

Комбинаторные задачи: как считать варианты

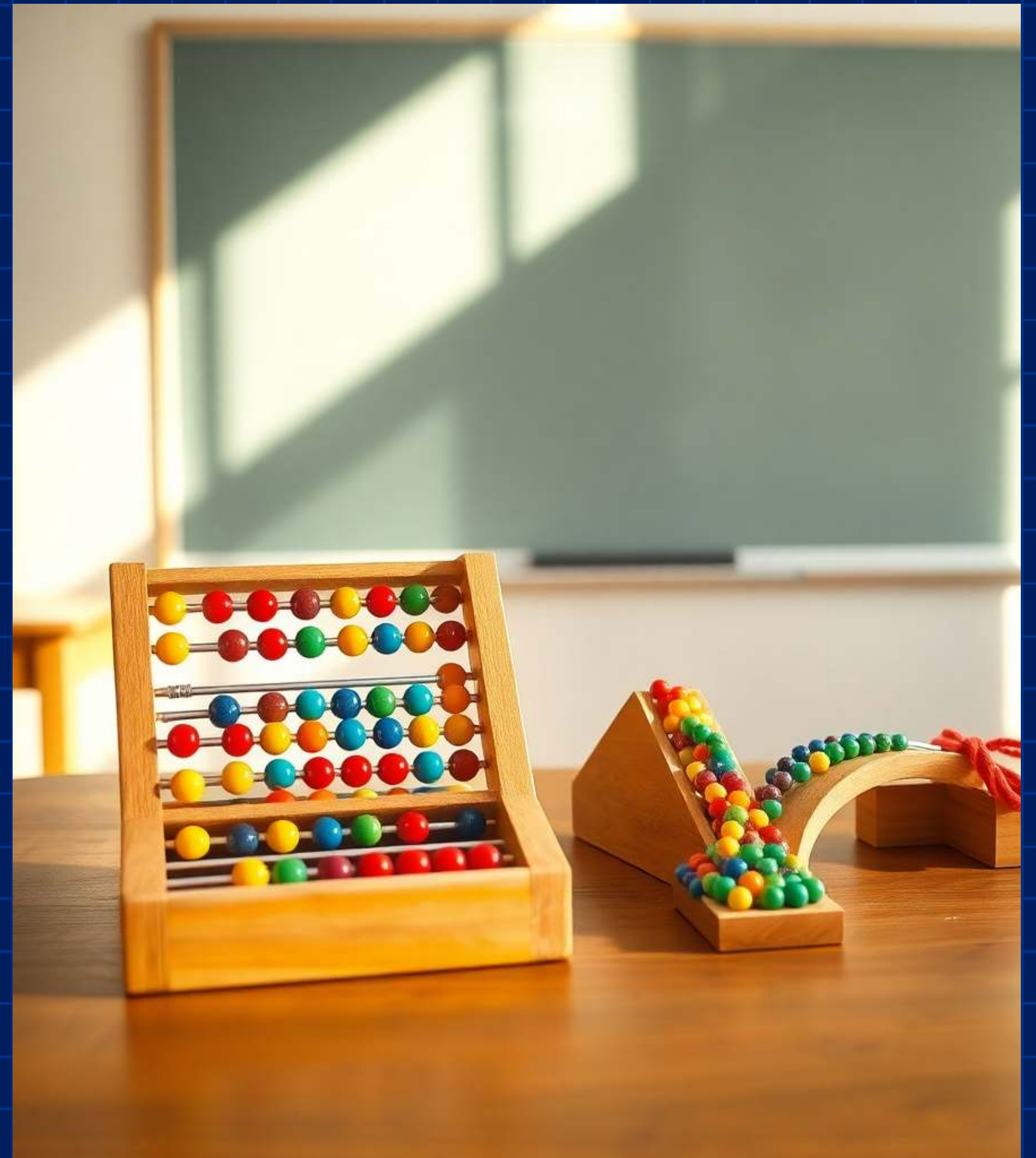
Считаем варианты выбора, расположения
и составления объектов.

1!

