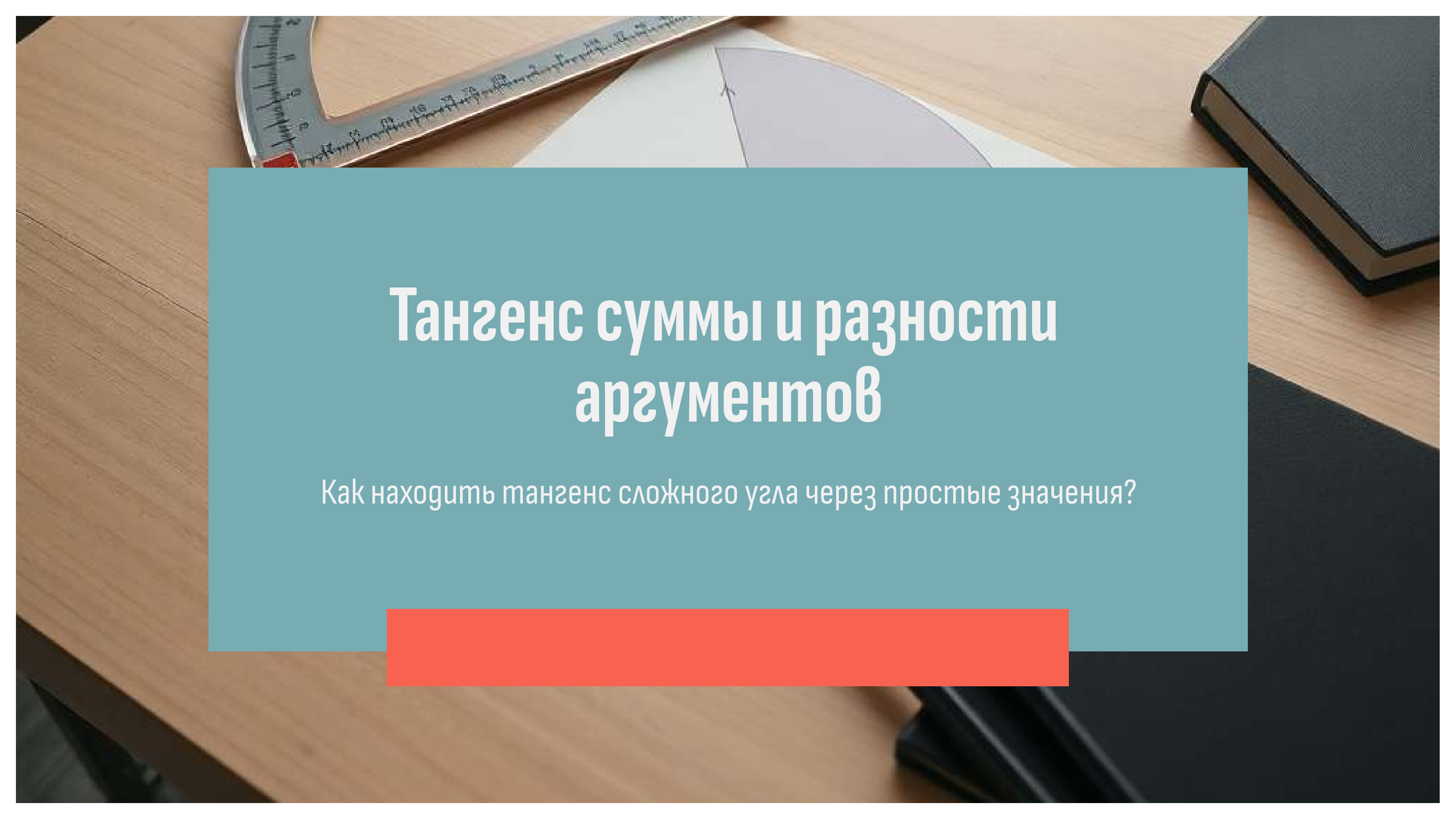




Тангенс суммы и разности аргументов

Как находить тангенс сложного угла через простые значения?

