

Элементы комбинаторики и теории вероятностей



Считаем варианты и оцениваем шансы случайных событий

Почему эти темы важны в 9 классе



Комбинаторика учит выбирать и упорядочивать объекты, а вероятность — оценивать шансы. Эти навыки помогают решать задачи с формулами, дробями и реальными школьными ситуациями: от расписания до игр с кубиком.



Основные понятия: испытание, исход, событие



Случайное испытание

Это действие, результат которого заранее неизвестен, но все возможные варианты можно перечислить. Примеры: бросок монеты, выбор карточки, вытягивание жребия или бросок игрального кубика.

Пространство исходов

Так называют полный набор всех возможных результатов испытания. Если бросить кубик, пространство исходов включает числа от 1 до 6; важно, что каждый исход учитывается один раз.

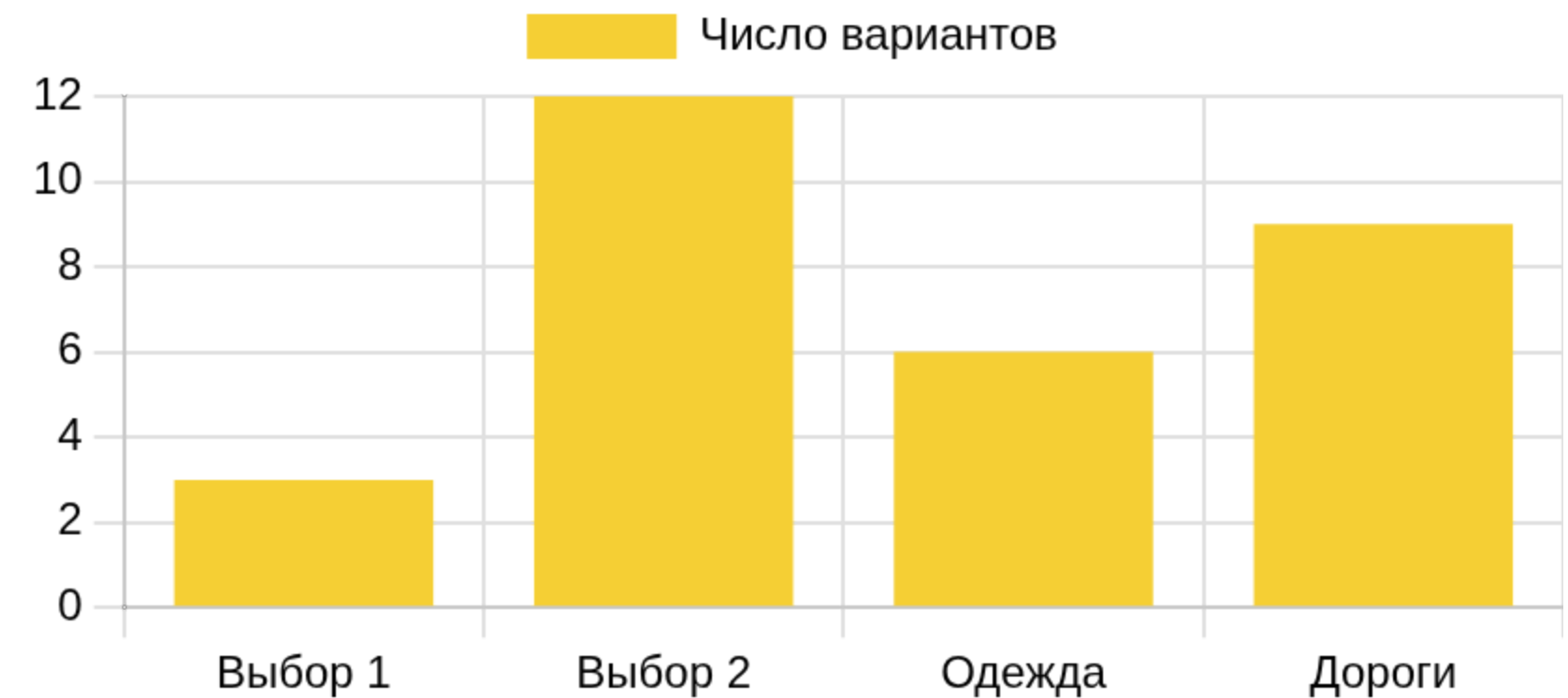
Событие

Событие может состоять из одного исхода или сразу из нескольких, объединённых общим признаком. Например, выпадение чётного числа на кубике — это событие, включающее 2, 4 и 6.