2

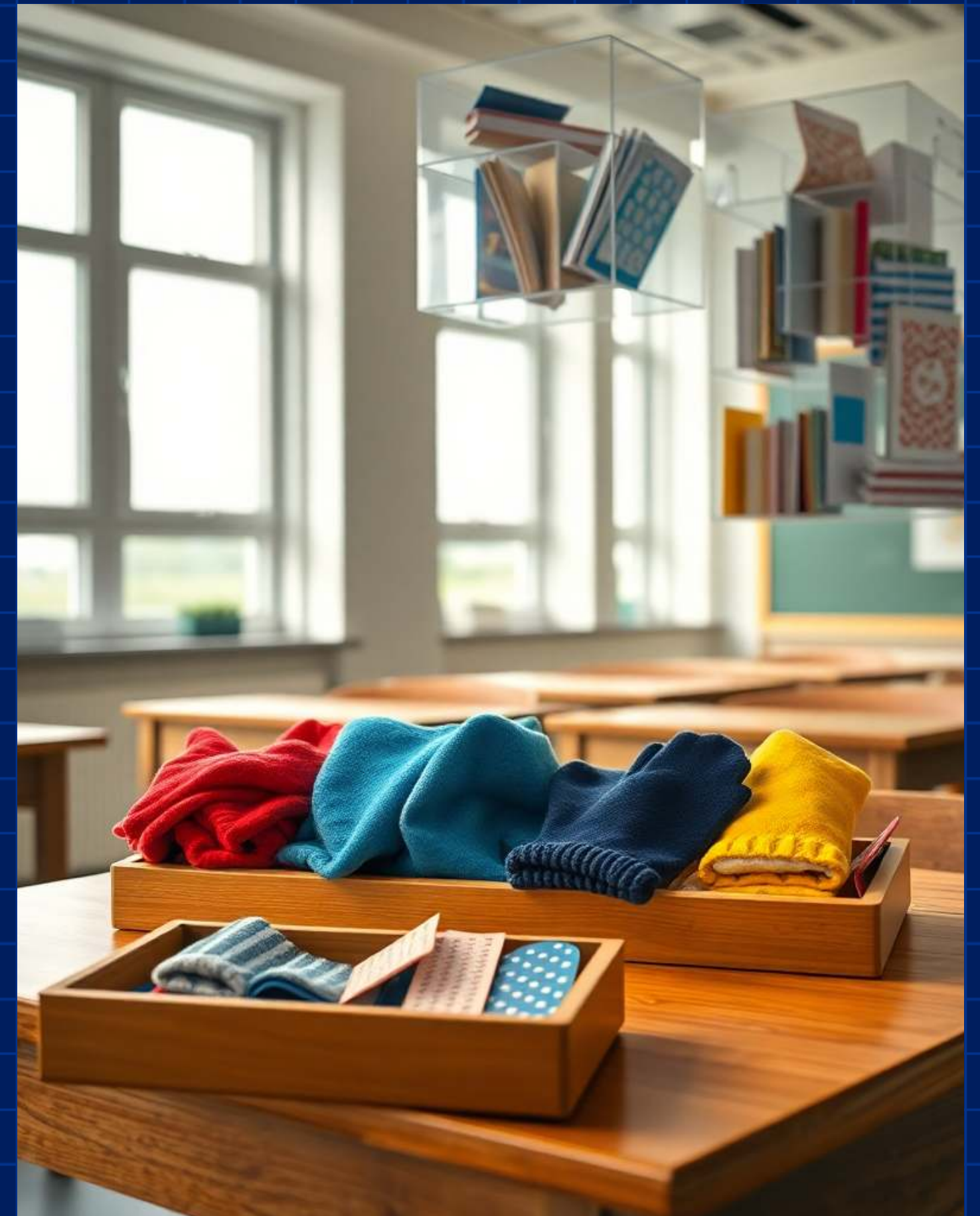
log

8



Как быстро находить число вариантов

Комбинаторика помогает не перечислять все случаи по одному, а сразу находить их число. В 9 классе она тесно связана с вероятностью, логикой условий и выбором подходящей формулы для конкретной задачи.



Три главных вопроса в любой задаче

1

Нужен ли порядок?

Сначала определите, меняется ли ответ, если объекты переставить местами. Если порядок важен, формула будет одной; если важен только состав, нужно выбирать другой способ подсчёта.



2

Допустимы ли повторы?

Проверьте, можно ли использовать один и тот же элемент несколько раз: одинаковые цифры, повторяющиеся предметы или повторный выбор. От этого зависит, умножать ли число вариантов на каждом шаге.



