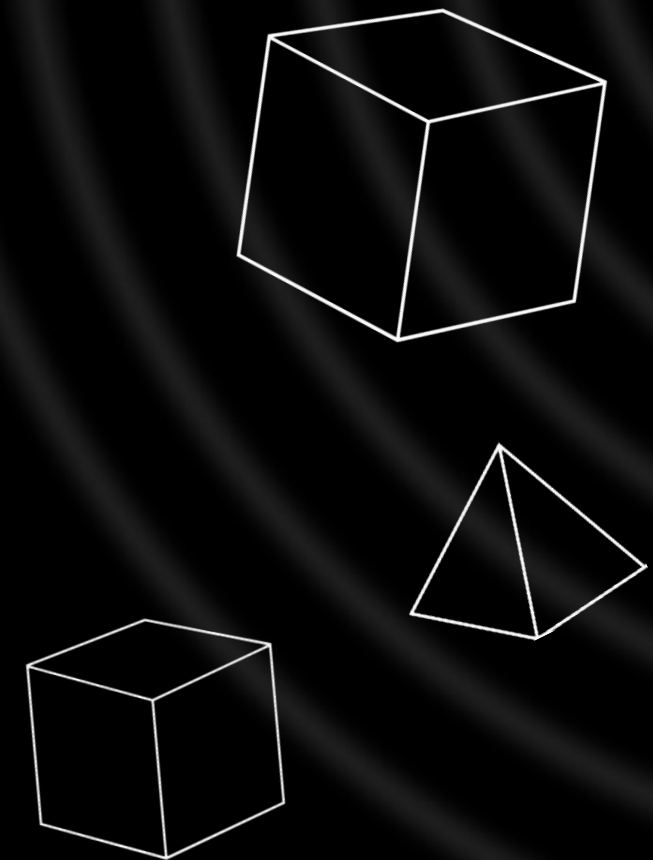


Объём шара и его частей

Разберём шар, его элементы и формулы объёмов: от радиуса до сегмента.

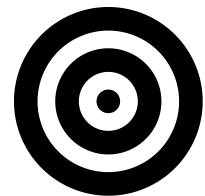


Геометрия, которая считает объёмы

Шар — не просто круг в пространстве: он задаётся радиусом и порождает круговые сечения. По высоте, радиусу основания и взаимному положению плоскостей мы находим объёмы частей шара в стандартных школьных задачах.

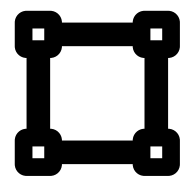


Точные определения — основа решения



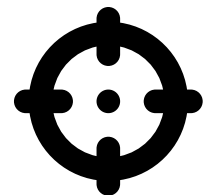
Центр шара

Центр — точка, равноудалённая от всех точек поверхности шара. Именно от неё отсчитывают радиус, и именно она определяет симметрию всех сечений и частей.



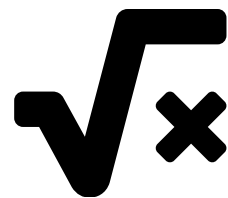
Радиус и диаметр

Радиус R соединяет центр с точкой сферы. Диаметр d равен $2R$. Эти величины связывают расстояния в пространстве и сразу входят в формулы объёмов.



Хорда и наибольшая хорда

Хорда — отрезок, соединяющий две точки пересечения прямой с шаром. Она может быть меньше диаметра; максимальная хорда совпадает с диаметром.



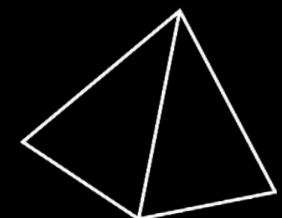
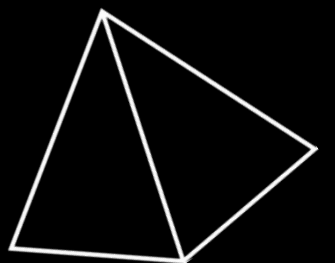
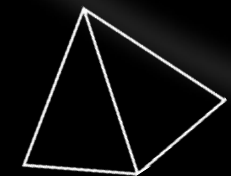
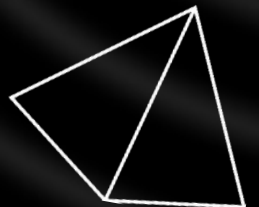
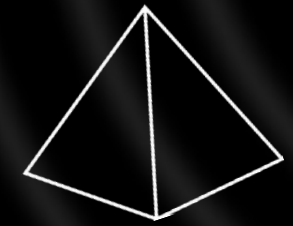
Сечение плоскостью

Любое плоское сечение шара даёт круг. Радиус этого круга определяется расстоянием от центра до плоскости сечения: чем дальше плоскость, тем меньше круг.

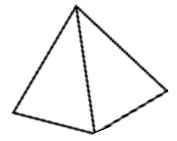


Готовность к частям шара

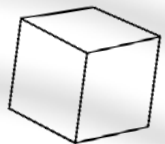
Части шара удобно описывать параметрами: высотой h , радиусом основания r и положением секущих плоскостей. Тогда объём выражается формулами через геометрические связи этих параметров.