Зачем нужны эти формулы в 10 классе

Формулы тангенса суммы и разности помогают быстро работать с углами, преобразовывать тригонометрические выражения и решать уравнения. Они особенно полезны там, где ответ выражается через табличные значения 30° , 45° и 60° .



Определение тангенса и область его существования

- 1 Через синус и косинус**
Тангенс угла определяют как отношение $\sin x$ к $\cos x$. Поэтому он существует только тогда, когда знаменатель не равен нулю, то есть $\cos x \neq 0$.
- 2 Запрещённые значения**
Тангенс не определён при $x = 90^\circ + 180^\circ k$, где k — целое число. В этих точках косинус обращается в ноль, и дробь теряет смысл.
- 3 Период функции**
Функция $\operatorname{tg} x$ имеет период 180° . Это значит, что её значения повторяются через половину полного оборота, что удобно при вычислениях и сравнении углов.
- 4 Знак в четвертях**
В I и III четвертях тангенс положителен, потому что синус и косинус имеют одинаковый знак. Во II и IV четвертях их знаки различаются, поэтому $\operatorname{tg} x$ отрицателен.

Геометрический смысл тангенса на единичной окружности

— Координаты точки

На единичной окружности точка с углом x имеет координаты $(\cos x, \sin x)$. Поэтому тангенс можно рассматривать как отношение ординаты к абсциссе этой точки.

— Связь с наклоном

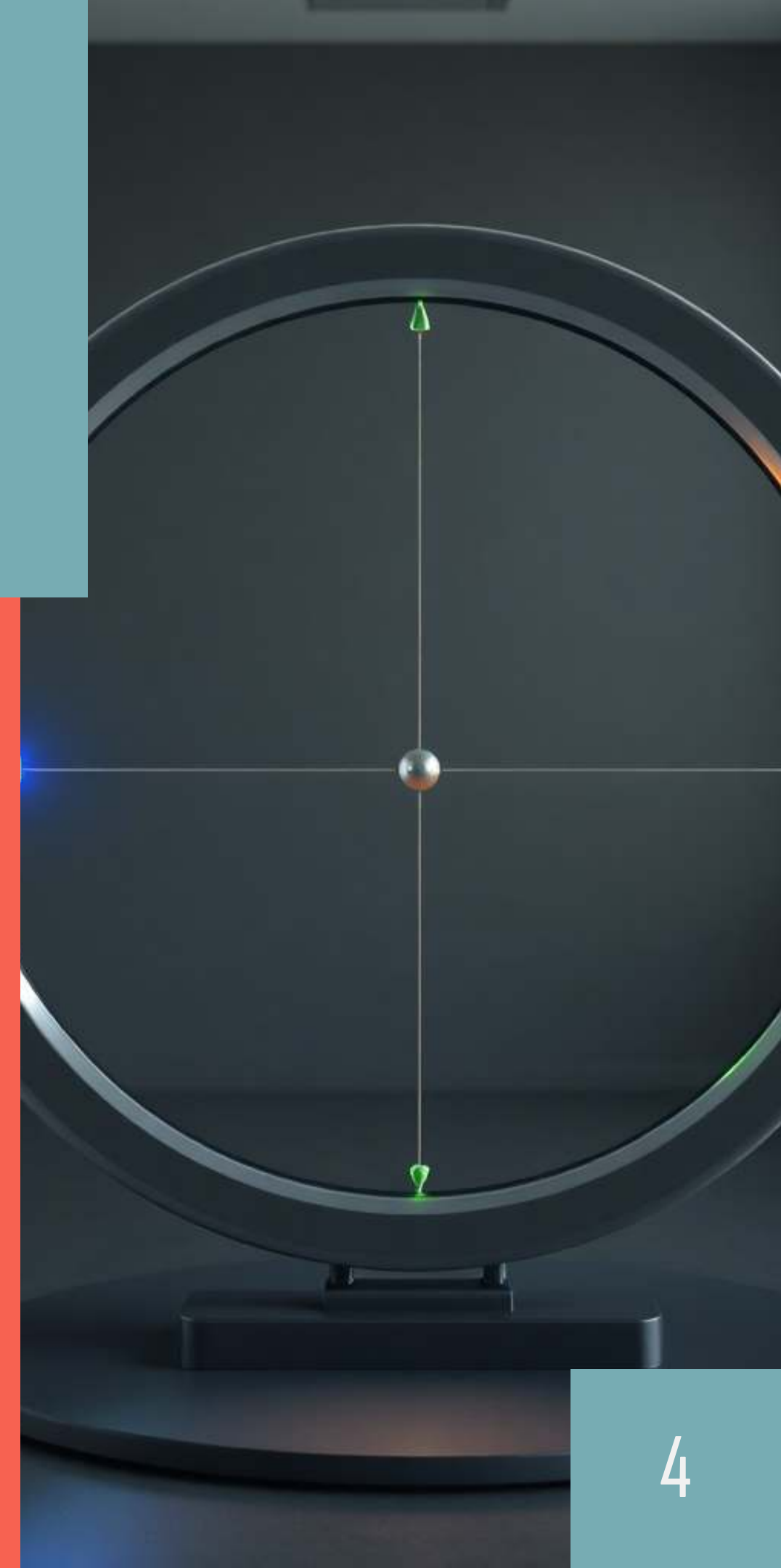
Тангенс показывает, насколько круто направлен радиус, проведённый к точке окружности. Чем больше значение $\operatorname{tg} x$, тем сильнее наклон соответствующего направления.