Правило произведения на простых примерах

При каждом новом выборе число вариантов умножается, поэтому итог быстро растёт даже при небольших исходных данных.

Если выборы независимы по шагам, общее число комбинаций находят умножением количества вариантов на каждом шаге.



Учебный пример по правилу произведения, 9 класс

24

**способа упорядочить
четыре разные книги
на полке**

Когда все объекты различны и нужно расположить их по порядку, число вариантов быстро увеличивается. Для четырёх книг уже получается 24 размещения.

Перестановки, размещения и сочетания

Таблица показывает, чем отличаются три вида подсчёта: что считается, важен ли порядок и какая формула подходит.

Главное различие — в роли порядка: если он важен, используют перестановки или размещения; если нет, подходят сочетания.

Вид	Порядок	Формула
Перестановки	важен	$n!$
Размещения	важен	A_n^k
Сочетания	не важен	C_n^k

Школьные формулы комбинаторики, 9 класс

Сочетания: выбор без учёта порядка

Смысл сочетаний

Сочетания считают число способов выбрать несколько объектов, если порядок не имеет значения. Поэтому наборы, записанные по-разному, но состоящие из тех же элементов, считаются одним вариантом.

Простой пример

Если нужно выбрать двух учеников из пяти, порядок не важен, и число вариантов равно 10. Такие задачи часто встречаются при формировании команды или группы для задания.