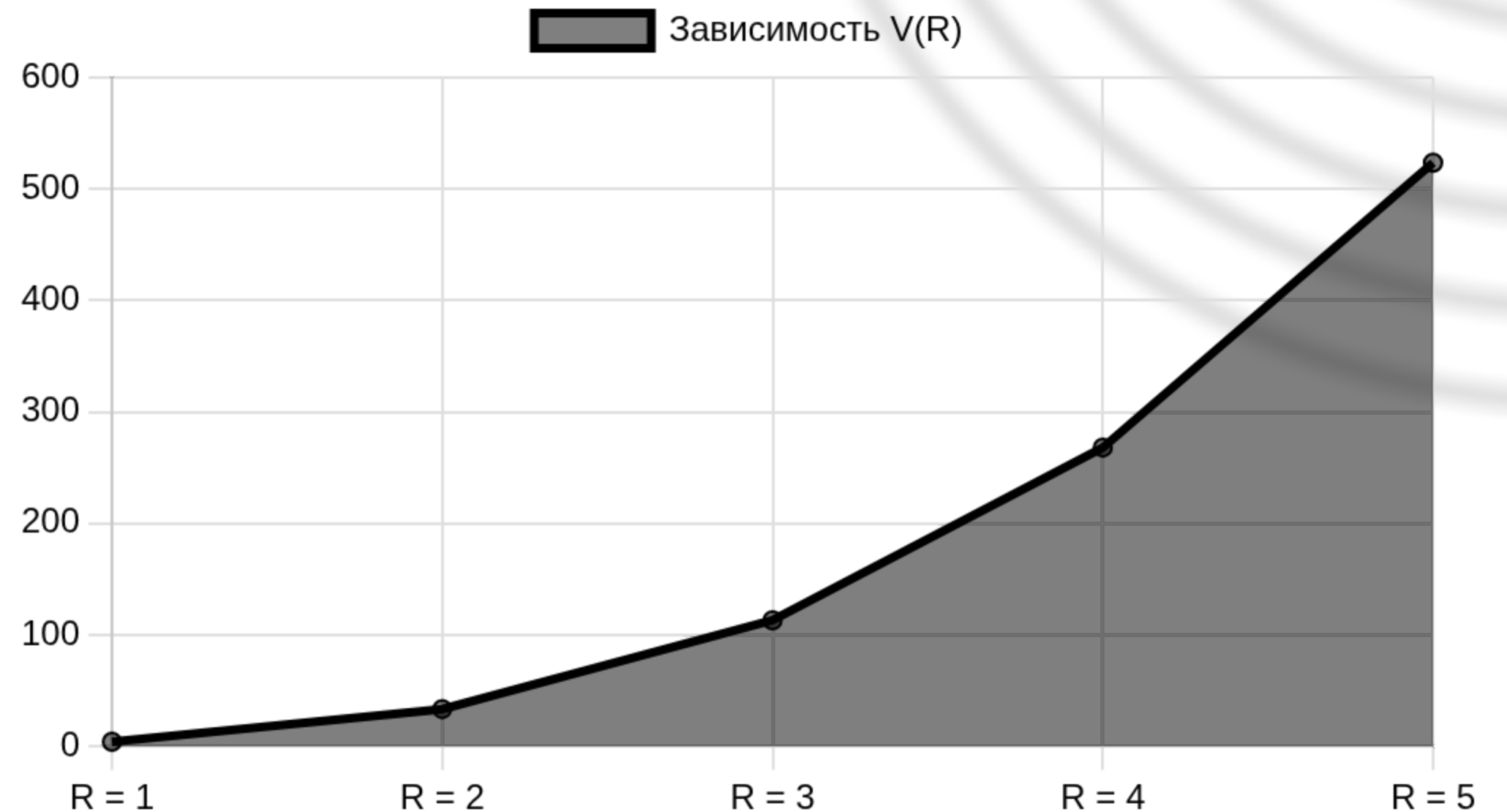
Как растёт объём при увеличении радиуса



По значениям видно: при переходе от R к $R+1$ прирост ускоряется, что характерно именно для кубической зависимости V от R .



Данные показывают строгую масштабную закономерность: рост радиуса умножает объём как R^3 . Это помогает быстро проверять ответы в задачах.



Точки рассчитаны по формуле $V = 4/3\pi R^3$ ($R = 1...5$); округление до сотых.


$$\frac{4}{3}\pi R^3$$

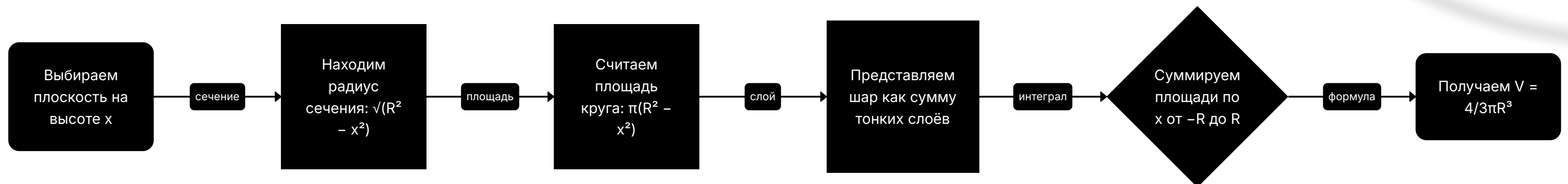
Объём шара целиком определяется его радиусом.