3

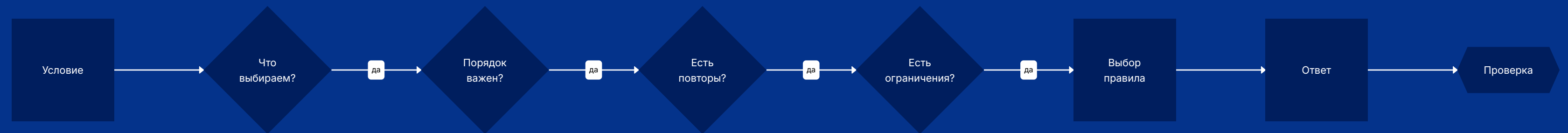
Есть ли ограничения?

Ищите слова «обязательно», «нельзя», «не рядом», «без повторений». Такие условия сразу сужают число допустимых случаев и часто требуют сначала посчитать все варианты, а потом исключить лишние.

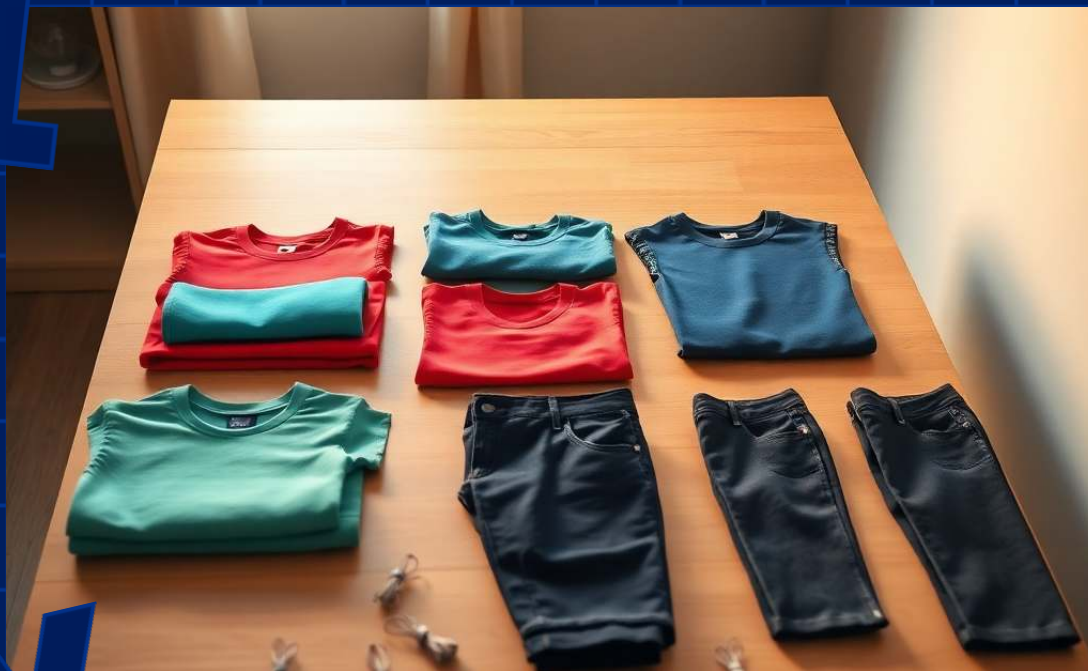
4

Общий алгоритм решения

Последовательность действий при разборе комбинаторной задачи



Правило умножения на простом примере



Комплект одежды

Утром школьник выбирает одну футболку и одну пару брюк. Если есть 3 футболки и 2 пары брюк, каждый выбор футболки можно соединить с любыми брюками, поэтому получается 6 комплектов.



Выбор по шагам

Правило умножения работает, когда задача распадается на последовательные действия. Сначала один шаг, потом другой, и для каждого первого варианта доступны все варианты следующего шага. Так считают пароли, меню и маршруты.



Почему это удобно

Вместо полного перебора достаточно перемножить числа вариантов на каждом этапе. Это экономит время и помогает не запутаться, даже если комбинаций получается много. Именно так в комбинаторике находят итог быстро и точно.

