

Announcement

Office



Формулы суммы и разности кубов

Разбираем, как два куба превращаются в произведение.

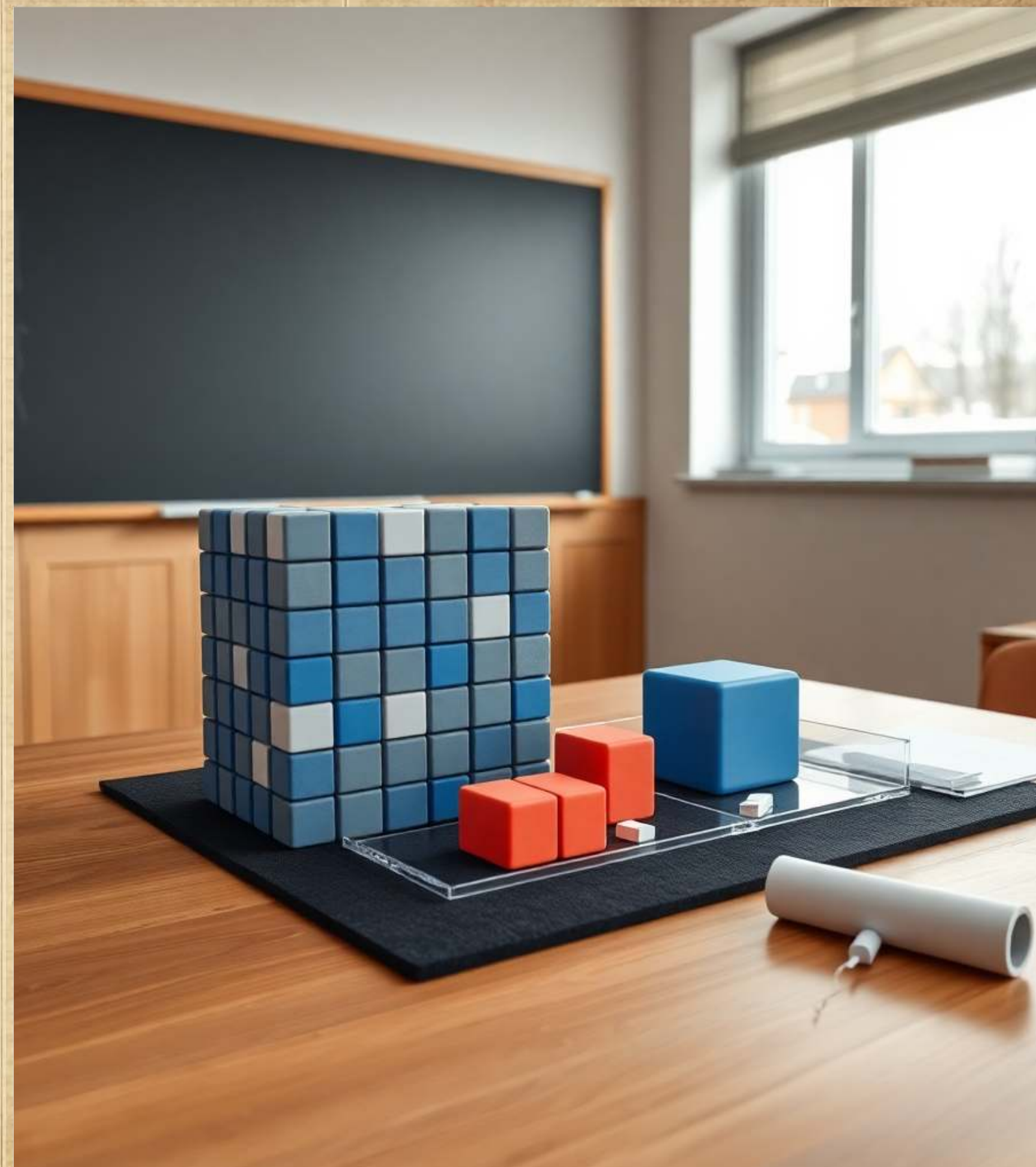
Making A

THE PLAN

Issue

Куб числа и его роль в алгебре

Куб — это третья степень числа. В 7 классе уже умеют работать с многочленами и учатся разлагать выражения на множители. Формулы кубов помогают быстро распознавать нужный шаблон и упрощать запись без лишних вычислений.