Зная только R , можно находить объём любых сферических тел и частей, подставляя радиус в универсальную формулу.

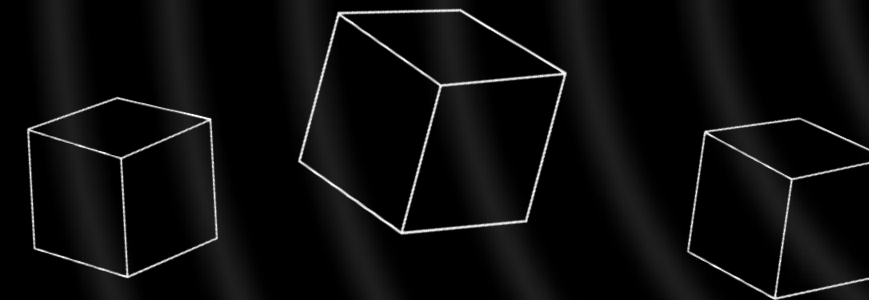
Школьный курс стереометрии: формула объёма шара.

Вывод формулы через суммирование круговых слоёв

Ключевая геометрическая идея: сечения плоскостями дают круги

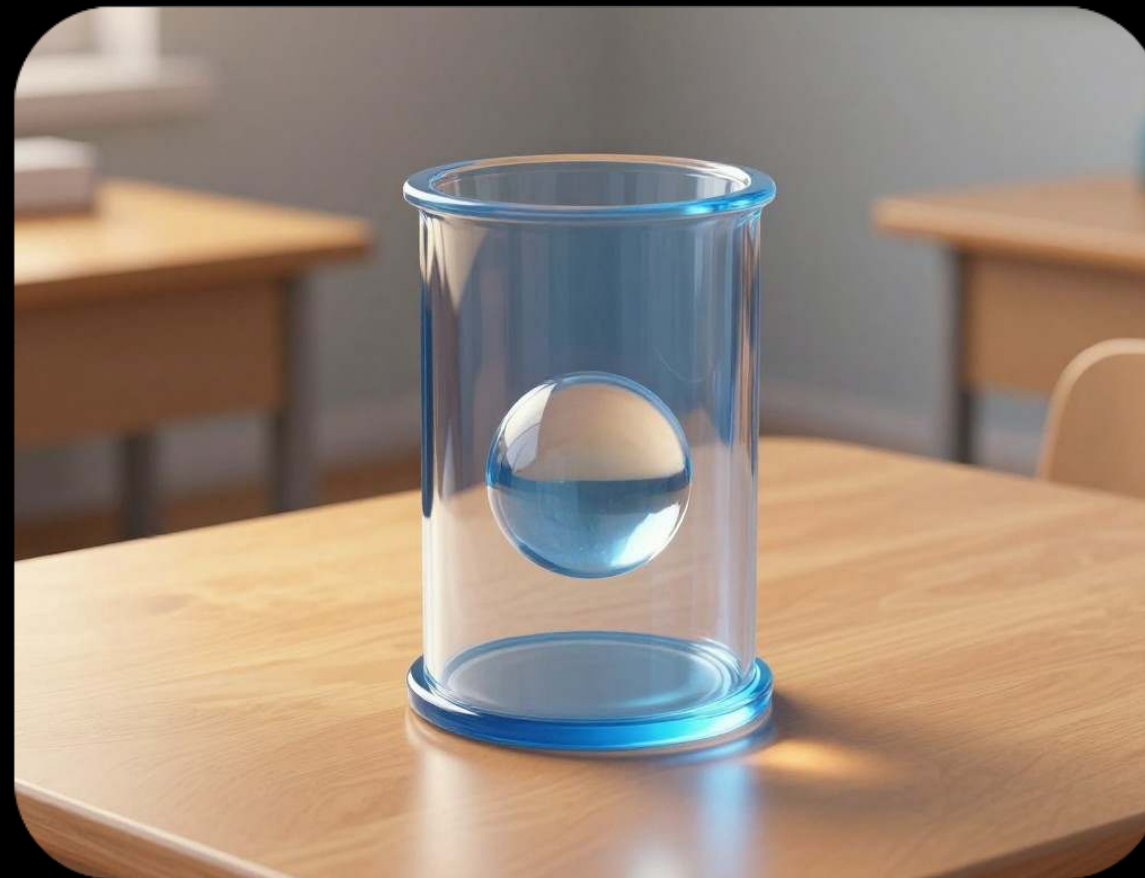
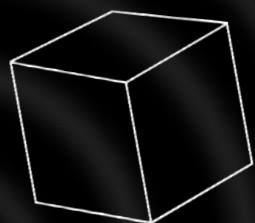


Архимед и «измерение» шара



Как античная геометрия сравнила объёмы

Архимед показал: объём шара равен $\frac{2}{3}$ объёма описанного цилиндра с теми же радиусом и высотой. Это удивительно точное сопоставление сложного тела со знакомой фигурой. Результат наглядно объясняет, почему шар занимает «меньше», чем цилиндр, но существенно больше, чем полусфера.



