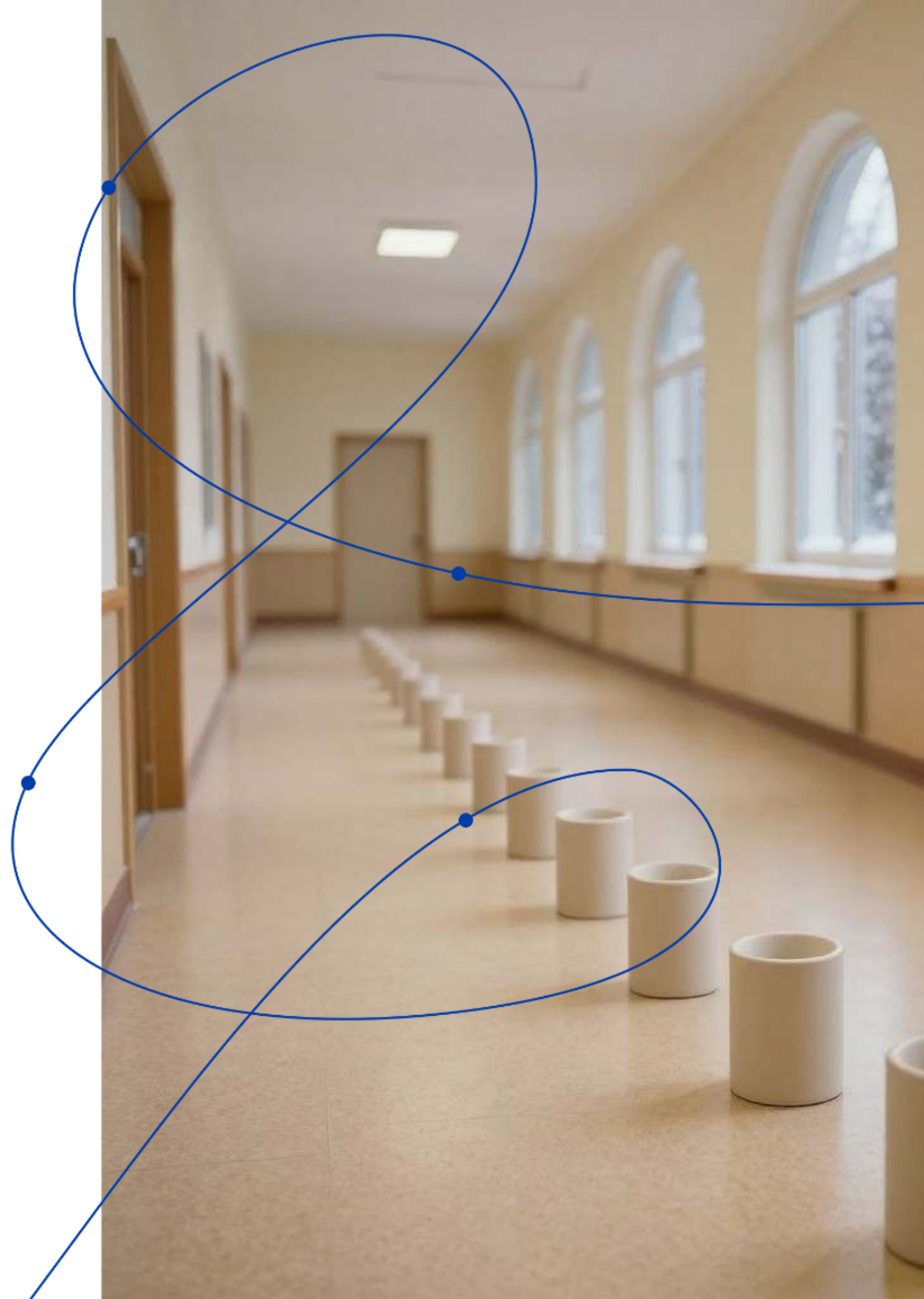


Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Бесконечность может дать точный конечный
результат.



Почему эту тему изучают в 9 классе

Эта тема показывает, как связаны последовательности, степени и формулы. Она помогает решать задачи о дробях, процентах, скидках и повторяющихся изменениях в реальных ситуациях.