Какая формула подходит к задаче

Вид	Порядок	Идея	Пример
Перестановки	да	все по порядку	книги
Размещения	да	часть и порядок	роли
Сочетания	нет	только состав	команда

Стандартные формулы комбинаторики

Сравним основные типы комбинаторных задач и посмотрим, что именно меняется в ответе.

Если меняется порядок, ответ обычно больше; если важен только состав, число вариантов меньше.



Перестановки считают все возможные упорядочивания набора. Чем больше объектов, тем быстрее растёт число вариантов, поэтому даже небольшое увеличение набора заметно меняет ответ.

24

**способа расставить 4
разные книги на полке**

Формула перестановок: $n!$; пример для 4 объектов



Как быстро растёт факториал



Стандартные значения факториала 1! – 6!

Каждый следующий шаг умножает результат на новое число. Поэтому даже при небольшом увеличении количества объектов число вариантов растёт очень резко.

Факториал показывает, почему в задачах на порядок нужны точные формулы: перебор вручную быстро становится неудобным.

Размещения: выбираем и упорядочиваем

Часть набора

Размещения используют, когда нужно выбрать не все объекты, а только часть из них. При этом важен порядок: кто стоит первым, вторым и третьим, уже влияет на результат.

Без повторений

Если один и тот же объект нельзя выбрать дважды, каждый следующий шаг даёт меньше вариантов. Поэтому в примере со школьными ролями сначала выбирают одного из шести, потом из пяти, потом из четырёх.

Смысл формулы

Размещения удобно применять к назначениям ролей, номерам мест и другим ситуациям, где набор выбран, но расположение элементов тоже имеет значение. Это помогает быстро посчитать все разные исходы.

1
2
3

$4 \times 3 \times 2 = 24$

Сочетания: выбираем без учёта порядка

Только состав

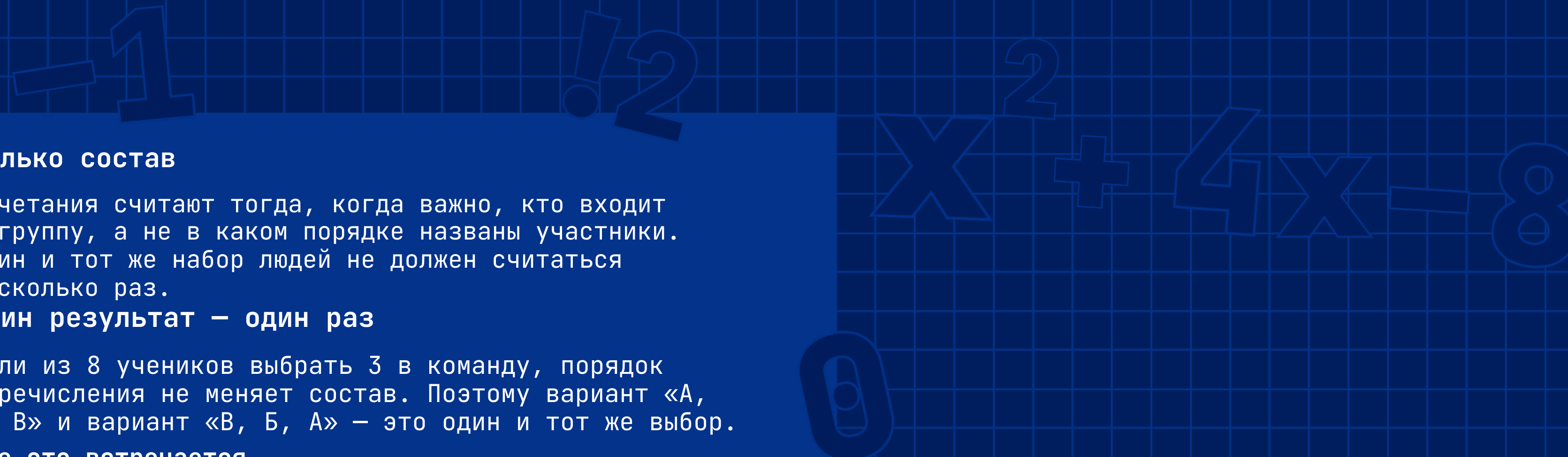
Сочетания считают тогда, когда важно, кто входит в группу, а не в каком порядке названы участники. Один и тот же набор людей не должен считаться несколько раз.