Что означает выражение a^3

1

Три одинаковых множителя

Запись a^3 означает $a \cdot a \cdot a$: число или выражение умножается само на себя три раза. Это и есть третья степень, которую называют кубом.

2

Примеры вычислений

Например, $4^3 = 64$, $(-2)^3 = -8$, а x^3 остаётся x^3 . Формула показывает не действие с разными числами, а повторное умножение одного и того же множителя.

3

Почему знак может быть минусом

Если число отрицательное, его куб тоже отрицателен: при трёх одинаковых множителях знак «минус» сохраняется. Поэтому куб отличается от квадрата, где результат не бывает отрицательным.

4

Связь с буквенной записью

Когда вместо числа стоит буква, правило не меняется: $(x)^3 = x^3$. Это удобно, потому что формулы кубов работают и с числами, и с буквами, и с выражениями.

Формула суммы кубов

Основная запись

Формула суммы кубов выглядит так: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$. Она позволяет заменить сумму двух кубов произведением двух скобок.

1

Что в первой скобке

Первая скобка повторяет знак между кубами: если стоит плюс, то пишем $a + b$. Она показывает, что сначала берутся сами выражения, а не их степени.

2

Как устроена вторая скобка

Во второй скобке стоят три части: квадрат первого выражения, минус произведение двух выражений и квадрат второго выражения. Именно этот шаблон делает формулу верной.

3

Формула разности кубов

1

Основная запись

Формула разности кубов записывается так: $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$. Она тоже заменяет сумму или разность кубов произведением двух множителей.

2

Первая скобка по знаку

В первой скобке знак совпадает с исходным выражением: если между кубами минус, то и здесь пишем $a - b$. Это помогает быстро выбрать нужную формулу.