Что такое геометрическая прогрессия

Один и тот же множитель

Геометрическая прогрессия строится так, что каждый следующий член получают умножением предыдущего на одно и то же число q . Именно это число задаёт характер всей последовательности.

Первый член

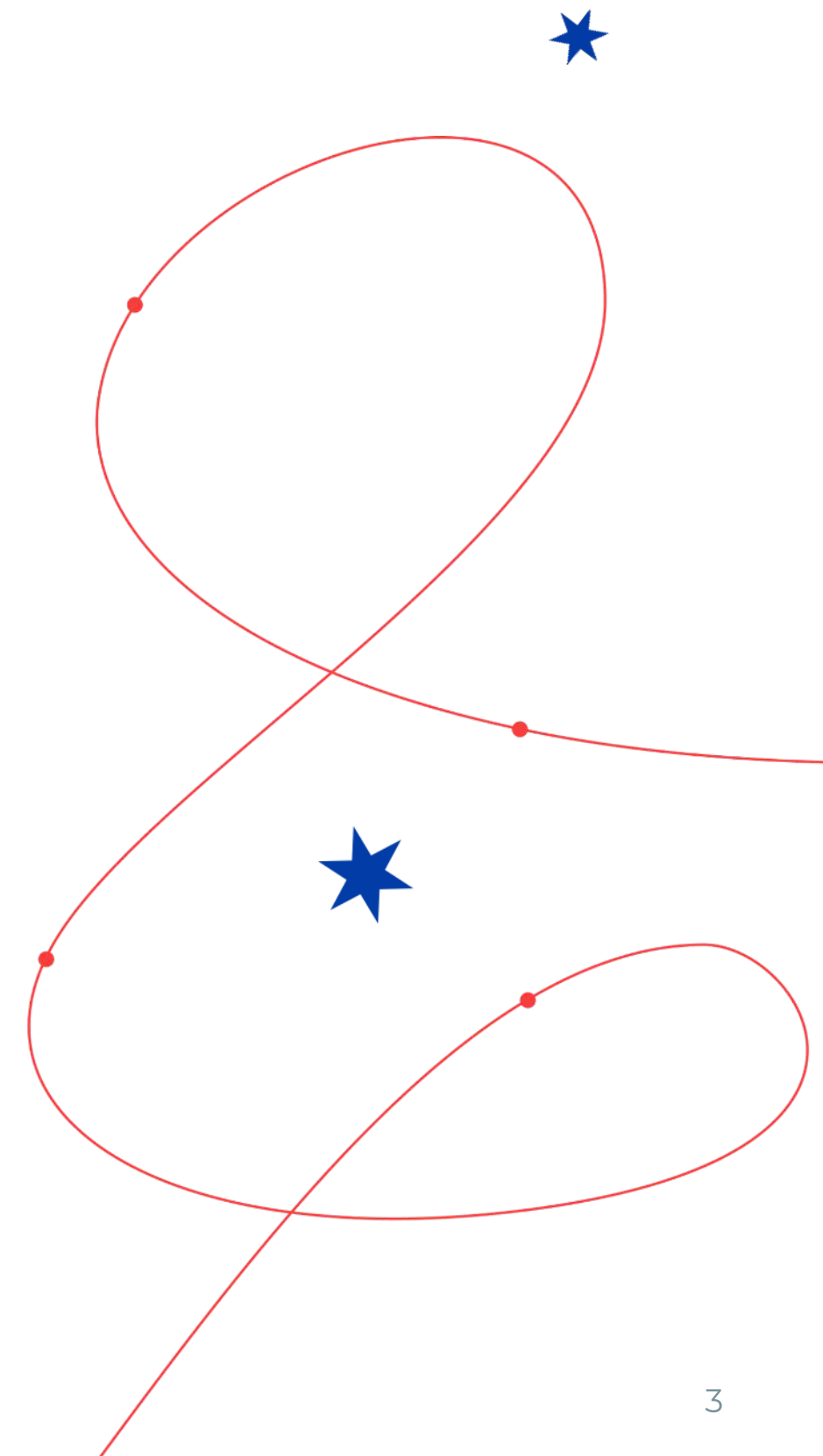
Первый элемент последовательности обозначают a_1 . От него начинается запись прогрессии, а дальше по правилу умножения появляются все следующие члены, например 3, 6, 12, 24, ...