Один результат – один раз

Если из 8 учеников выбрать 3 в команду, порядок перечисления не меняет состав. Поэтому вариант «А, Б, В» и вариант «В, Б, А» – это один и тот же выбор.

Где это встречается

Сочетания подходят для выбора команды, набора предметов или группы участников. Такие задачи часто встречаются в школе, потому что здесь важно именно множество выбранных объектов.


$$x^2 + 4x - 8$$

Порядок или только состав: сравнение на примере



Учебный пример по комбинаторике: выбор 2 объектов из 5

Один и тот же набор объектов даёт разные ответы, если меняется условие подсчёта.

Учёт порядка удваивает число вариантов в этом примере: формула зависит не от объектов, а от того, как их считают.

Правило сложения для нескольких случаев

1

Случаи не пересекаются

Если варианты относятся к разным, не совпадающим случаям, их можно просто сложить. Такой способ удобен, когда нужно выбрать один предмет из нескольких отдельных групп.



2

Подсчёт по частям

Сначала находят число вариантов в каждом случае отдельно, а затем складывают результаты. Это помогает не запутаться, если условия задачи разбивают ответ на несколько независимых частей.



3

Важно не считать дважды

Правило работает только тогда, когда один и тот же вариант не может попасть сразу в две группы. Иначе ответ будет завышен, и нужно уточнить условие.





Задачи с ограничениями

Без повторений

Ограничение «без повторений» означает, что один и тот же объект нельзя использовать дважды. Это особенно важно в задачах на коды, выбор цифр и распределение ролей.

Обязательный элемент

Если что-то должно быть включено обязательно, удобно сначала зафиксировать этот элемент, а потом считать остальные варианты. Так условие становится проще и понятнее.

Запрещённые соседства

Условия вроде «не рядом» требуют отдельно следить за расположением объектов. В таких задачах важно не только выбрать элементы, но и правильно их разместить.

Удобный приём

Часто сначала считают все возможные варианты, а потом вычитают неподходящие. Этот подход помогает, когда прямой подсчёт слишком длинный или неудобный.

Алгоритм решения задач с ограничениями

Последовательность шагов помогает не потерять условие и выбрать правильный способ подсчёта.



Сравнение формул на одном наборе данных

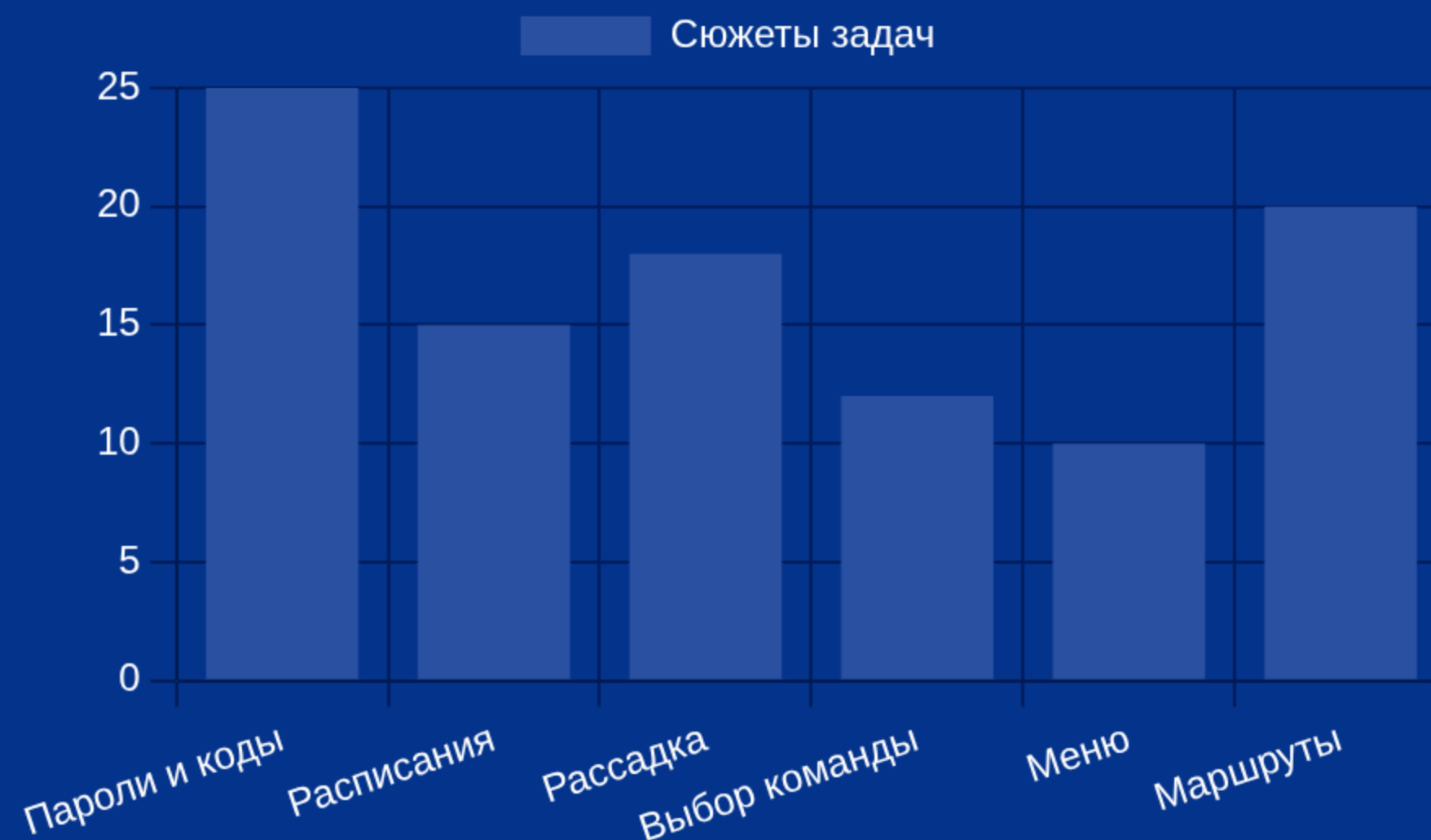
Вид	Результат
Перестановки	120
Размещения	20
Сочетания	10