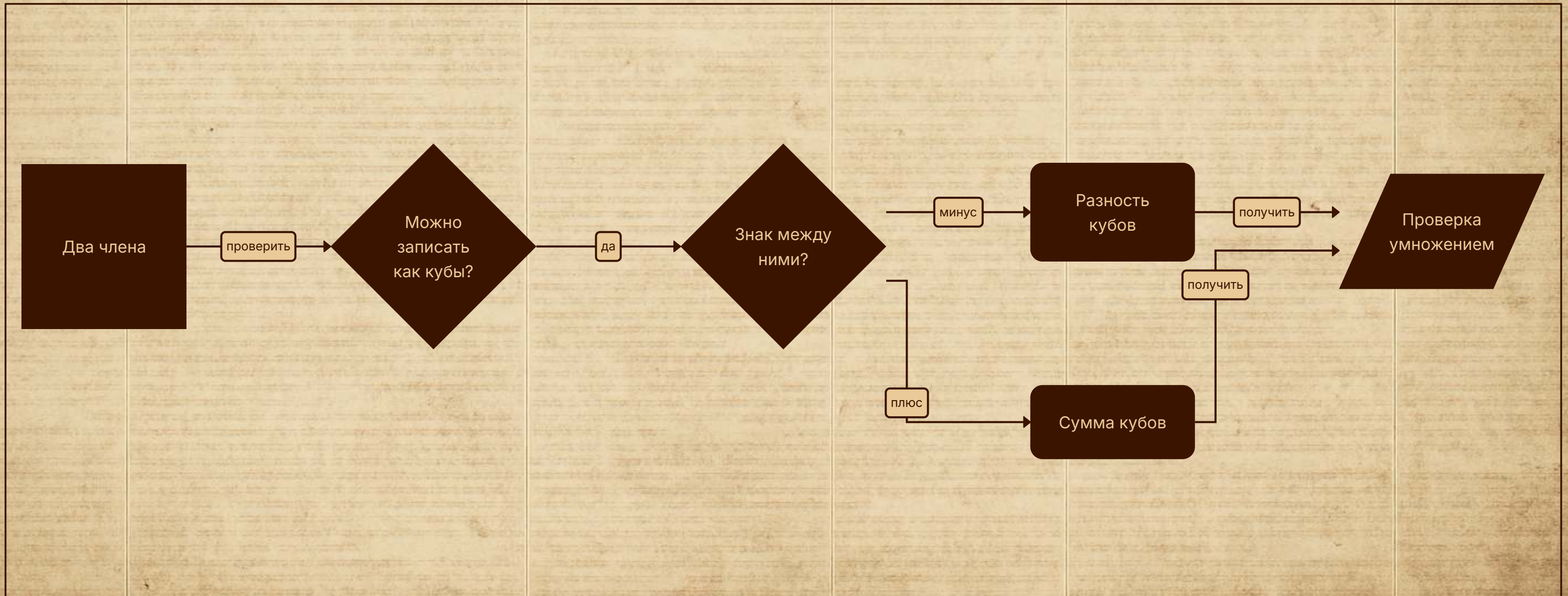
3

Отличие второй скобки

Во второй скобке знаки идут иначе, чем в формуле суммы кубов: квадрат первого выражения, плюс произведение, плюс квадрат второго. Именно средний знак отличает две формулы.

Выбор формулы по шагам

Схема показывает, как распознать сумму или разность кубов и выбрать нужный шаблон.



Сравнение двух формул кубов

Таблица показывает, как знак между кубами связан со знаком в середине второй скобки.

Выражение	1-я скобка	2-я скобка	Средний знак
a^3+b^3	$(a+b)$	(a^2-ab+b^2)	-
a^3-b^3	$(a-b)$	(a^2+ab+b^2)	+

Знак между кубами и знак в середине второй скобки всегда различаются.

Формулы сокращённого умножения

Проверка суммы кубов умножением

Раскрываем скобки

Перемножаем $(a+b)(a^2-ab+b^2)$ по частям: $a \cdot a^2$, $a \cdot (-ab)$, $a \cdot b^2$, затем $b \cdot a^2$, $b \cdot (-ab)$ и $b \cdot b^2$. Так видно, откуда берётся каждое слагаемое.

1

Что получается

После раскрытия скобок появляются члены a^3 — $a^2b + ab^2 + a^2b$ — $ab^2 + b^3$. Здесь уже заметно, что есть пары одинаковых слагаемых с разными знаками.

2

Сокращение средних членов

Члены $-a^2b$ и $+a^2b$, а также $+ab^2$ и $-ab^2$ взаимно уничтожаются. Остаётся только $a^3 + b^3$, значит формула составлена правильно.

3

Зачем нужна проверка

Проверка показывает: вторая скобка выбрана так, чтобы при умножении лишние части исчезали. Поэтому формулу можно не только запомнить, но и объяснить через раскрытие скобок.

4

Проверка разности кубов умножением

1

Начинаем раскрытие

Перемножаем $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ по частям.
Сначала умножаем a ,
затем вычитаем
произведения с b , чтобы
увидеть все
появляющиеся члены.

2

Получаем полную запись

После раскрытия
получаем $a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3$. В записи сразу
видно, что середина
содержит пары
одинаковых слагаемых
с разными знаками.

3

Сокращаем одинаковые члены

Положительные
и отрицательные a^2b
сокращаются, так же
исчезают $+ab^2$ и $-ab^2$.
В результате остаётся
только $a^3 - b^3$,
как и должно быть.

