

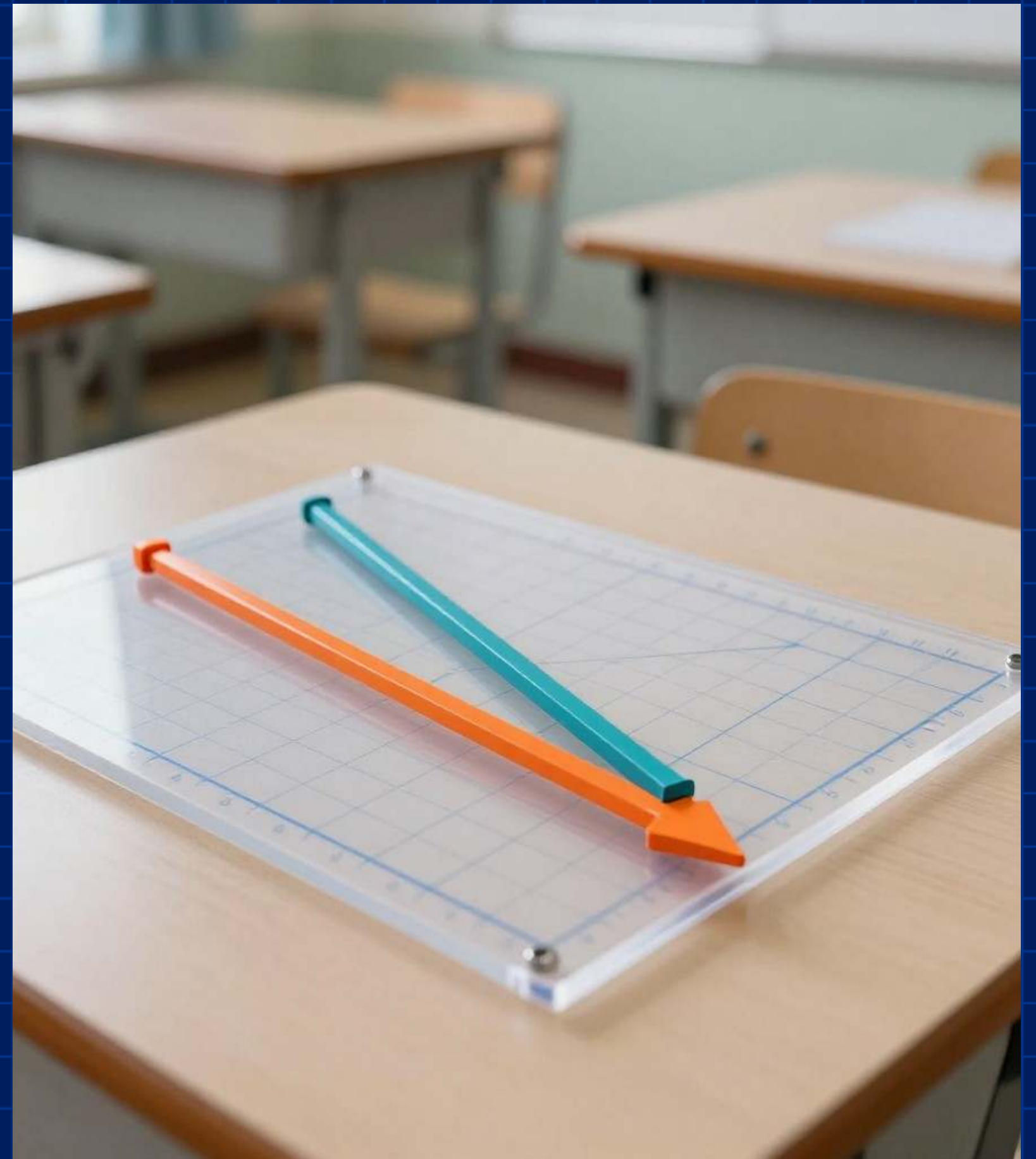
Координатная запись действий над векторами. Уравнение окружности

Векторы по координатам и окружность по
уравнению: учимся считать и понимать смысл
формул.