Стандартные формулы комбинаторики

Для $n = 5$ и $k = 2$ видно, как меняется ответ в зависимости от того, что именно считается.

Чем сильнее учитывается порядок, тем больше результат. Сочетания дают самый маленький ответ, потому что важен только состав группы.

Где встречаются комбинаторные задачи



Иллюстративное распределение учебных сюжетов по темам комбинаторики

Такие сюжеты часто связаны с выбором, порядком и ограничениями, поэтому встречаются и в учебных, и в жизненных ситуациях.

Чаще всего комбинаторика помогает там, где нужно быстро оценить число возможных решений без полного перебора.

Типичные ошибки при решении

1

log



Путают выбор и порядок

Иногда берут формулу для неправильного типа задачи. Если порядок важен, ответ меняется, поэтому сначала нужно точно понять, что именно спрашивается.



Неверно обращаются с повторениями

Одни задачи разрешают повторения, другие — нет. Ошибка здесь сразу меняет число вариантов, особенно в примерах с цифрами, кодами и буквами.



Считают одинаковое дважды

При ограничениях один и тот же вариант может попасть в подсчёт несколько раз. Чтобы избежать этого, полезно проверять, не пересекаются ли случаи.



Не делают проверку

Даже короткий пример помогает заметить ошибку. Если ответ кажется слишком большим или слишком маленьким, стоит ещё раз сверить условие и формулу.