4

Вывод из проверки

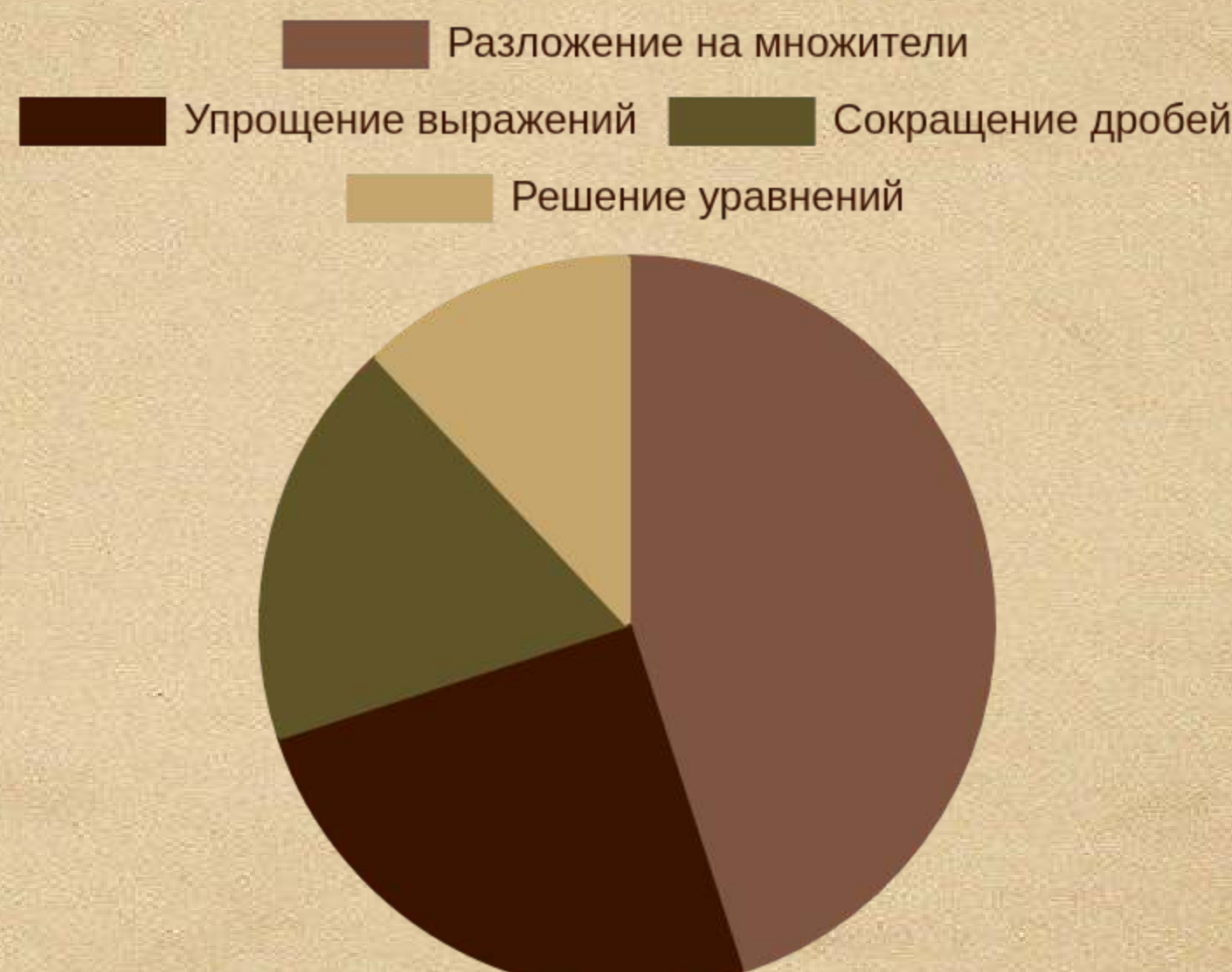
Эта проверка
подтверждает, что
формула работает
не случайно: средние
члены специально
подобраны так, чтобы
взаимно уничтожаться
при умножении.

Где применяются формулы кубов

Формулы особенно полезны там, где нужно быстро увидеть скрытый множитель и упростить запись.