1 ÷ 2

log

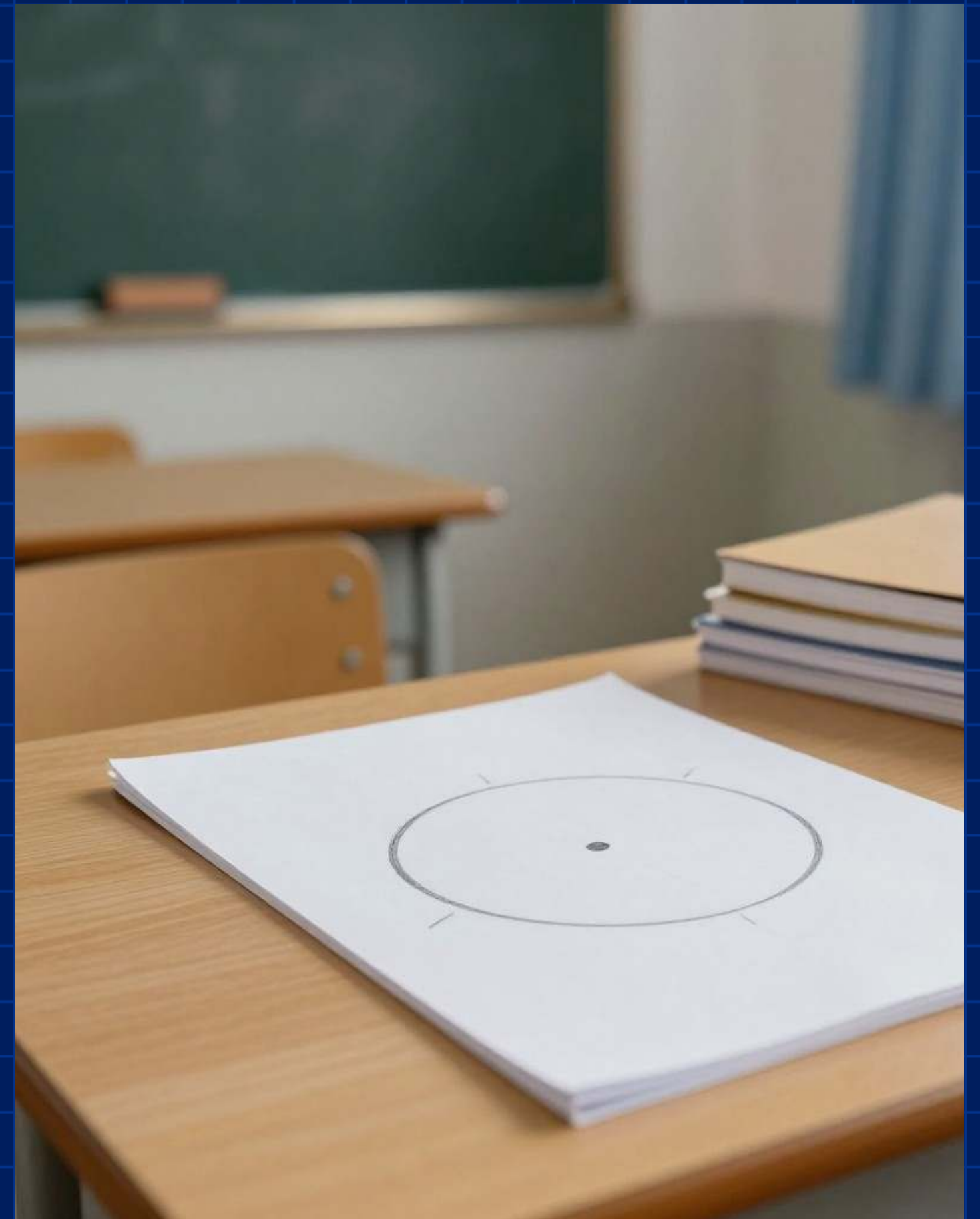
8



Плоскость, где числа превращаются в геометрию



Координаты задают положение точки точно: два числа вместо «на глаз». Вектор описывает перемещение и направление, а уравнение окружности — все точки на одинаковом расстоянии от центра. Эти приёмы помогают в чертежах, картах и задачах на расстояния.



Что такое координатная запись вектора

Вектор на плоскости задаётся упорядоченной парой чисел $(x; y)$. Координата x показывает, на сколько шагов меняется положение по оси Ox , а y — по оси Oy .

Нулевой вектор имеет координаты $(0; 0)$. Он не задаёт перемещения: при любом «повторении» остаётся на месте, как будто движения нет.

Равные векторы имеют одинаковые координаты и одинаковую длину, даже если они нарисованы в разных местах. Значит, важны величина и направление, а не точка начала.