— Углы α и β

Если на окружности отметить углы α и β , их можно сравнить по положению точек и по значениям тангенсов. Это удобно для понимания формул сложения и вычитания.

— Наглядность суммы

При переходе к углу $\alpha + \beta$ видно, как меняется положение точки на окружности. Такая схема помогает связать алгебраическую формулу с геометрическим образом.



Формулы тангенса суммы и разности

Сравнение двух основных формул показывает их общую структуру и различие в знаках. Это помогает быстрее запоминать выражения и проверять вычисления.

Обе формулы имеют одинаковую основу, но отличаются знаком в знаменателе и знаком между тангенсами в числителе.

Формулы тригонометрии школьного курса алгебры

Случай	Числитель	Знаменатель	Условие
Сумма	$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$	$1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$	Знаменатель $\neq 0$
Разность	$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$	$1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$	Знаменатель $\neq 0$

Вывод формулы тангенса суммы

1

Старт с определения

Начинают с равенства $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta) / \cos(\alpha + \beta)$. Так формула сразу связывается с базовым определением тангенса через синус и косинус.

2

Подстановка формул

Далее подставляют $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$ и $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$. Получается дробь с двумя разложенными выражениями.

3

Деление на произведение

Числитель и знаменатель делят на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$. После этого каждое слагаемое удобно переписывается через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, что упрощает выражение.

4

Итоговый результат

В итоге получают $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) / (1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)$. Минус в знаменателе появляется именно из формулы для косинуса суммы.

Вывод формулы тангенса разности

1

Исходная запись

Для разности используют определение $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \sin(\alpha - \beta) / \cos(\alpha - \beta)$. Это позволяет вывести формулу через уже известные тождества для синуса и косинуса.

2

Формулы разности

Подставляют $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta$ и $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta$. Знаки в них отличаются от случая суммы.

3

Приведение к тангенсам

После деления числителя и знаменателя на $\cos\alpha \cdot \cos\beta$ выражение записывают через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$. Так формула принимает компактный вид и становится удобной для применения.