2

x

Комбинаторика в информатике и безопасности

Пароли и коды

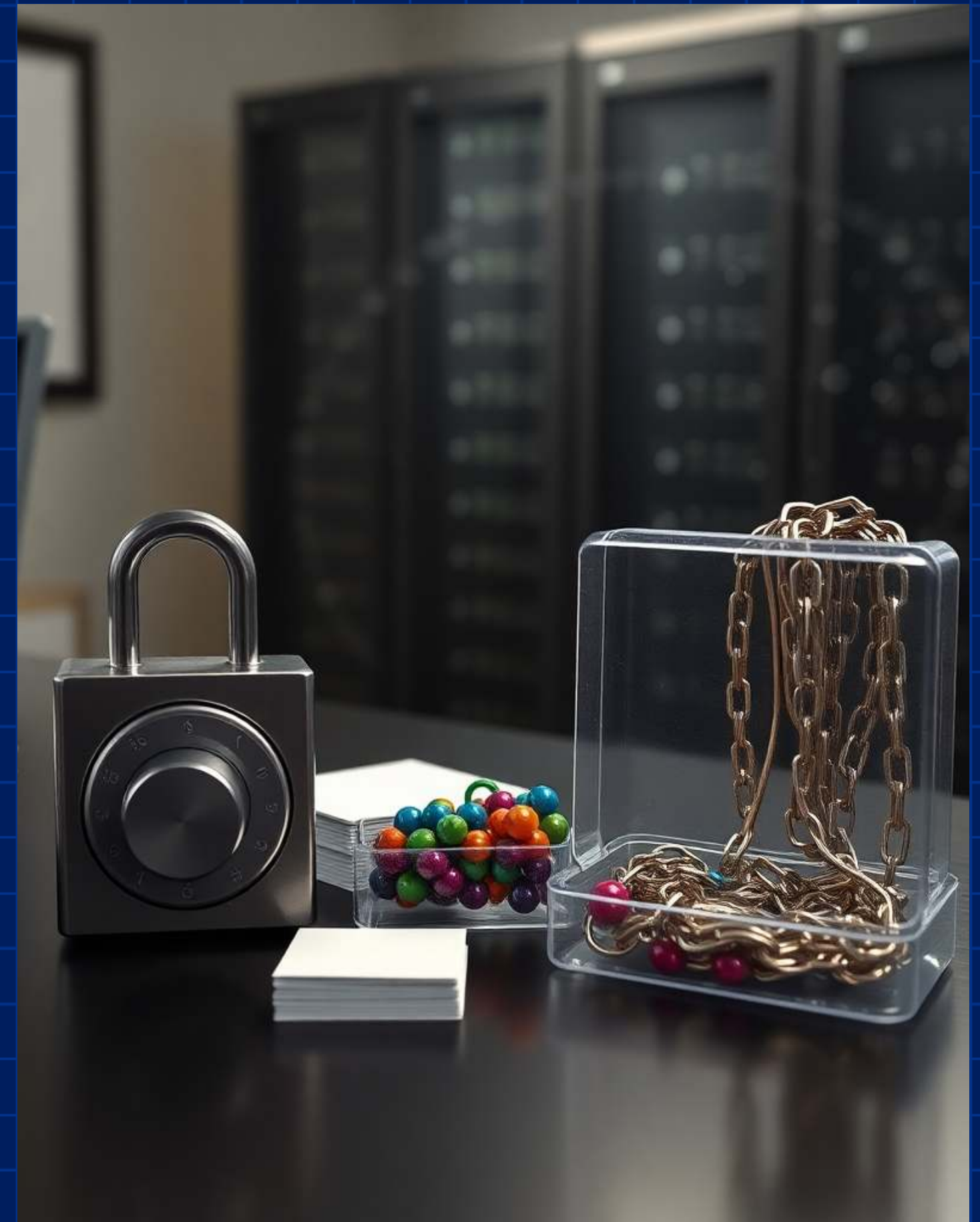
Чем больше допустимых символов и длиннее пароль, тем больше возможных комбинаций. Поэтому короткие коды подбираются гораздо легче, чем длинные и сложные.

Перебор вариантов

В информатике часто нужно проверить множество решений по очереди. Комбинаторика помогает заранее понять, насколько велико число возможных вариантов и насколько сложной будет задача.

Защита информации

При создании паролей и шифров важно делать число комбинаций как можно больше. Тогда подобрать правильный код становится значительно труднее и дольше.



Мини-практика по теме

Выбор дежурных

Сначала определите, важен ли порядок. Здесь выбирают только двух учеников из семи, поэтому подходит сочетание: учитывается состав пары, а не её очередность.

Трёхзначный код

Здесь уже важен порядок цифр, потому что разные записи дают разные коды. Без повторений получаем размещение из трёх элементов, выбранных из трёх возможных.

Комплект одежды

Для футболок и шорт работает правило умножения: каждый верх можно сочетать с каждым низом. Нужно перемножить число вариантов двух независимых выборов.

1
2
3

4x-8

Комбинаторика помогает считать точно

Комбинаторные задачи становятся понятными, если сразу определить порядок, повторения и ограничения. Тогда правило умножения, правило сложения, перестановки, размещения и сочетания дадут быстрый и надёжный ответ.



cos

sin

1

tg

ctg