Основные действия с векторами по координатам

Действие	Формула	Смысл
Сложение	$(x_1+x_2; y_1+y_2)$	Компоненты складываются
Вычитание	$(x_1-x_2; y_1-y_2)$	Разность по осям
Умножение на k	$(kx; ky)$	Одинаковое число для обеих координат

Учебный материал по векторной алгебре в координатах (школьный курс).



Три ключевых действия выполняются по координатам отдельно: складываем, вычитаем или умножаем каждую компоненту, а затем получаем новый вектор.

Координатные вычисления заменяют рисунки: результат находится сразу формулами, без длинных построений.

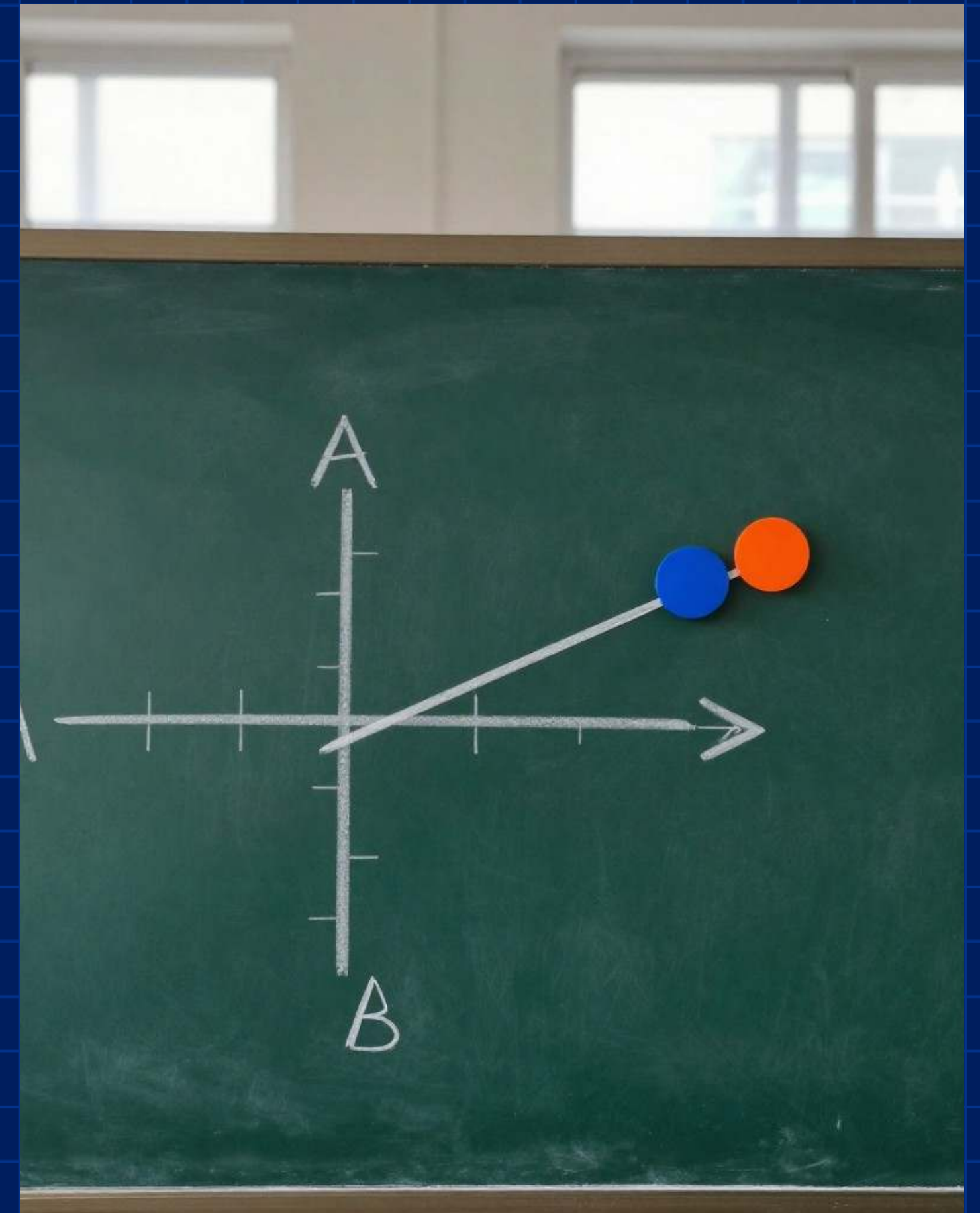
Вектор на координатной плоскости

Как связаны точки и координаты вектора

Точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ вместе с направленным отрезком AB задают вектор. Его начало в A , а конец в B , поэтому стрелка показывает перемещение от первой точки ко второй.