Пример роста

Если $a_1 = 3$ и $q = 2$, каждый шаг удваивает число. Поэтому последовательность быстро растёт, хотя правило остаётся очень простым и одинаковым для всех членов.

Пример убывания

Если $a_1 = 100$ и $q = \frac{1}{2}$, получается ряд 100, 50, 25, 12,5, ... Такой пример наглядно показывает, как прогрессия может уменьшаться в одинаковое число раз.



Когда прогрессия убывает



Условие убывания

Геометрическая прогрессия убывает, когда $0 < q < 1$. Тогда каждый следующий член меньше предыдущего, а сам ряд постепенно теряет величину, не меняя способа построения.



Уменьшение в одинаковое число раз

При $q = \frac{1}{2}$ каждое новое число становится вдвое меньше, а при $q = \frac{1}{3}$ — в три раза меньше. Постоянное отношение между соседними членами и есть главный признак прогрессии.



Основа конечной суммы

Именно такие прогрессии могут иметь конечную сумму, даже если слагаемых бесконечно много. Это возможно потому, что добавляемые члены быстро стремятся к нулю.



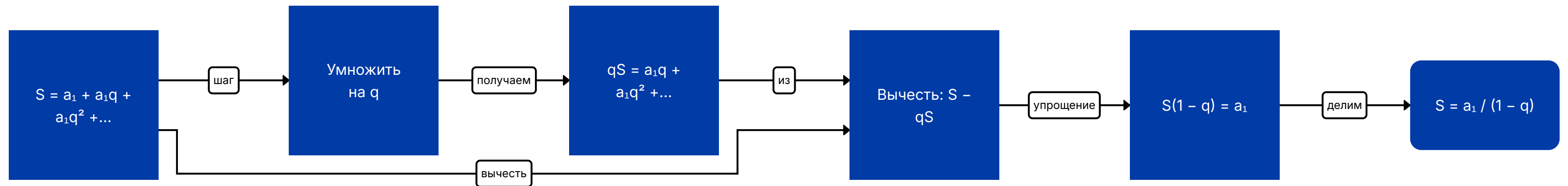
2

— предел суммы ряда
 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Каждый новый член становится вдвое меньше предыдущего, поэтому сумма постепенно приближается к этому числу, не превышая его.

Как выводится формула суммы

Преобразование бесконечного убывающего ряда к удобной формуле.