Цилиндр как удобная оболочка

Если вписать шар внутрь цилиндра так, чтобы они имели одинаковый радиус и высоту, появляется сильная связка параметров. Затем конусная и цилиндрическая части позволяют выстроить рассуждение шаг за шагом. Такая схема хорошо подходит для рисунков: шар внутри цилиндра, а сверху — «геометрические границы» будущего доказательства.



Конус помогает понять «срезы»

В иллюстрациях к результату часто добавляют конус с вершиной на оси. Он помогает разложить формы на сопоставимые куски и увидеть пропорции объёмов. Даже без современной записи пределов рассуждение остаётся логически прозрачным: разные тела дают один и тот же масштаб по высоте.



452,4

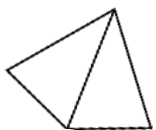
**Это ровно половина объёма шара
заданного радиуса.**

Для $R = 6$ см объём полушария составляет примерно $452,4 \text{ см}^3$ —
удобный ориентир для проверок в задачах на «половины» сфер.

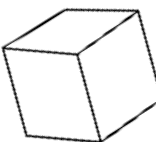
Расчёт: $V = \frac{2}{3}\pi R^3$ при $R = 6$ см; округление до десятых.

Основные части шара и их объёмы

Часть	Формула объёма (параметры)
Шар	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ (R)
Полушарие	$V = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ (R)
Сферический сегмент	$V = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3}$ (h, R)
Сферический слой	$V = \frac{\pi h (3a^2 + h^2)}{6}$ или разность сегментов (h, a)
Сферический сектор	зависит от R и h (параметры части)



Сопоставьте тип части, формулу и минимальный набор параметров, через который решаются задачи.



Во всех выражениях ключевую роль играют радиус шара и высота (или эквивалентные параметры). Поэтому сначала распознают часть, затем аккуратно подбирают параметры для подстановки.

Сферический сегмент

1

Сферический сегмент появляется, когда шар отсечён одной плоскостью. В условии обычно задана высота h от плоскости до поверхности по «вертикали» сегмента, а радиус шара — R .

2

Его объём вычисляют по формуле $V = \pi h^2(3R - h)/3$. Она одновременно учитывает толщину «шапочки» и то, что круг основания сечения зависит от положения плоскости.

3

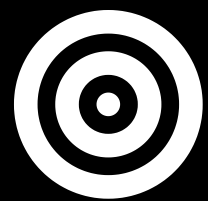
Если h невелика, сегмент превращается в тонкий купол, и объём резко уменьшается. Поэтому в задачах важно различать малый и большой сегмент и внимательно читать, какая именно высота дана.

Сферический слой



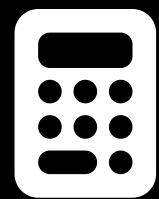
Что называют слоем

Сферический слой лежит между двумя параллельными плоскостями. Его задают высотой h и положением сечений: это «прослойка» шара, ограниченная двумя кругами на разных уровнях.



Как получить объём через сегменты

Практичный подход: рассматривать слой как разность двух сферических сегментов. Тогда берут формулы для сегментов с разными высотами и вычитают объёмы, получая объём именно между плоскостями.



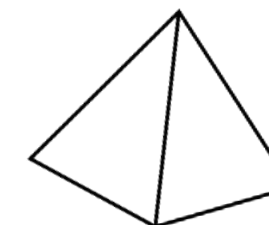
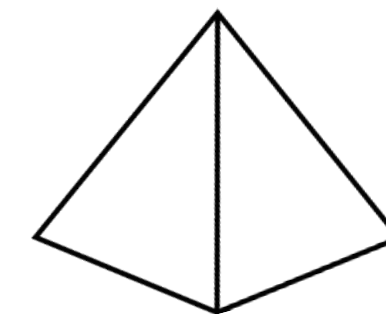
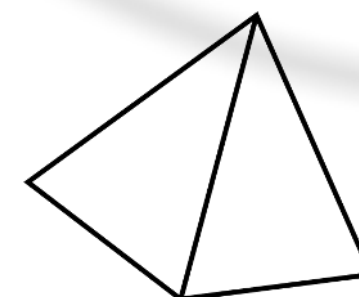
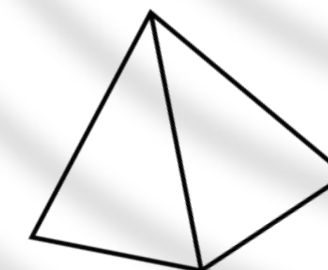
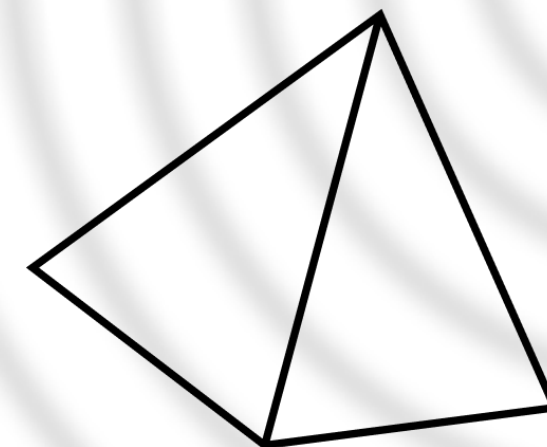
Формула через параметры

В вычислениях слой удобно выражать через высоту h и радиусы/параметры основания. Такой путь снижает риск ошибок при переходе от геометрического рисунка к алгебраической записи.