Откуда берутся разности по осям

Координаты вектора AB равны $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Если мысленно посмотреть, как меняется координата x при переходе от A к B и как меняется y , становятся видны эти разности.



Как меняются координаты

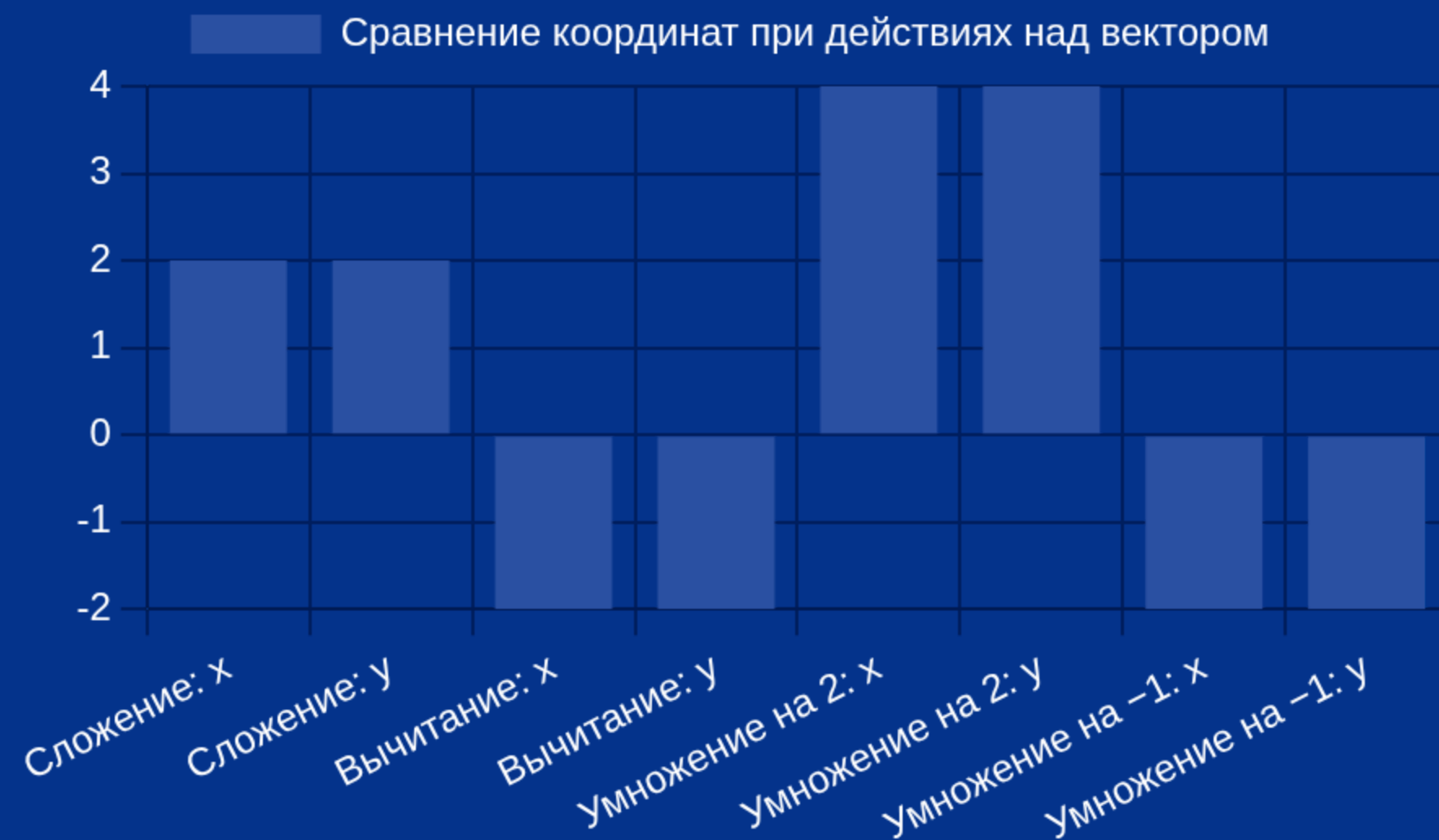


Схема действий по координатам (примерный вид сравнения до/после).