Формула суммы бесконечной геометрической прогрессии

1. Запись суммы

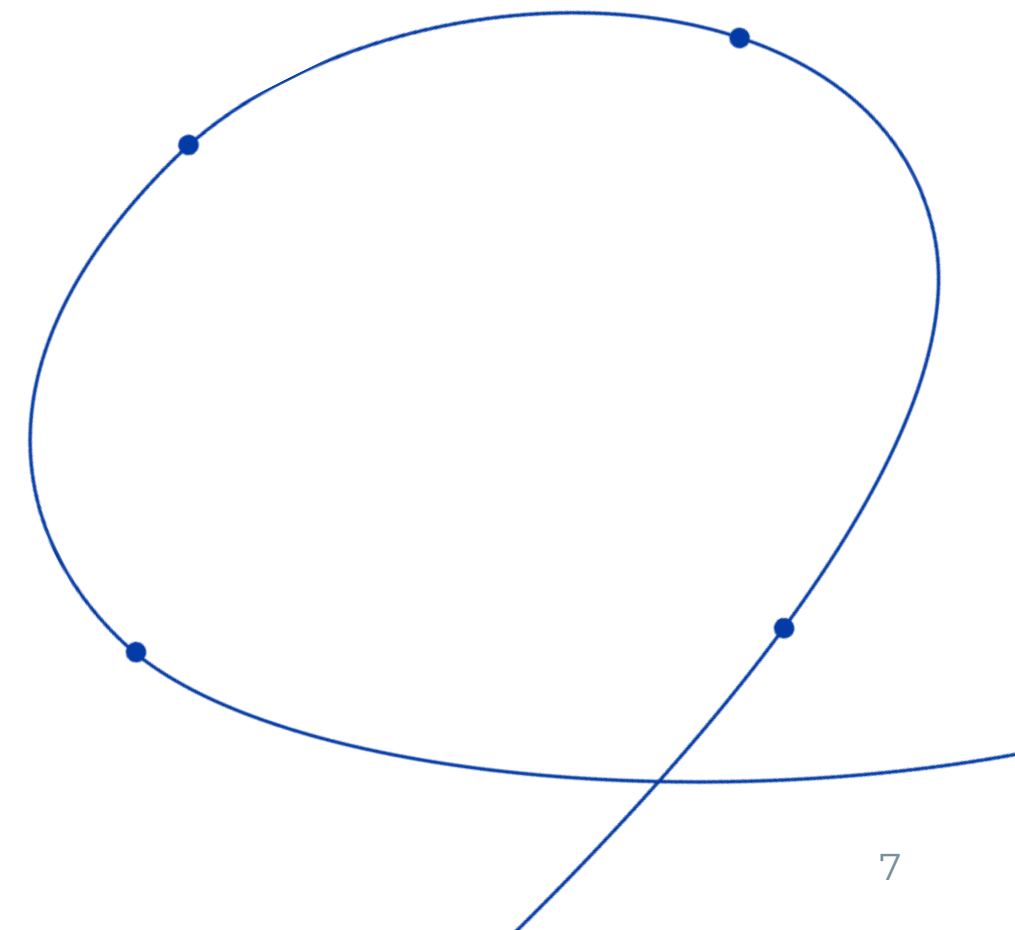
Сначала записывают общий вид ряда: $S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \dots$. В нём каждый следующий член получается по одному и тому же правилу умножения.

2. Главная формула

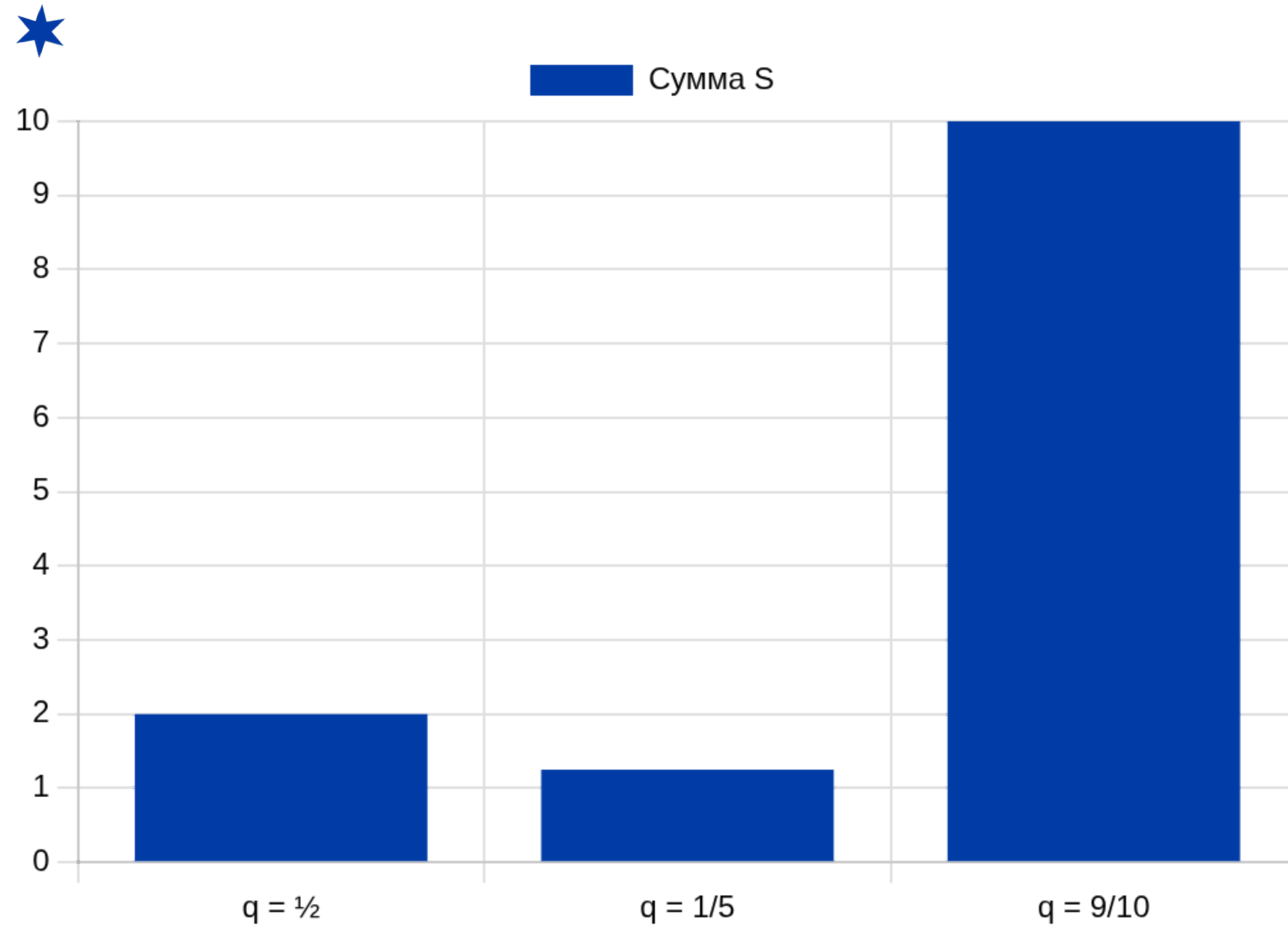
После преобразований получают $S = a_1 / (1 - q)$. Она позволяет быстро находить сумму бесконечного убывающего ряда, если выполнено условие $0 < q < 1$.