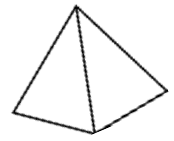


Зачем это в задачах

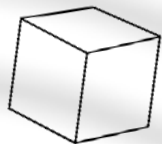
Слои встречаются в сюжетах про оболочки, зоны и прослойки. Даже при сравнительно небольшой толщине h слой может дать заметный вклад в общий объём, поэтому важно корректно различать его отрезание.



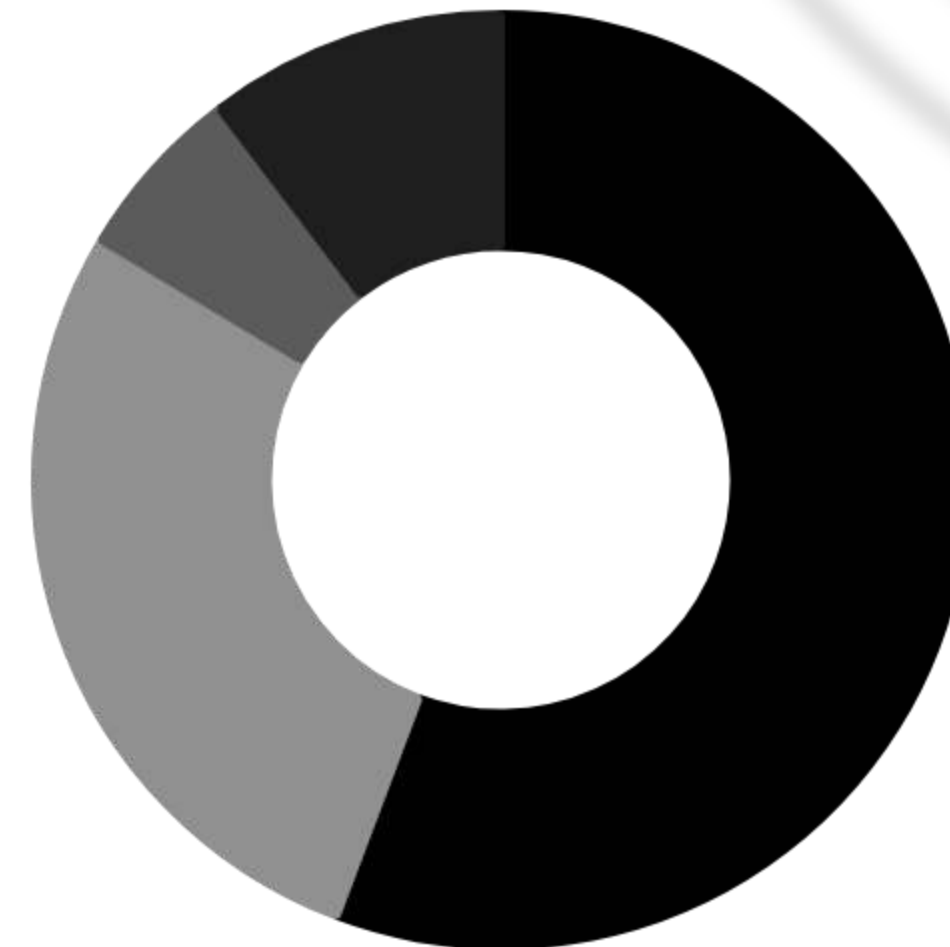
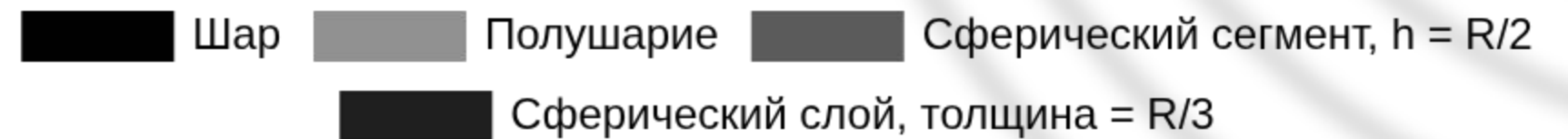
Сравнение долей объёма различных частей шара



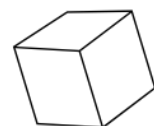
Диапазон значений показывает, что геометрическая «малость» по высоте не означает малую долю объёма: объём растёт нелинейно по мере приближения к середине шара.



Критерий выбора формулы важнее «прикидки»: даже сегмент при $h = R/2$ даёт около 11% от объёма шара, а слой при толщине $R/3$ — почти 19%.



Сферический сектор



Сферический сектор — часть сферы, ограниченная конической поверхностью с вершиной в центре шара. Обычно его рассматривают вместе с центральным углом, задающим «развёртку» сектора на сфере.