Изменение каждой координаты зависит только от выбранного действия: знаки и величины пересчитываются отдельно.

По диаграмме видно, что сложение и умножение меняют масштаб и направление «по осям», а вычитание — знак и величину разности.


$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Координатная запись позволяет находить сумму быстро и без построений: каждая компонента считается отдельно, затем собирается новый вектор.

Чтобы сложить такие векторы, достаточно сложить соответствующие координаты и получить результат по каждой оси.

Собственный учебный пример из описания правила сложения в координатах.



Вычитание векторов и противоположный вектор

1 Если $a = (x_1; y_1)$, $b = (x_2; y_2)$, то $a - b = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$. Значит, разность по x и разность по y считаются независимо.

2 Противоположный вектор к $a = (x; y)$ имеет координаты $(-x; -y)$. Он направлен в другую сторону и отличается только сменой знаков у координат.

3 При вычитании удобно думать о переходе между положениями: когда b вычитают из a , итог показывает, насколько нужно сместиться от конца b к концу a .

Умножение вектора на число



Записать вектор

Пусть задан вектор $a = (x; y)$. Его координаты – это две компоненты, которые нужно преобразовать.

Выбрать число k

Выбираем число k и рассматриваем вектор $k \cdot a$. Одно и то же число действует сразу на обе координаты.

Вычислить новые координаты

Находим $k \cdot a = (kx; ky)$. При этом координаты x и y умножаются на k одинаково.

Понять результат по смыслу

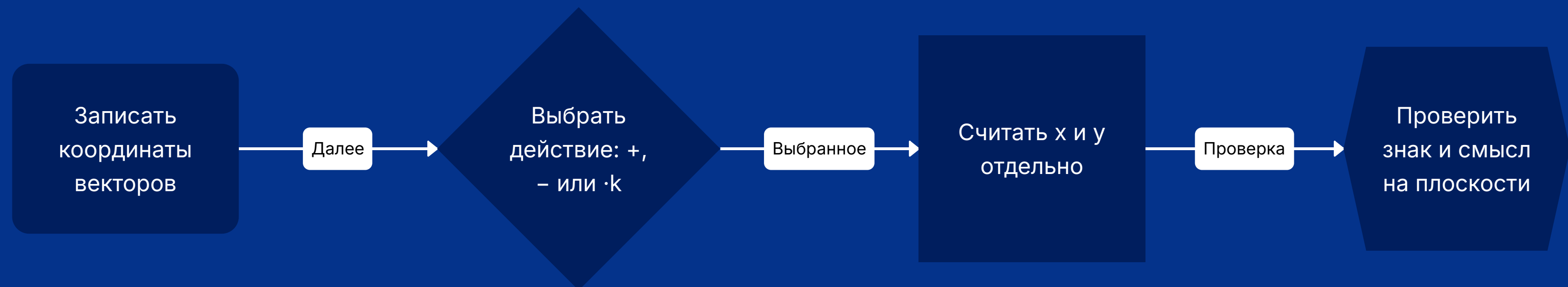
Если $k > 1$, вектор становится длиннее; при $0 < k < 1$ – короче; при $k = 0$ – нулевой; при $k < 0$ – направление меняется на противоположное, а длина растёт в $|k|$ раз.



log

Алгоритм вычислений по координатам векторов

Сначала выбираем действие, затем считаем x и y отдельно и проверяем смысл результата на плоскости.





Длина вектора $a=(x;y)$ равна $|a|=\sqrt{x^2+y^2}$.
Она следует из прямоугольного
треугольника по координатам. То же
выражение даёт расстояние АВ через вектор
АВ.