3. Как читать результат

Если q близок к 1, знаменатель формулы маленький, поэтому сумма становится большой. Если q близок к 0, сумма мало отличается от первого члена и растёт незначительно.



Как знаменатель влияет на величину суммы



Расчёт по формуле $S = a_1 / (1 - q)$ при $a_1 = 1$

При одном и том же первом члене меняется только q , поэтому хорошо видно, как быстро результат реагирует на изменение знаменателя.

Чем ближе q к 1, тем больше сумма; при меньшем q итог заметно сокращается.

Наглядная модель на отрезке

Половина, четверть, восьмая часть

Отрезок длиной 1 можно мысленно делить на всё меньшие части: 1 , $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... Каждая следующая доля короче предыдущей, но правило деления не меняется.

Сумма частей

Если мысленно складывать все эти отрезки, общая длина постепенно приближается к 2. Такая модель помогает понять, как бесконечный ряд может иметь конечный предел.

Понятная визуализация

Схема на отрезке особенно полезна, потому что показывает уменьшение не в числах, а в длине. Так легче увидеть, почему сумма не возрастает бесконечно.



Сравнение нескольких прогрессий



Таблица показывает, как первый член и знаменатель влияют на итоговую сумму бесконечно убывающего ряда.

При большем a_1 сумма растёт, а меньший q обычно делает итог меньше.

Прогрессия	S
5; $\frac{1}{2}$	10
3; $\frac{1}{3}$	4,5
2; $\frac{2}{3}$	6
4; $\frac{1}{4}$	$\frac{16}{3}$



Расчёт по формуле $S = a_1 / (1 - q)$

Почему сумма остаётся конечной



Члены быстро уменьшаются

При $0 < q < 1$ каждый следующий член становится меньше предыдущего, поэтому вклад в сумму постепенно снижается.



Сумма всё ближе к пределу

Новые слагаемые уже почти не меняют общий результат, и ряд приближается к одному числу.

Бесконечность не накапливается

Хотя членов бесконечно много, их значения стремятся к нулю, поэтому сумма не выходит за конечную границу.



Когда формула не подходит

1.

$$q = 1$$

Если знаменатель равен 1, все члены одинаковы. Тогда ряд не убывает, а сумма постоянно растёт и не может быть конечной.

2.

$$q > 1$$

При знаменателе больше 1 каждый следующий член становится больше предыдущего. Такой ряд возрастает, поэтому формула суммы бесконечной убывающей прогрессии неприменима.