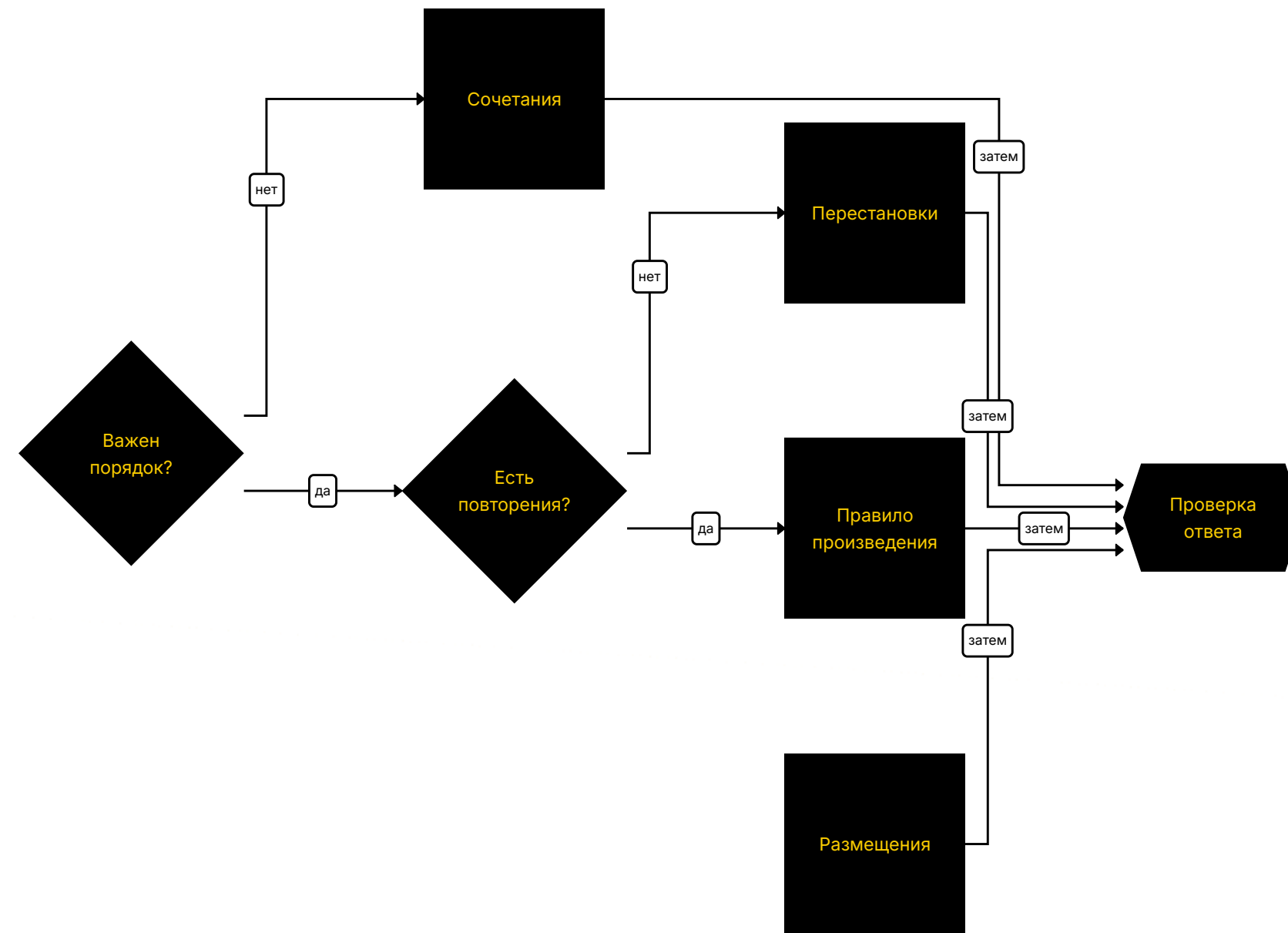
Где применяется

Сочетания полезны при выборе ингредиентов, составлении списка чтения, подборе набора карточек или вариантов ответа. Во всех этих случаях важен сам набор, а не порядок перечисления.



Как решать задачи на подсчёт вариантов

Последовательность шагов помогает выбрать нужную формулу и не потерять важные условия задачи.



Классическая вероятность и её формула

1

Как находят вероятность

Классическая вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех равновозможных исходов. Эту идею записывают формулой $P(A)=m/n$ и применяют в простых задачах.

2

Границы значения

Вероятность всегда лежит от 0 до 1. Ноль означает невозможное событие, а единица — достоверное. Между ними находятся все случайные события, которые могут произойти, а могут и не произойти.

3

Первые примеры

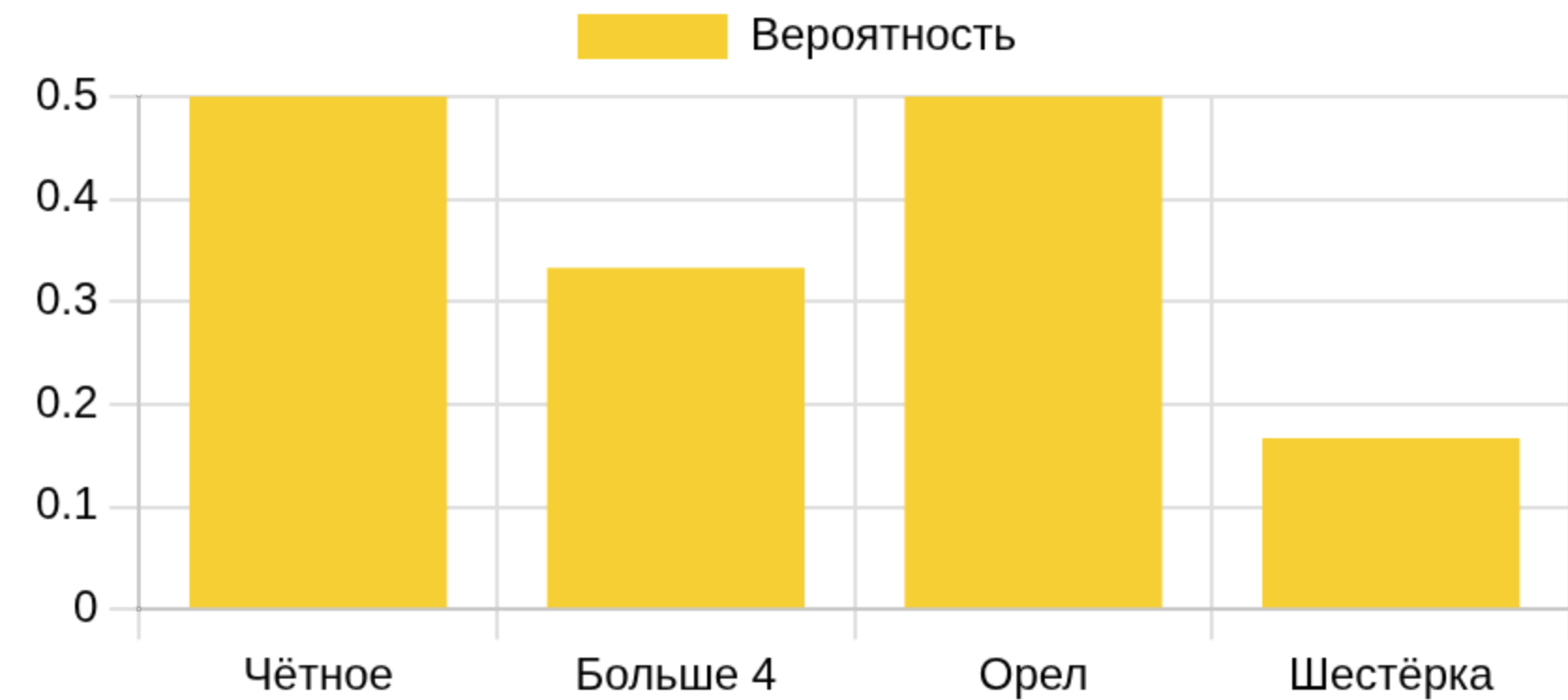
Для честной монеты вероятность орла равна $\frac{1}{2}$, потому что исходов два и они равновозможны. Для кубика вероятность выпадения шестёрки равна $\frac{1}{6}$.