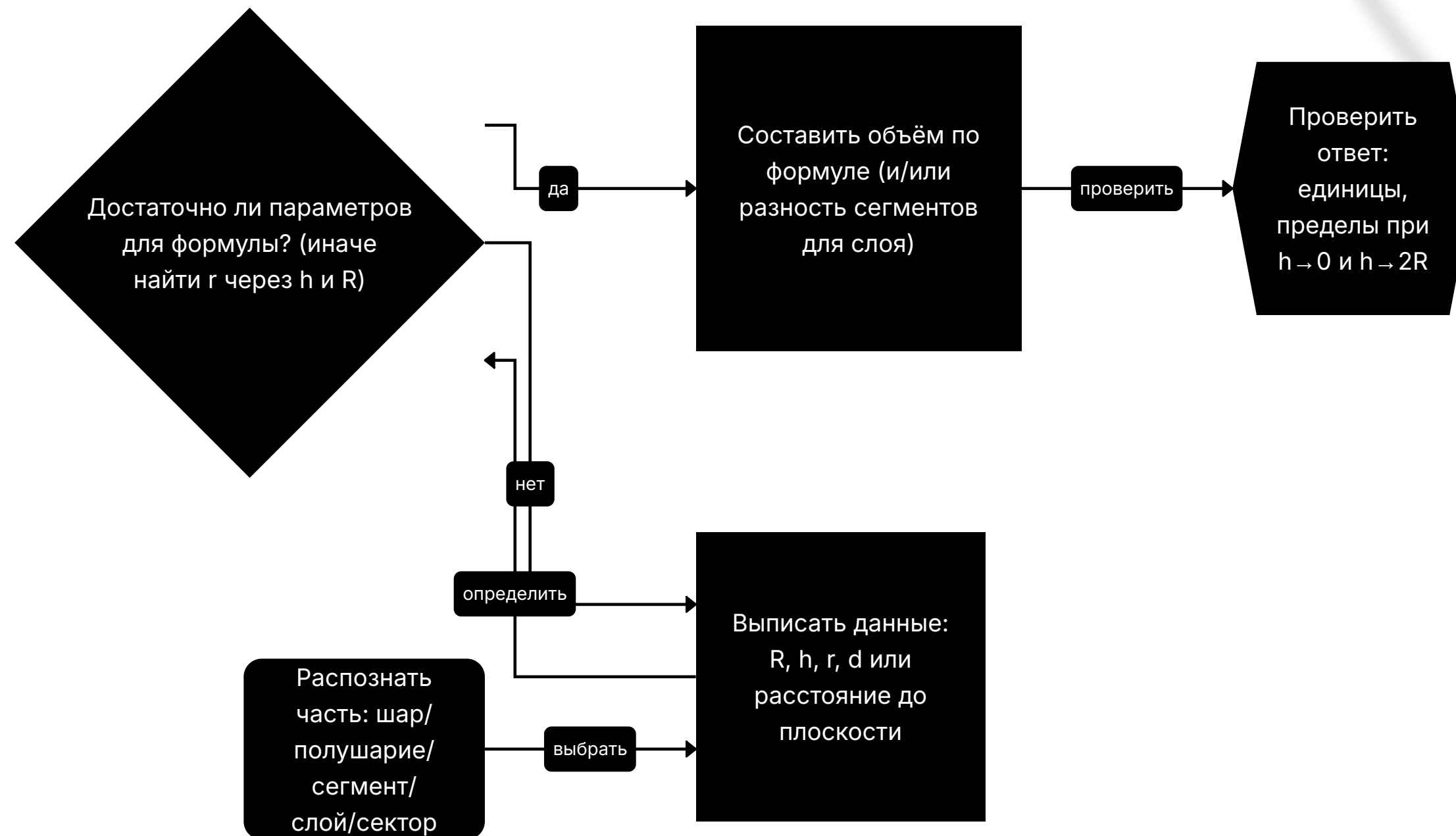


Для расчёта объёма используют связь параметров: радиус сферы R и высоту выделенной части (или эквивалентные величины, задающие положение секущей плоскости). В задачах часто нужны также площадь основания и углы.

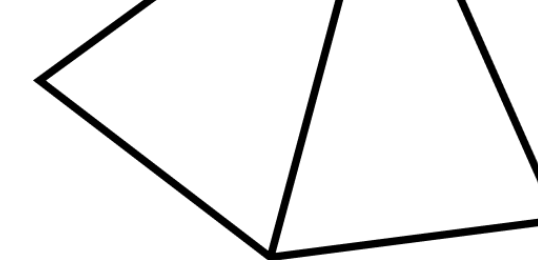


Алгоритм нахождения объёма части шара в задаче

Схема для выбора типа фигуры, извлечения параметров и получения объёма по подходящей формуле



Связь высоты, радиуса основания и радиуса шара

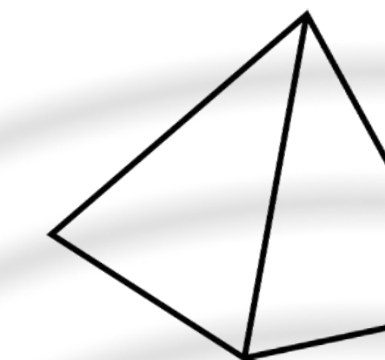


1

Для сферического сегмента выполняется соотношение $r^2 = 2Rh - h^2$, где R — радиус шара, h — высота сегмента, r — радиус круга основания. Оно связывает «уровень» сечения и масштаб окружности на сечении.

2

Когда в условии известны R и h , формула позволяет найти r без дополнительных построений. Важно сразу следить за тем, что h — именно высота сегмента от плоскости отсечения до ближайшей к ней точки сферы.