4

Финальная запись

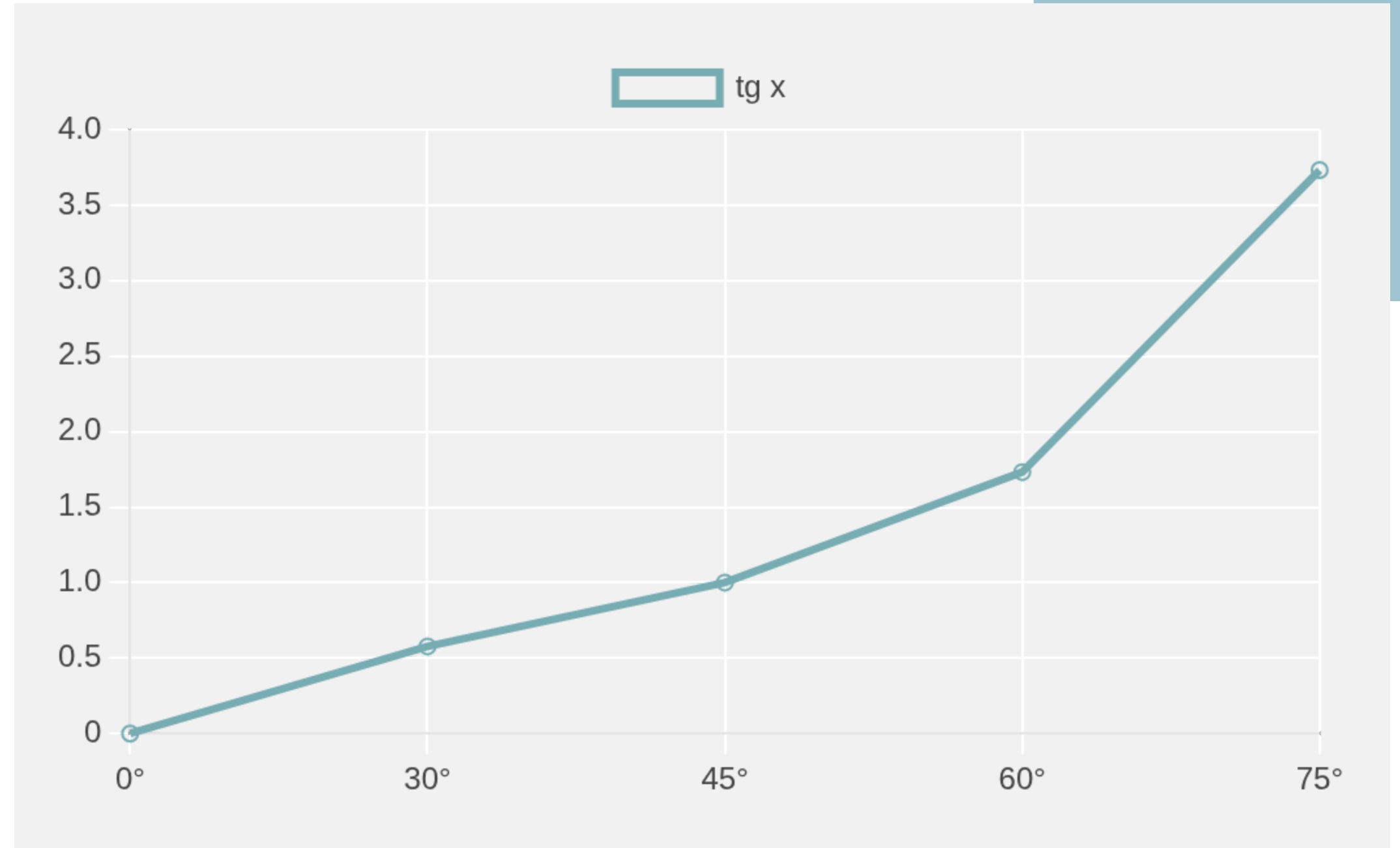
Получают $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) / (1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta)$. Знак плюс в знаменателе возникает из-за плюса в формуле для косинуса разности.