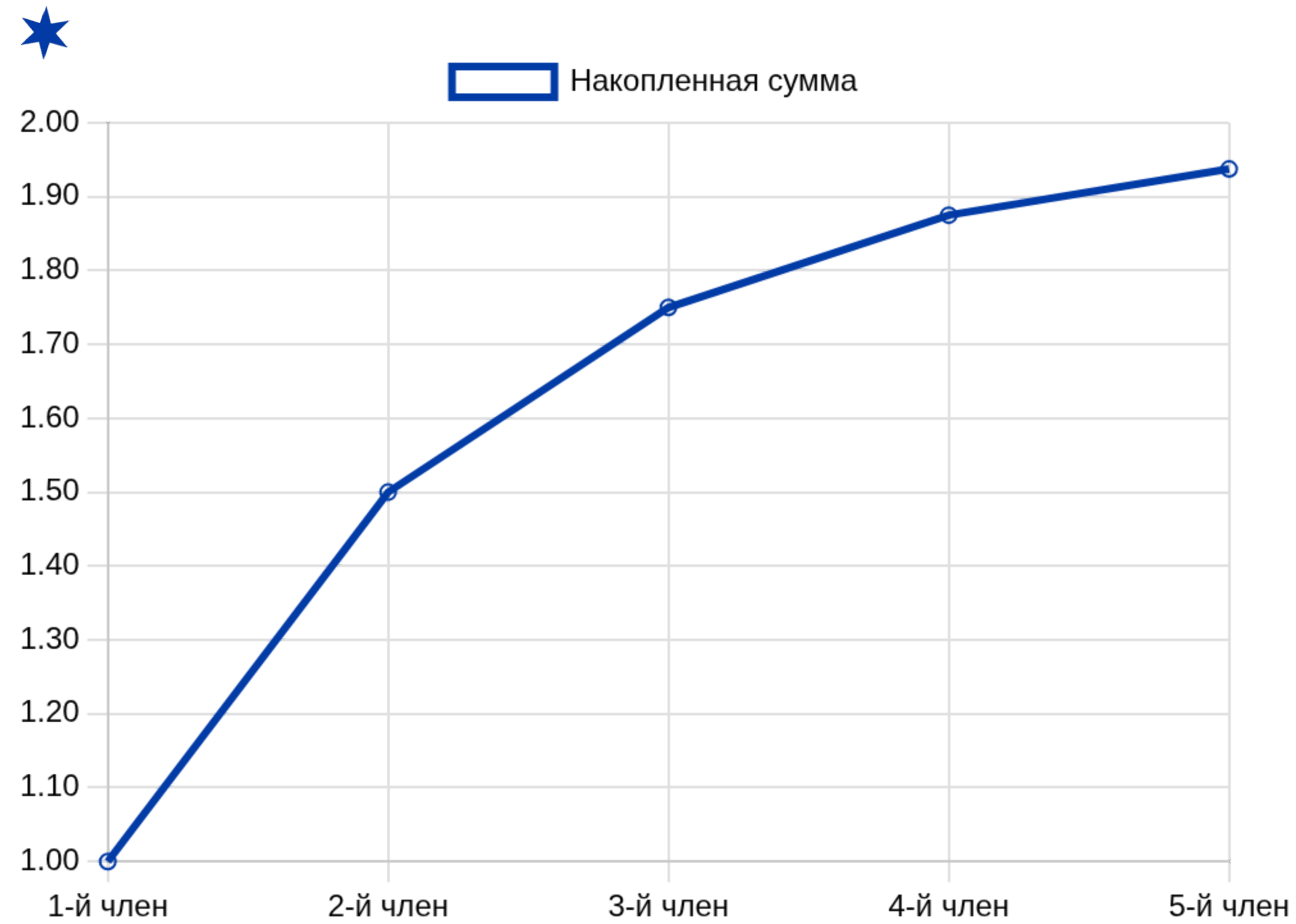
3.

$$q \leq 0$$

Если знаменатель нулевой или отрицательный, члены меняются иначе, и уже нельзя говорить о бесконечно убывающей геометрической прогрессии в обычном смысле.