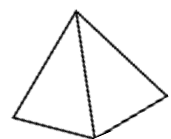


3

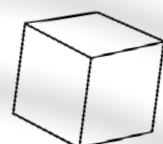
При малых h можно делать быструю оценку: $r \approx \sqrt{2Rh}$. Такое приближение помогает оценить правдоподобность ответа и уменьшает ошибки на этапе подстановки, особенно если число получается «слишком маленьким» или «слишком большим».



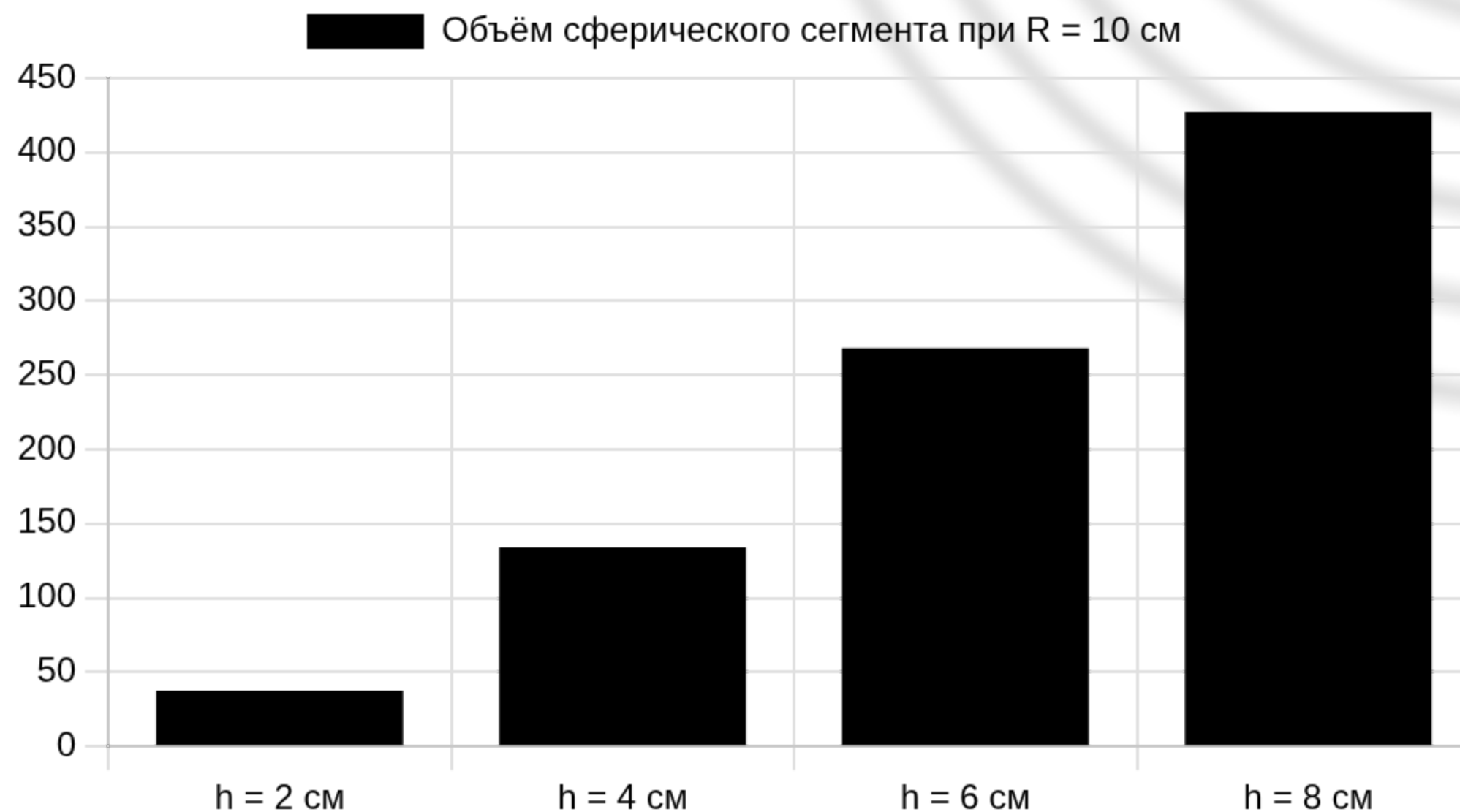
Как растёт объём сферического сегмента при увеличении высоты



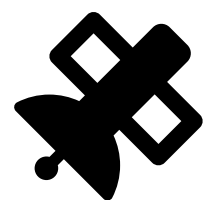
Начиная с небольших h , объём растёт заметно быстрее линейной зависимости: при увеличении высоты сегмента прирост становится всё более выраженным.



По данным видно, что изменение h даёт нелинейный эффект: переход от 2 к 4 см увеличивает объём сильнее, чем от 4 к 6 см в абсолютных величинах, и это характерно для сферических тел.

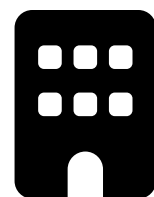


Практические применения формул объёма шара



Астрономия и модели орбит

В астрономии объёмы сферических тел и их частей используют при оценке размеров планет и моделей небесных объектов. Формулы позволяют быстро связать радиус с объёмом и масштабом массы в задачах физики.