Как ведёт себя тангенс при приближении к 90°

Значения быстро возрастают уже на промежутке от 45° до 75° , поэтому график заметно выгибается вверх.

Рост тангенса нелинеен: чем ближе угол к 90° , тем быстрее увеличивается значение функции и тем заметнее асимптота.

Табличные значения $\operatorname{tg} 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$; школьный курс тригонометрии



Условия применимости и особые случаи

Проверка знаменателя

Формула суммы не работает, если $1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 0$. В этом случае знаменатель обращается в ноль, и вычисление нужно начинать заново.

Формула разности

Для разности опасен случай $1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = 0$. Тогда выражение также не определено, поэтому проверка знаменателя обязательна перед подстановкой чисел.

Граничные углы

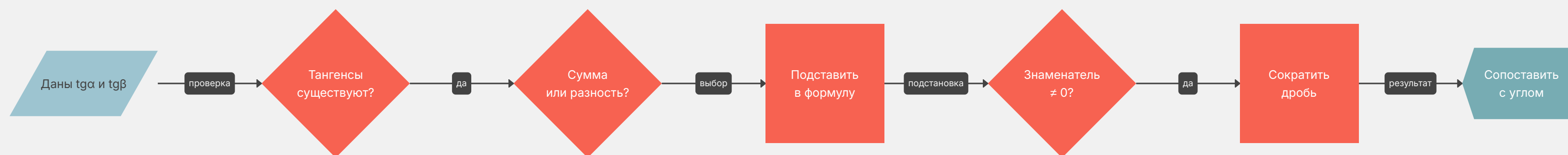
Особую осторожность требуют углы, близкие к 90° и 270° . В этих точках тангенс не существует, и даже небольшая ошибка в записи может исказить результат.

Полная проверка

Нужно смотреть не только на сами значения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, но и на возможность получить нулевой знаменатель. Это важнейший шаг контроля вычислений.

Как вычислять $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$

Алгоритм для школьных задач на формулы суммы и разности



Пример: вычисление $\operatorname{tg} 75^\circ$

- 1 Представим угол как сумму**
Запишем 75° как $45^\circ + 30^\circ$. Так задача сводится к вычислению тангенса суммы двух известных углов, для которых уже есть табличные значения и удобные формулы.
- 2 Подставим табличные значения**
Используем $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ и $\operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3}$. После подстановки в формулу получаем дробь, которую можно привести к более простому виду без приближений.
- 3 Получим точный результат**
После преобразований выходит $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$. Это показывает, что даже для «нетабличного» угла значение можно выразить точно через известные числа и формулы тригонометрии.



$$2 - \sqrt{3}$$

— точное значение тангенса угла 15° , получаемое по формуле разности.

Этот результат удобно использовать как проверку симметрии между $\operatorname{tg} 75^\circ$ и $\operatorname{tg} 15^\circ$: оба значения выводятся из одних и тех же табличных углов 45° и 30° .