Как накапливается сумма первых членов



Рассчитано по ряду $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$

Последовательное прибавление новых членов показывает, что каждый следующий шаг даёт всё меньший прирост к общей сумме.

Значения быстро приближаются к 2, поэтому ряд имеет конечный предел, хотя состоит из бесконечного числа слагаемых.

Связь с процентами и уменьшением цены



Процентное уменьшение

Если величина каждый раз уменьшается на 20%, остаётся 80% от прежнего значения. Это соответствует множителю 0,8 и создаёт убывающую геометрическую прогрессию.



Цена после скидки

При повторяющемся снижении цены каждый новый шаг можно описать одинаковым отношением. Так удобно считать стоимость после нескольких последовательных уменьшений.



Количество вещества

В химии или физике величина может уменьшаться по одинаковому правилу. Тогда поведение процесса удобно описывать через геометрическую прогрессию.



Постепенное сближение

Иногда расстояние или разница уменьшаются на одну и ту же долю. Такой процесс наглядно показывает, как число шагов может быть бесконечным, а результат — конечным.

Практический пример с деньгами

Купюры, которые уменьшаются вдвое

Представим ряд платежей: 100, 50, 25, 12,5 и так далее. Каждый следующий платеж в два раза меньше предыдущего, поэтому здесь $q = \frac{1}{2}$. По формуле сумма всех этих выплат равна 200.



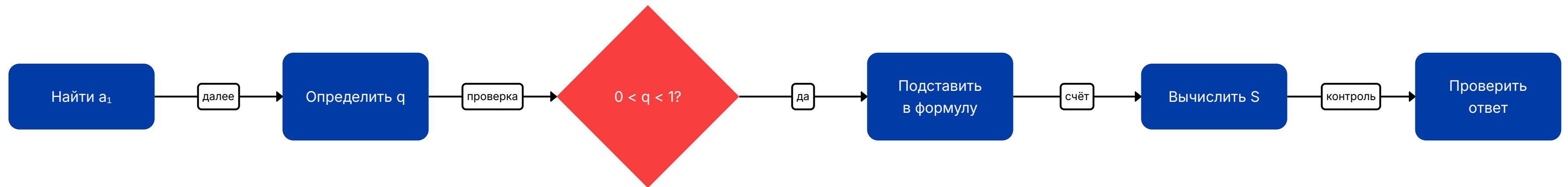
Почему итог не бесконечен

Хотя платежей можно продолжать сколько угодно, добавляемые суммы становятся всё меньше. Именно поэтому общий результат можно вычислить заранее, не складывая бесконечно много чисел по отдельности.



Алгоритм нахождения суммы

Последовательность действий при решении задачи на сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии.