Чаще всего формулы кубов используют для разложения многочленов; остальные случаи опираются на уже найденное разложение.

Учебные применения формул сокращённого умножения



Как выглядит разложение кубов на схеме

Два куба

На схеме выражения a^3 и b^3 показаны как отдельные объекты, чтобы было видно: сначала мы имеем сумму или разность двух кубов, а затем заменяем её произведением скобок.

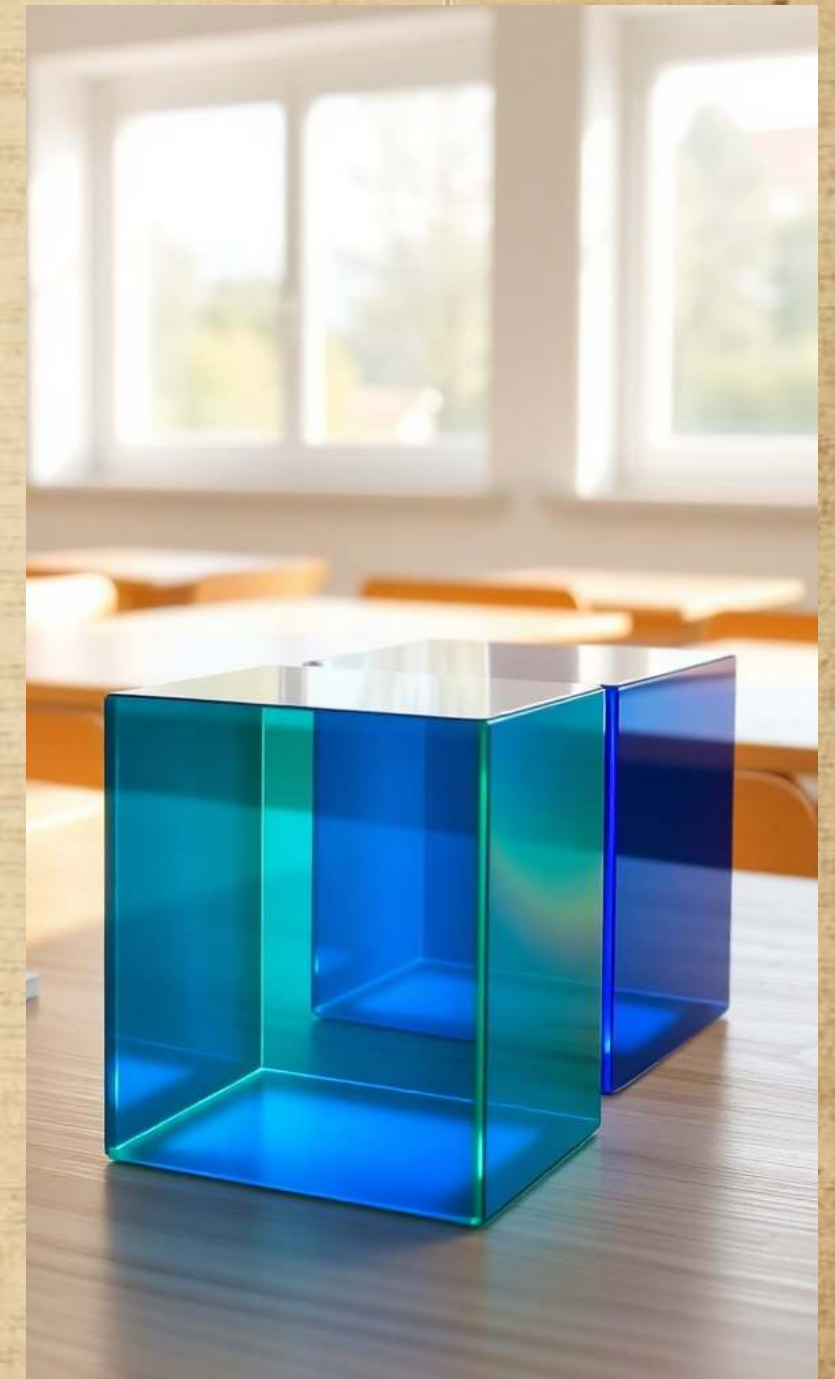
Стрелка преобразования

Стрелка от исходной записи

к произведению подчёркивает смысл формул: сложное выражение не исчезает, а переписывается в более удобном виде, где легче искать множители и сокращать.