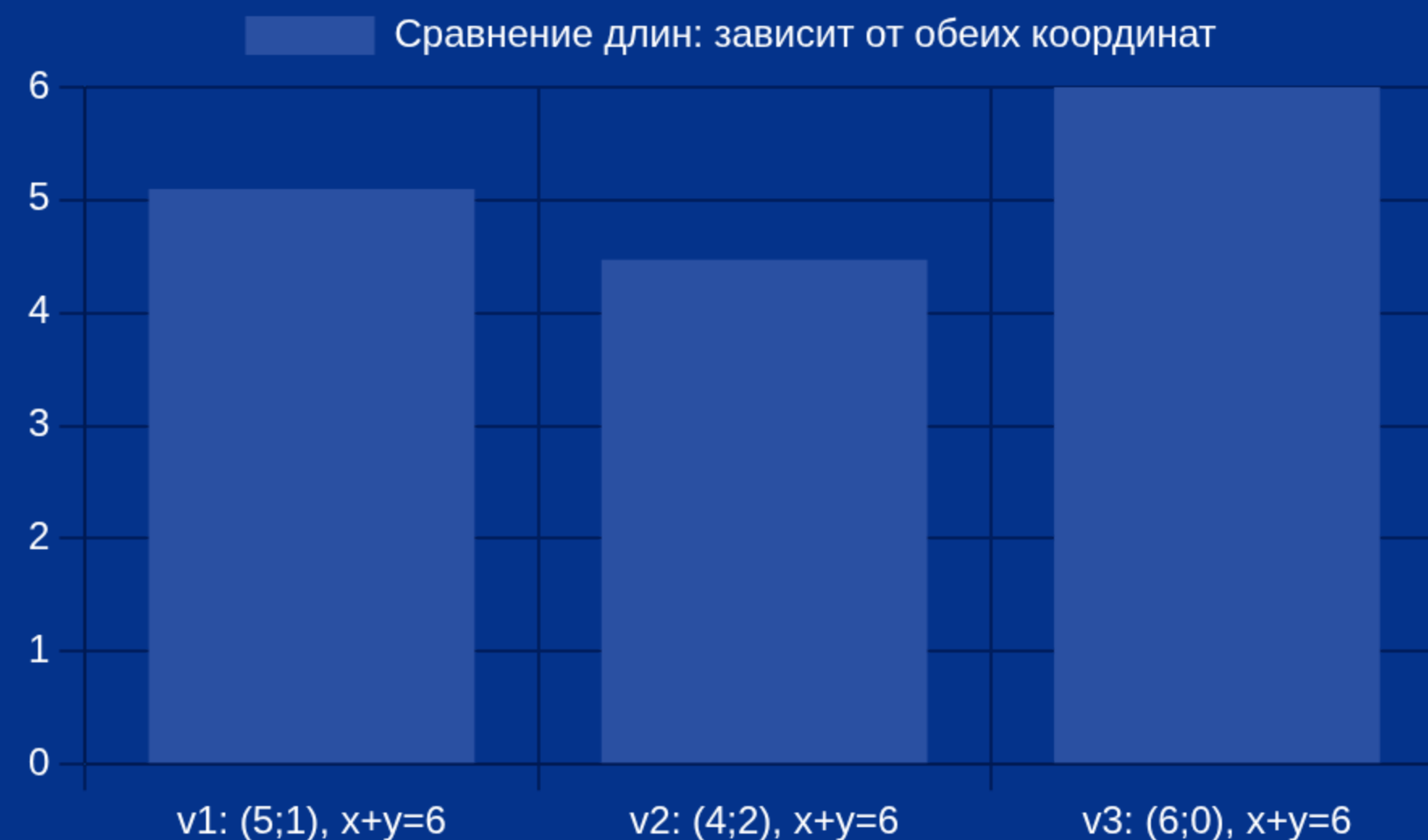
7

**На уровне 7 класса
формула длины вектора
связывает координаты и
расстояние между точками**

Школьный курс геометрии (7 класс), связь координат с теоремой Пифагора.