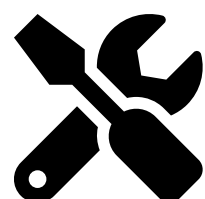
Архитектура и купола

В архитектуре купола, элементы оболочек и сферические крыши часто моделируют как шаровые сегменты или слои. Расчёт объёма нужен, чтобы оценивать расход материалов и вместимость внутренних пространств.



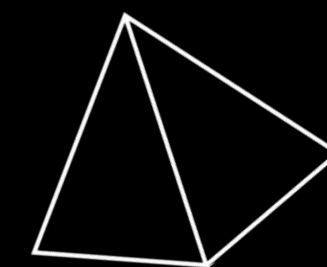
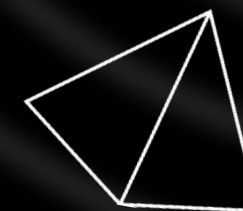
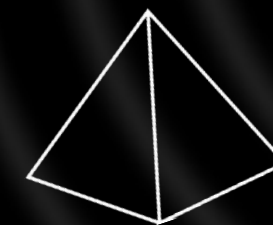
Инженерия и резервуары

В инженерии сферические резервуары и корпусные элементы рассчитывают через объём шара и его «неполные» части. Это помогает планировать количество вещества, теплоёмкость и параметры конструкций.



Техника, детали и линзы

Сферические формы встречаются в подшипниках, декоративных деталях и оптических элементах. Зная объём или долю части, можно оценивать массу, заполнение и требования к материалу при проектировании.

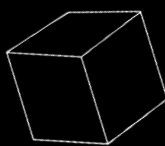


Типовые данные в задачах на шар и его части

Дано	Что найти	Основная формула
R (радиус)	V шара	$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$
R и h сегмента	V сегмента	$V = \pi \cdot h^2 \cdot (3R - h) / 3$
d (диаметр) или R	нужный радиус	$R = d/2$; при сегменте: $r^2 = 2Rh - h^2$



Ключевое — уметь сопоставить данную величину со «своей» формулой: шар — через R, сегмент — через R и h, сечения — через связь $r^2 = 2Rh - h^2$.



По структуре заданий видно: чаще всего требуется переводить между радиусами и высотой. Если распознавание параметров выполнено верно, подстановка становится технической задачей.

Типичные ошибки и проверка ответа

1

Самая частая ошибка — подставить диаметр вместо радиуса: в формулах объёма степень по R равна трём, поэтому итог меняется в 8 раз. Перед вычислениями перепроверьте, что используете именно R , а не d .

2

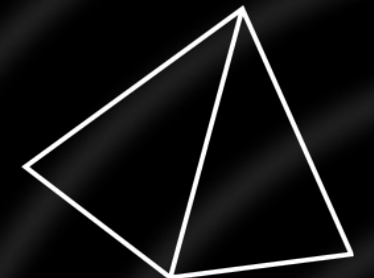
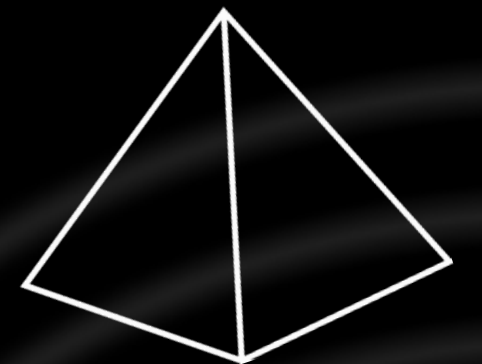
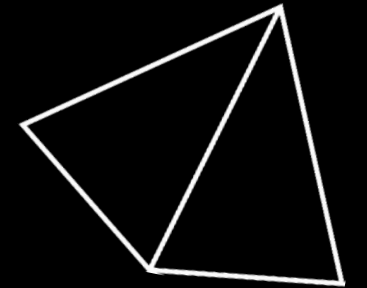
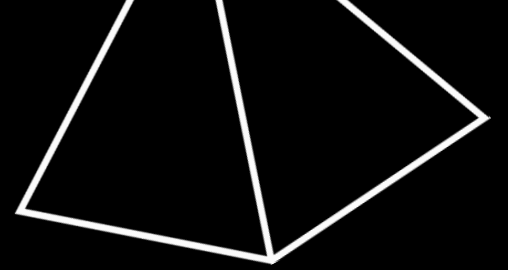
Нередко путают высоту сегмента: h — это расстояние от плоскости сечения до «края» сегмента на сфере. Если на рисунке отсечение выполнено иначе, формула применится к другой части и ответ окажется несоответствующим масштабу.

3

Путают сферический слой и сферический сегмент. Слой — это область между двумя плоскостями, его объём нужно искать как разность двух сегментов либо по формуле слоя. Сегмент — результат одного отсечения шара плоскостью.

4

Проверяйте результат по здравому смыслу: объём части шара не может превышать объём самого шара. Убедитесь, что при $h \rightarrow 0$ объём стремится к нулю, а при $h \rightarrow 2R$ — к объёму соответствующей полной сферы или её половины.



Геометрия, которая измеряет реальный «объём»

Объём шара задаётся формулой $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, а объёмы его частей находят через высоту, радиусы и положение секущих плоскостей. Тема учит уверенно различать шар, сферу, полушарие, сегмент, слой и сектор и выбирать верную формулу под условие.