Вероятности на игральном кубике

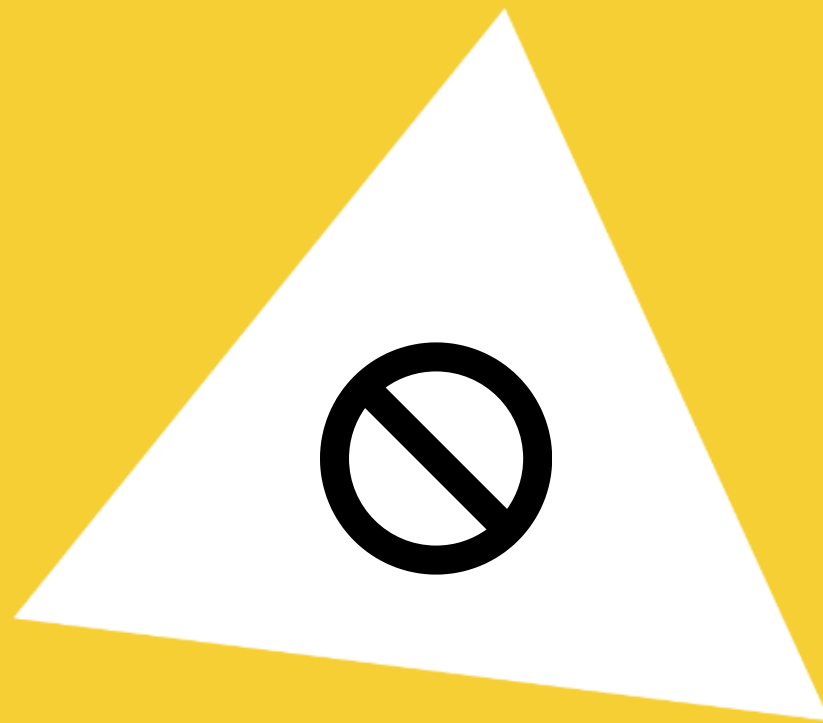
Одно и то же испытание может давать разные шансы для разных событий. Это видно по сравнению простых случаев на кубике.

Самые вероятные события в примере — те, у которых больше благоприятных исходов. Сравнение помогает быстро увидеть, что шансы не равны.



Учебный пример по вероятности для игрального кубика, 9 класс

Ключевые виды событий



Невозможное событие

Такое событие не может произойти в данном опыте. Его вероятность равна 0. Например, на обычном шестигранном кубике невозможно получить число 7, потому что среди граней его нет.



Достоверное событие

Это событие обязательно происходит при каждом выполнении опыта. Его вероятность равна 1. При броске обычного кубика всегда выпадет одно из чисел от 1 до 6.



Случайное событие

Случайное событие может произойти, а может и не произойти. Его вероятность находится между 0 и 1. Например, выпадение чётного числа на кубике нельзя предсказать заранее.

Независимые события и дерево исходов



Что значит независимость

События называют независимыми, если результат одного опыта не меняет результат другого. Поэтому при двух бросках монеты исход первого броска не влияет на исход второго.

Все варианты без пропусков

Дерево исходов удобно строить, когда нужно перечислить каждую возможную последовательность. Оно помогает увидеть, что при двух бросках монеты возможны ровно четыре исхода: ОО, ОР, РО и РР.