Сравнение длин векторов по координатам



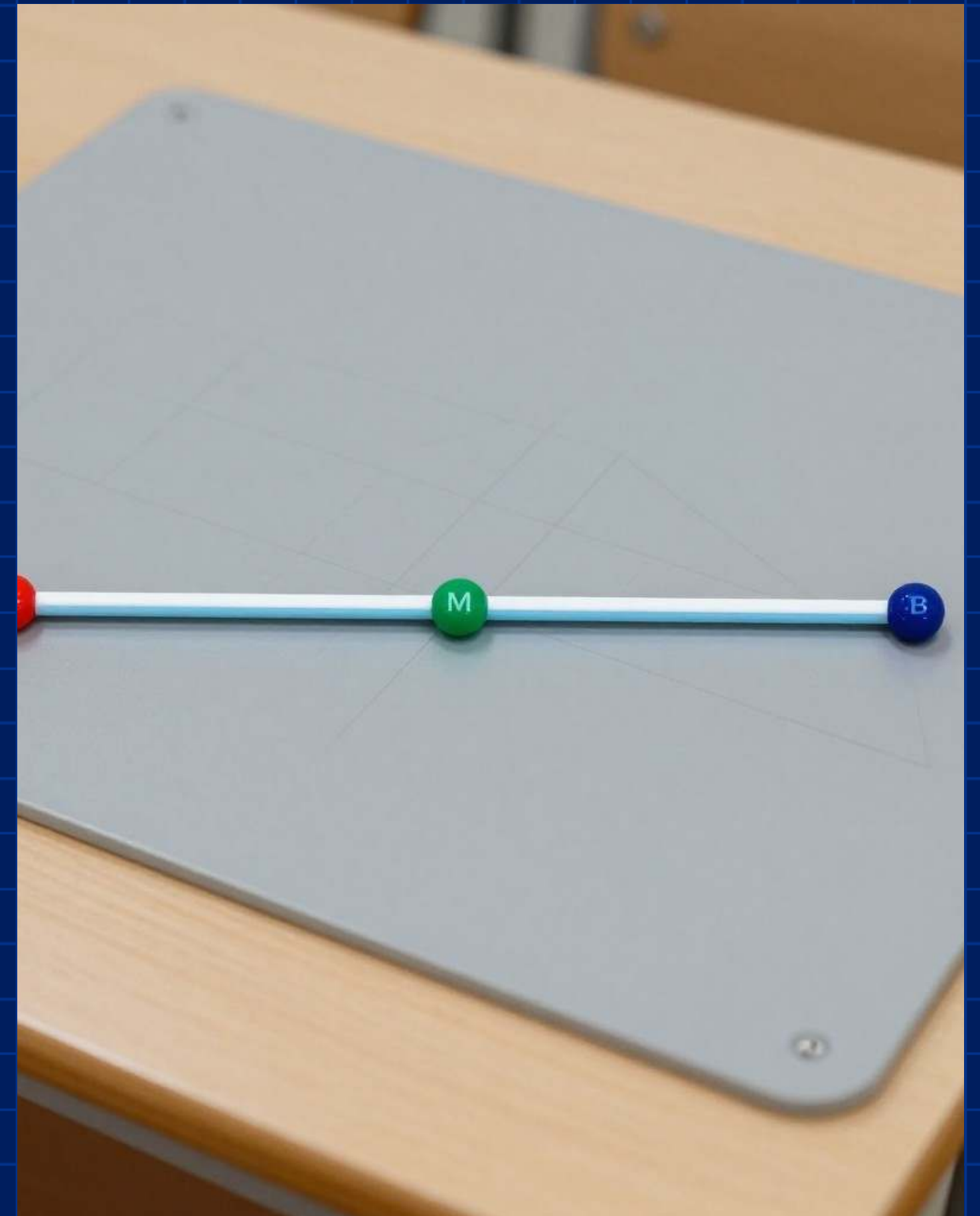
Смоделировано по формуле длины $|(x;y)| = \sqrt{x^2+y^2}$. Точные значения: $\sqrt{26}$, $\sqrt{20}$ и $\sqrt{36}$.

На диаграмме у всех векторов одинаковая сумма координат $x+y$, но длины различаются: каждая длина учитывает и x , и y одновременно.

Вывод: одинаковая сумма координат не гарантирует одинаковую длину. Для сравнения нужно вычислять $\sqrt{x^2+y^2}$, а не сравнивать только $x+y$.

Середина отрезка и координаты точки М

- 1 Координаты середины М отрезка АВ вычисляются по формуле $M((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2)$. Это значит: по каждой оси берётся среднее арифметическое координат концов.
- 2 Если середину нужно найти без линейки, достаточно подставить координаты $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Полученная точка одинаково удалена от А и В, что удобно для симметрии и построений.



Что такое окружность в координатах

Окружность в координатной плоскости — это все точки $M(x;y)$, для которых расстояние до центра $O(a;b)$ постоянно и равно радиусу R . То есть выполняется $OM=R$.

Записывая условие $OM=R$ через координаты, получают уравнение окружности: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Здесь квадраты отвечают за смещения по горизонтали и вертикали.