Связь с формулами

Подписи рядом со схемой напоминают оба шаблона: $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ и $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Так легче увидеть, как меняется знак внутри второй скобки.



Типичные ошибки при применении формул

Путают знак

Чаще всего ошибаются в знаке середины второй скобки: в сумме кубов он отрицательный, а в разности кубов — положительный. Из-за этого ответ получается неверным.

1

Не проверяют куб

Вторая распространённая ошибка — применять формулу, если хотя бы один член не является кубом. Сначала нужно убедиться, что каждое слагаемое или вычитаемое можно записать как третью степень.

2

Не распознают выражения

Иногда кубом является не только число, но и выражение, например $(2x)^3$ или $(3y)^3$. Важно сначала заметить именно куб, а уже потом подставлять в шаблон формулы.

3

Примеры разложения на множители

Исходное	Кубы	Ответ
x^3+8	x^3+2^3	$(x+2)(x^2-2x+4)$
x^3-27	x^3-3^3	$(x-3)(x^2+3x+9)$
$8a^3-b^3$	$(2a)^3-b^3$	$(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$
$125m^3+n^3$	$(5m)^3+n^3$	$(5m+n)(25m^2-5mn+n^2)$

В таблице показано, как выражения с кубами сразу переводятся в произведение двух скобок.

Во всех примерах сначала выделяется куб, затем выбирается нужная формула и получается произведение двух множителей. Знак во второй скобке всегда противоположен знаку между кубами.