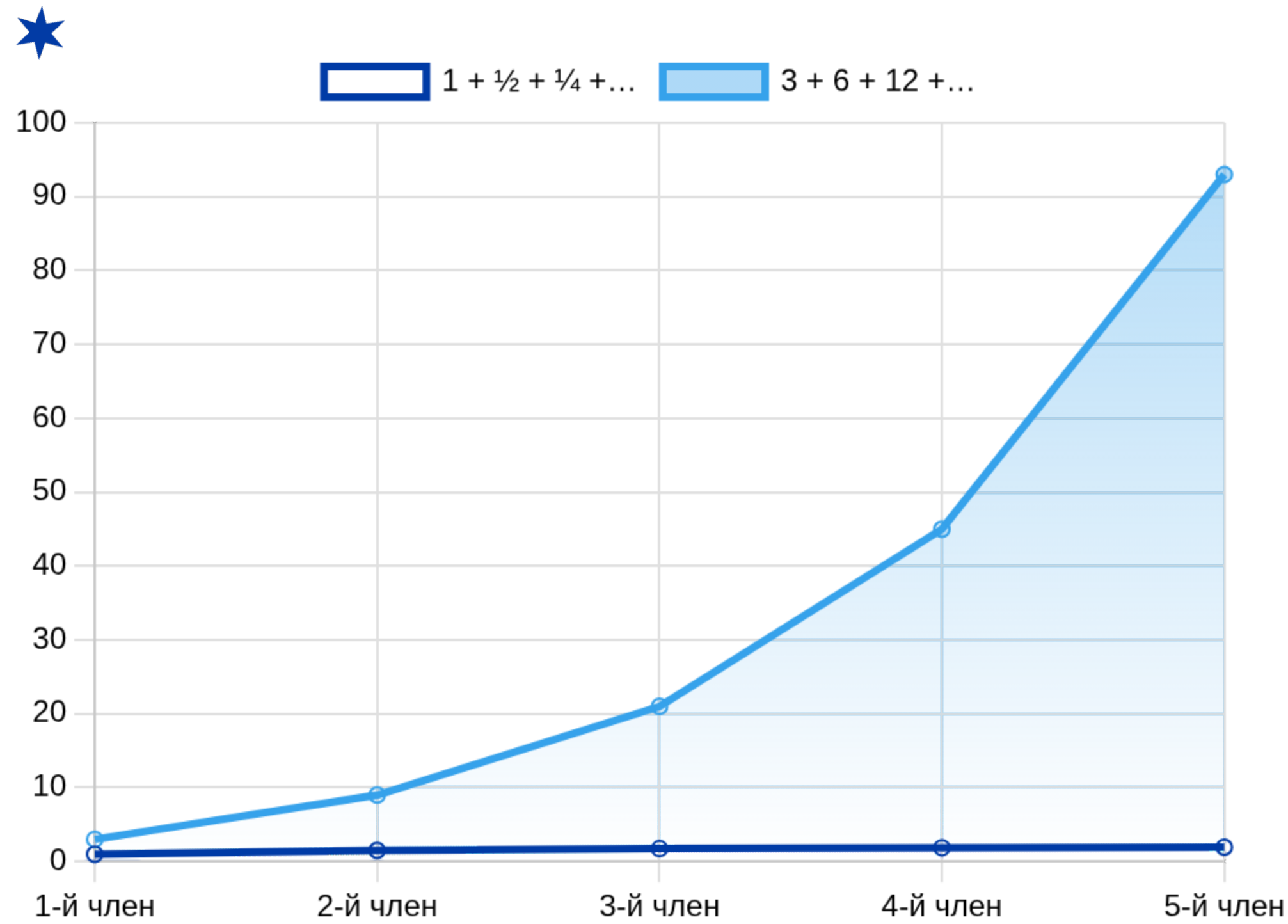
Типичные ошибки при решении задач

Таблица показывает самые частые ошибки и помогает заранее проверить решение.

Большинство ошибок связано не с формулой, а с невнимательностью при проверке условий и вычислений.

Ошибка	Причина	Что помнить
Не проверено q	Формула не всегда подходит	Нужно $0 < q < 1$
Путаница a_1 и q	Разные роли в записи	Первый член и знаменатель — не одно и то же
Ошибка в вычитании	Потерян общий множитель	Аккуратно раскрывать $S — qS$
Нет проверки ответа	Не оценена сумма	Сравнить результат с первым членом

Конечная и бесконечная сумма: сравнение



Оба ряда бесконечны по числу членов, но их поведение различается из-за знаменателя прогрессии.

При $q = \frac{1}{2}$ сумма стремится к пределу, а при $q = 2$ значения неограниченно растут.

Рассчитано по стандартным примерам геометрических прогрессий

Главные свойства суммы бесконечно убывающей прогрессии



Есть условие применимости

Сумма существует только тогда, когда знаменатель лежит между 0 и 1. Без этого формула для бесконечно убывающей прогрессии не работает.



Влияние первого члена

Чем больше первый член a_1 , тем больше итоговая сумма. Начало прогрессии задаёт масштаб всего ряда и напрямую влияет на ответ.



Близость q к 1

Когда q приближается к 1, знаменатель формулы становится очень маленьким, а сумма резко увеличивается. Это самый чувствительный параметр задачи.



Удобная формула

Запись $S = a_1 / (1 - q)$ позволяет быстро находить ответ без длинного сложения. Она объединяет все основные свойства темы в одной формуле.



Что важно запомнить

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия показывает, что даже бесконечный ряд может иметь конечную сумму. Главное — правильно определить a_1 и q , а затем применить формулу без ошибок.