Уравнение автоматически «задаёт» все точки на одинаковом расстоянии от центра, поэтому по нему можно проверять принадлежность точки окружности и строить круг без измерений.

$$x^2 + 4x - 8$$

Виды уравнения окружности

Центр	Радиус	Уравнение окружности
$O(0;0)$	R	$x^2 + y^2 = R^2$
$O(a;b)$	R	$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

Школьный курс алгебры и геометрии (уравнение окружности на координатной плоскости).

Уравнение окружности зависит от положения центра: для центра в начале координат оно упрощается, а для произвольного центра – содержит сдвиги по x и y .

Главная особенность: в выражениях $(x-a)$ и $(y-b)$ координаты центра входят со знаком «минус», потому что описываются отклонения от центра.

Из каких частей состоит уравнение окружности

Сдвиг по x Сдвиг по y Радиус² (R²)



Обобщение школьной формы уравнения окружности (канонический вид).

В записи $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ две части с квадратами отвечают за расстояния до центра по x и по y. Правая часть – постоянное значение радиуса.

Поскольку R^2 не меняется, сумма двух квадратов смещений остаётся одной и той же для любой точки окружности, значит расстояние до центра постоянно.

Как распознать уравнение окружности

Обычно в уравнении окружности встречаются x^2 и y^2 с одинаковыми коэффициентами. Это признак того, что искомая фигура симметрична относительно поворота и имеет «круговую» форму.

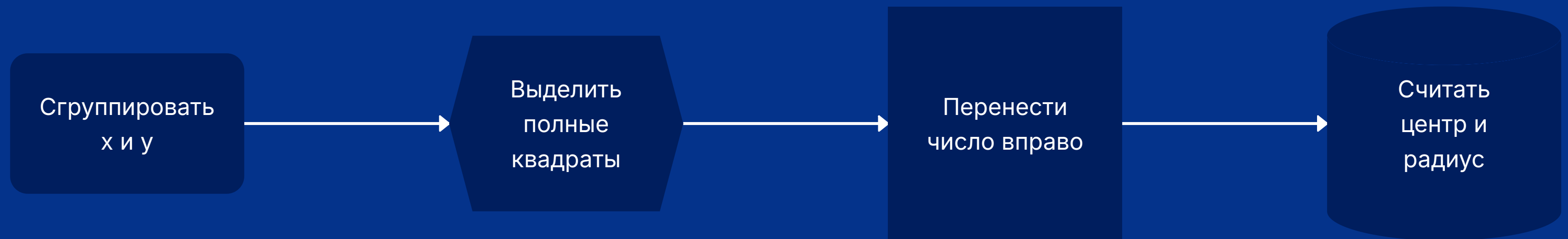
Если присутствуют линейные члены x и y , их приводят к форме с полными квадратами. Метод выделения квадратов позволяет заменить x^2-4x и т.п. на выражения вида $(x-a)^2$.

После преобразований уравнение приводят к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Тогда центр окружности сразу читается как $O(a;b)$, а радиус — из R^2 .

Например, при $x^2+y^2-4x+6y=12$ после выделения полных квадратов находят центр и радиус. Такая техника часто встречается в задачах повышенной сложности.

Преобразование общего уравнения в каноническое

Логика преобразований: привести уравнение к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ выделением полных квадратов.



Связь векторов и окружности в задачах

1

log



Расстояния и длины

По координатам вектора находят длину по формуле $\sqrt{x^2+y^2}$. Эти же расчёты дают расстояние между точками — базовый шаг, когда условия задачи задаются через «одинаковое расстояние».



Смещения и середины

Вычитание векторов удобно трактовать как переход между положениями. Затем по формуле середины можно получать точку, необходимую для построения или симметрии в дальнейшем решении.



Проверка принадлежности точке

Чтобы проверить, лежит ли точка $M(x;y)$ на окружности, подставляют координаты в уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$. Векторная идея помогает понять смысл расстояний до центра.



Построение окружности по данным

Если известны центр и точка на окружности, радиус — это длина соответствующего вектора. Далее по найденному R строят окружность через её каноническое уравнение.

2

x

Один инструментарий — для векторов и окружности

Координатная запись делает действия с векторами точными: сложение, вычитание и умножение на число выполняются по координатам. Длины и расстояния считают по $\sqrt{x^2+y^2}$, а окружность описывают уравнением с постоянным радиусом.



cos

sin

1

tg

ctg