Примеры по формулам суммы и разности кубов

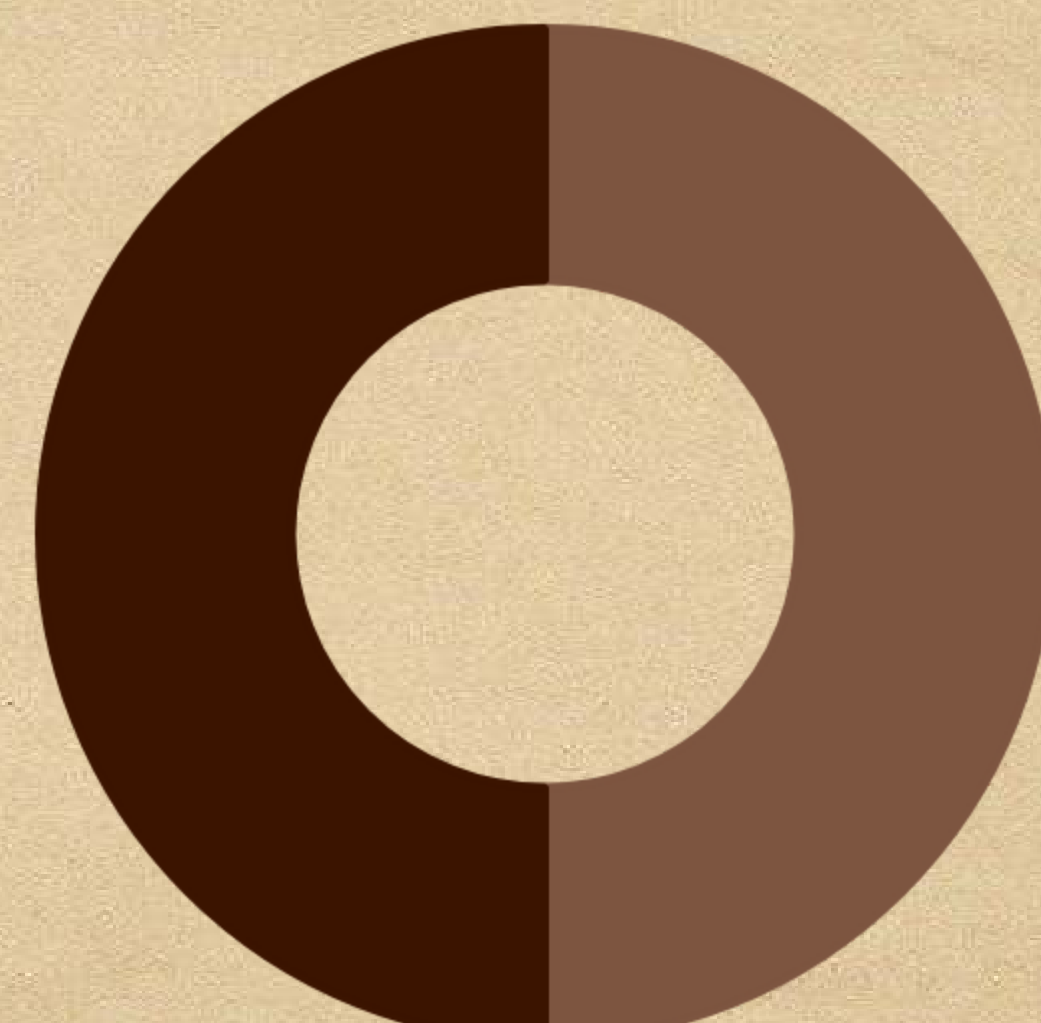
Как запомнить знак во второй скобке

Диаграмма помогает быстро связать знак между кубами с внутренним знаком второй скобки. Это удобная проверка перед записью окончательного ответа.

Если между кубами плюс, внутри второй скобки минус; если минус, внутри — плюс. Правило работает как короткая подсказка при решении.

Формулы a^3+b^3 и a^3-b^3 ; учебный конспект

Сумма кубов Разность кубов



Bus

Trade Rev

They

Issue

Making A

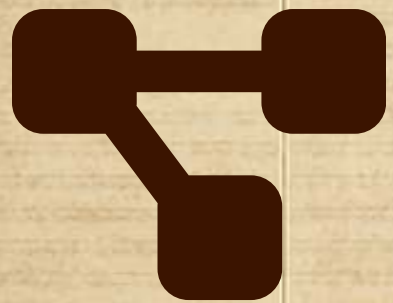
THE PLAN

Связь с другими формулами сокращенного умножения



Общий принцип

Формулы кубов относятся к тем же приёмам, что и квадрат суммы или квадрат разности: вместо длинного перемножения используется готовый шаблон, который сразу даёт ответ.



Своя структура

У формул кубов структура сложнее, потому что во второй скобке не два, а три слагаемых. Это отражает более высокую степень и делает разложение более подробным.



Проверка результата

Все формулы сокращённого умножения удобно проверять раскрытием скобок. Если множители подобраны верно, лишние члены сокращаются, и остаётся исходное выражение без изменений.

Как формулы кубов помогают сокращать дроби

1

Разложить выражение

Если в числителе или знаменателе стоит сумма или разность кубов, сначала нужно разложить её на множители. Тогда становится видно, какие части выражения можно сократить.

2

Найти общий множитель

После разложения одинаковый множитель может появиться в числителе и знаменателе. Его сокращают, и дробь становится короче, а вычисления — заметно проще.

3

Проверить удобство

Например, $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$, а $x^3 + 27 = (x + 3)(x^2 - 3x + 9)$. Такие преобразования часто открывают способ упростить выражение без лишних действий.

Алгоритм решения примеров с кубами

Последовательность действий при распознавании и разложении суммы или разности кубов.