Умножение на каждом шаге

По ветвям дерева легко считать число вариантов и вероятности. Если на каждом шаге есть несколько равновозможных исходов, общее число путей находят умножением, а не сложением.

Вероятности типичных событий

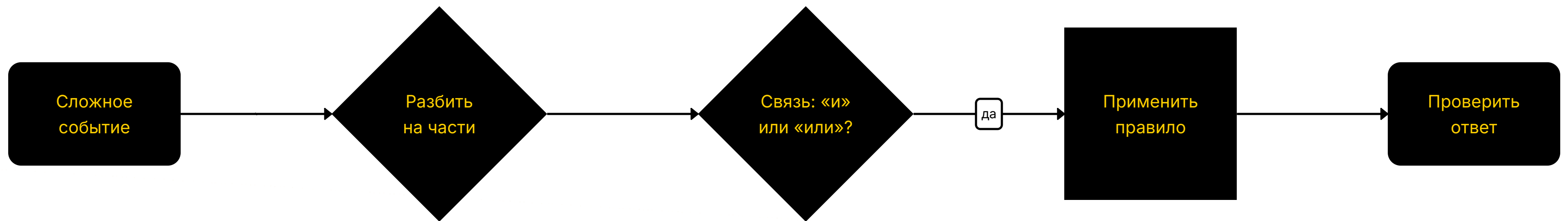
Событие	Благоприятн.	Вероятность
Чётное на кубике	3 из 6	$\frac{1}{2}$
Больше 4 на кубике	2 из 6	$\frac{1}{3}$
Орёл при монете	1 из 2	$\frac{1}{2}$
Два орла подряд	1 из 4	$\frac{1}{4}$

Сравнение показывает, как число благоприятных исходов влияет на вероятность события.

Чем меньше благоприятных исходов при том же числе всех исходов, тем меньше вероятность события.

План решения задач на вероятность

Схема показывает, как переходить от условия задачи к ответу.



Как использовать противоположное событие

1

Найти дополнение

Сначала определяют, какое событие является противоположным: это все случаи, в которых нужный результат не произошёл. Такой подход особенно полезен, когда считать «неудачные» варианты проще, чем нужные.

2

Сложить до единицы

Вероятности противоположных событий всегда дают сумму 1. Если известно значение одной вероятности, вторую находят вычитанием из единицы:
 $P(\text{не } A) = 1 - P(A)$.

