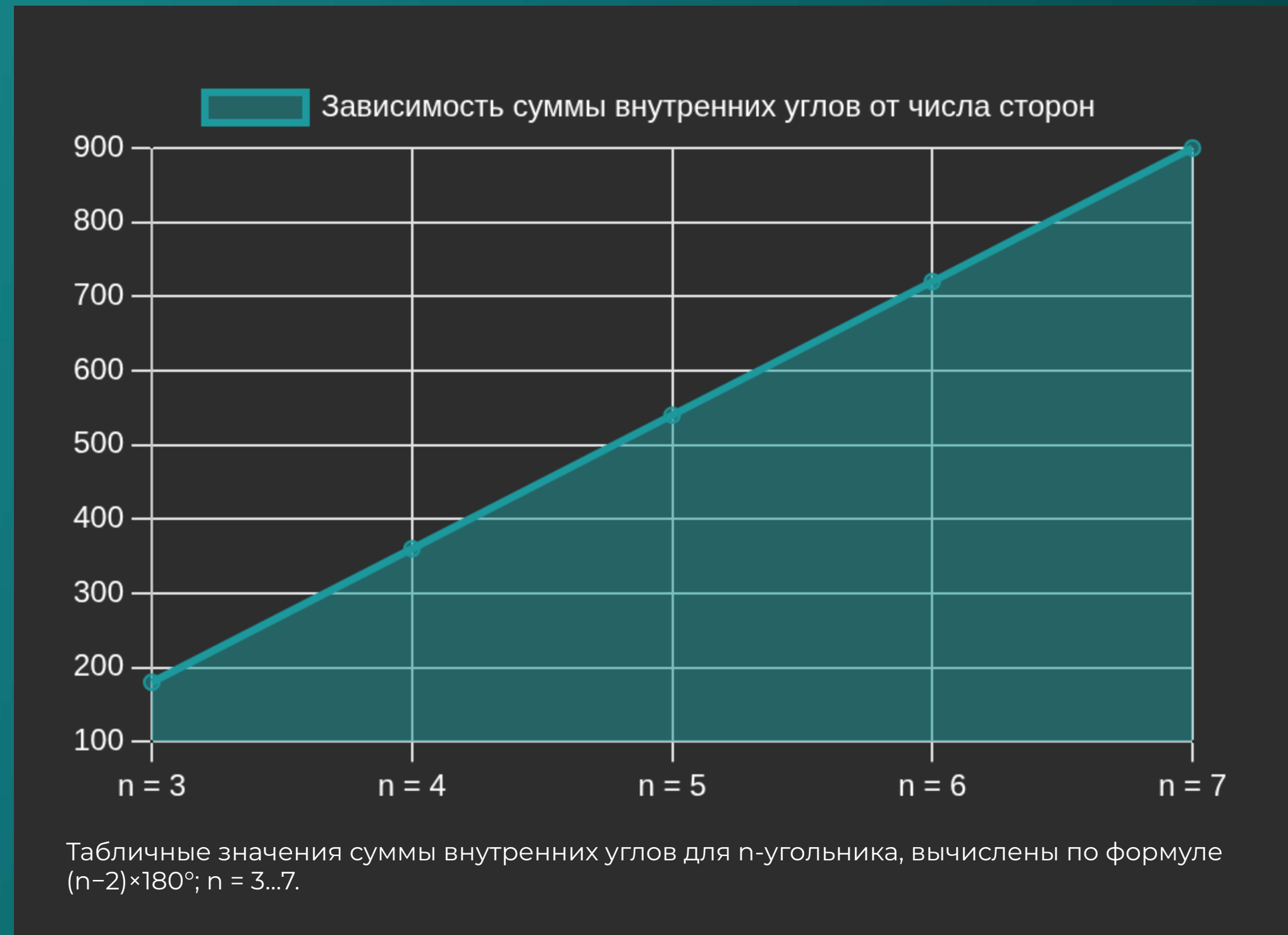
Шестиугольники известны по пчелиным сотам: такая форма позволяет эффективно заполнять пространство. Пятиугольные и восьмиугольные мотивы встречаются в знаках и декоративных элементах. Во многих изделиях контуры делают выпуклыми, чтобы рисунок выглядел аккуратно и ровно.



Связь числа сторон и суммы внутренних углов

На графике видно равномерное увеличение: при переходе от n к $n+1$ сумма углов растёт на 180° . Поэтому формула $(n-2) \times 180^\circ$ выглядит особенно естественно.

Данные подтверждают линейную зависимость от n . Это помогает быстрее проверять ответы в задачах, где требуется найти неизвестный угол через разбиение многоугольника.



Ключ к задачам: как работает выпуклость

Выпуклый многоугольник без углублений: все внутренние углы меньше 180° , а диагонали целиком лежат внутри. Для него сумма углов равна $(n-2) \times 180^\circ$, а диагоналей — $n(n-3)/2$, что помогает решать задачи.