Геометрический смысл куба



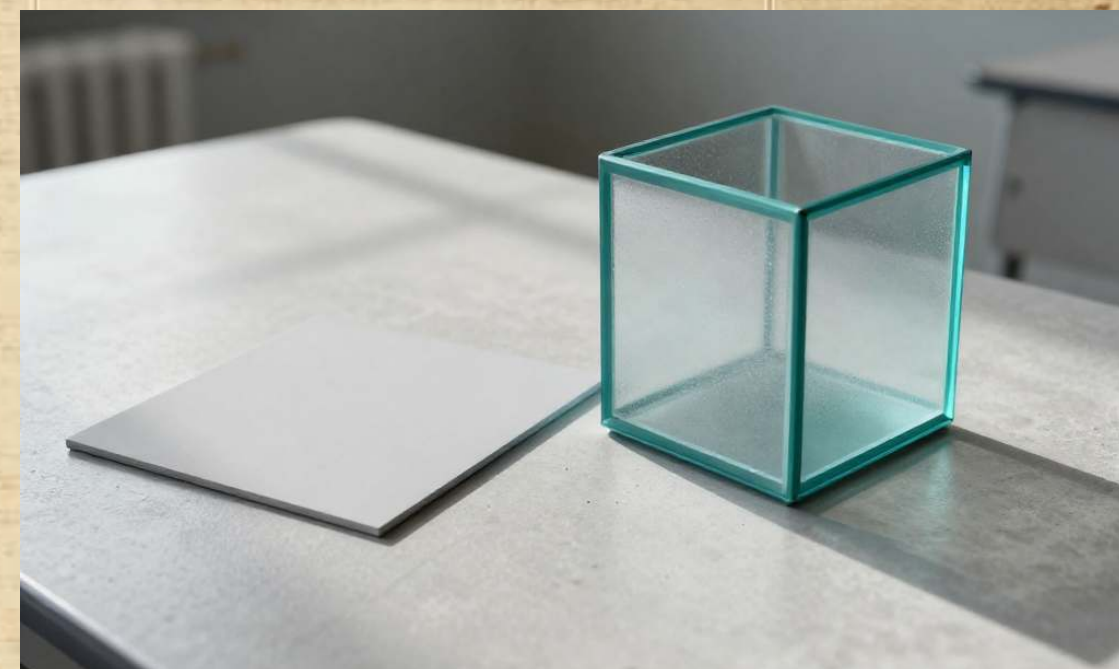
Куб как объём

Когда ребро куба равно a , его объём равен a^3 . Поэтому третью степень называют кубом: она связана не только с записью, но и с реальным пространственным образом.



Два размера рядом

Если рядом изображены кубы с рёбрами a и b , их удобно сравнивать по объёму. Такая картинка помогает увидеть, почему в формулах появляются именно обозначения a^3 и b^3 .



Почему это важно

Геометрический смысл делает формулы понятнее: мы не просто запоминаем буквы, а связываем их с размером и объёмом. Это помогает лучше отличать куб от квадрата.

Короткое правило для запоминания

Сумма кубов

Если между кубами стоит плюс, первая скобка тоже содержит плюс: $(a+b)$.

Во второй скобке обязательно появляется минус: a^2-ab+b^2 . Так легко запомнить нужный шаблон.

1

Разность кубов

Если между кубами стоит минус, первая скобка повторяет его: $(a-b)$.

Во второй скобке знак в середине меняется на плюс: a^2+ab+b^2 .

2

Сначала знак снаружи

Проверку удобно начинать с первой скобки: она всегда копирует знак между кубами. Это быстрый способ не перепутать формулы и сразу выбрать правильный вариант.

3

Потом середина

Затем смотрят на вторую скобку: квадрат первого выражения, затем произведение, затем квадрат второго. Если помнить эту последовательность, формулу легко восстановить даже без подсказки.

4

Формулы, которые упрощают работу с кубами

Формулы суммы и разности кубов помогают быстро превратить выражение в произведение, а затем упрощать его, сокращать дроби и проверять вычисления. Для 7 класса это важный и полезный шаблон.

THE PLAN