3

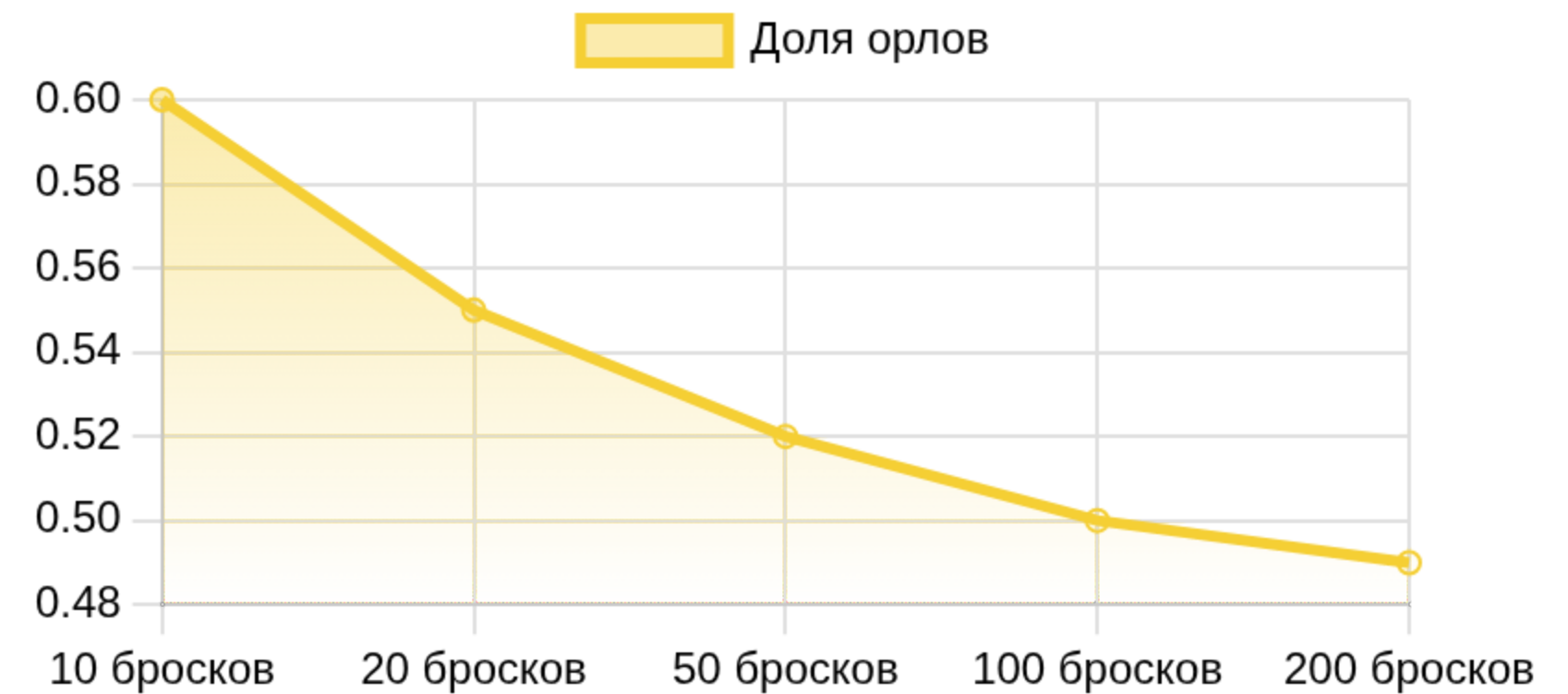
Пример с кубиком

Для выпадения шестёрки вероятность равна $1/6$, значит вероятность не получить шестёрку равна $5/6$. Этот приём быстро решает задачи, где требуется «всё, кроме одного случая».

Как меняются результаты при большом числе испытаний

По мере увеличения числа бросков относительная частота становится устойчивее и меньше отклоняется от $\frac{1}{2}$.

Большая серия опытов делает наблюдаемую частоту ближе к теоретической вероятности, хотя короткие серии могут заметно колебаться.



Иллюстративный пример для демонстрации закона больших чисел.

Типичные ошибки в комбинаторике и вероятности

Путаница с порядком

Иногда порядок считают важным там, где он ничего не меняет. Из-за этого вместо сочетаний ошибочно используют перестановки или размещения и получают завышенный ответ.

Игнорирование повторений

Если одинаковые объекты или одинаковые исходы не учесть, подсчёт становится неверным. Особенно это заметно в задачах на перестановки, когда повторяющиеся варианты не различаются.

Неверный знаменатель

При вычислении вероятности важно делить на общее число всех равновозможных исходов, а не только на удобные или понравившиеся случаи. Иначе ответ теряет смысл.

Проверка условия

Формулу нельзя выбирать автоматически: сначала нужно понять, какие события рассматриваются и как они связаны. Полезно проверить ответ на простом примере и сравнить его с логикой задачи.

Где встречаются эти темы в жизни



Школа и расписание

Комбинаторика помогает распределять дежурства, составлять расписание и подбирать варианты рассадки. Она нужна каждый раз, когда нужно аккуратно посчитать все возможные способы выбора.

Игры и прогнозы

Вероятность используют в играх с кубиком и монетой, а также при оценке случайных событий. Она помогает сравнивать шансы и делать выводы, даже если результат заранее неизвестен.

Пароли и маршруты

Подсчёт вариантов нужен при создании паролей, выборе кода или планировании маршрута. В таких задачах важно учитывать порядок, количество шагов и возможность повторений.

Проверь себя: короткие задачи

Мини-набор заданий помогает быстро повторить формулы и проверить понимание темы.

Все ответы получаются из одних и тех же идей: выбор без порядка, классическая вероятность и подсчёт равновозможных исходов.

Задача	Ответ	Формула
2 из 5	10	C_5^2
Орел у монеты	$\frac{1}{2}$	m/n
3 цифры	720	A_{10}^3
Чётное на кубике	$\frac{1}{2}$	$3/6$

Задания на базовые формулы комбинаторики и классической вероятности.

Что важно запомнить

Комбинаторика учит считать варианты, а теория вероятностей — оценивать шансы. Если правильно определить вид задачи, выбрать нужную формулу и проверить смысл ответа, решение становится ясным и надёжным.