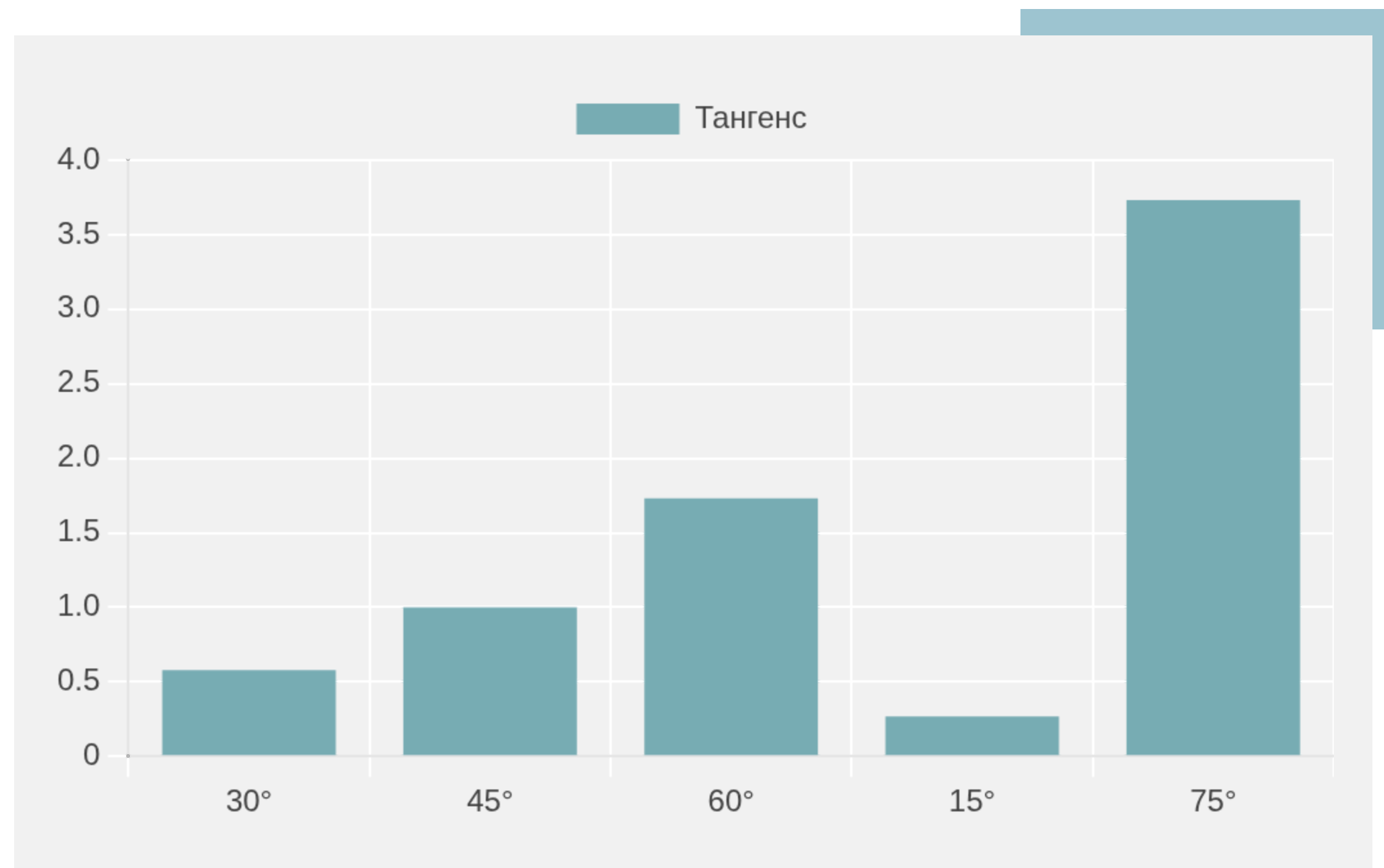
Школьные формулы тригонометрии:
 $\operatorname{tg}(45^\circ - 30^\circ)$, табличные значения $\operatorname{tg} 45^\circ$
и $\operatorname{tg} 30^\circ$

Табличные значения тангенса для проверки вычислений

Здесь показаны точные значения, которые часто служат контрольными ответами в задачах на формулы суммы и разности.

Тангенс быстро растёт с увеличением угла, а пары 15° и 75° удобно использовать для взаимной проверки вычислений.

Табличные значения тригонометрических функций школьного курса алгебры и начала анализа



Типичные ошибки при применении формул

1

Путают знаки

У суммы в знаменателе стоит $1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$, а у разности — $1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$. Ошибка в знаке сразу приводит к неверному результату, даже если остальные вычисления выполнены правильно.

2

Не проверяют область определения

Перед подстановкой нужно убедиться, что $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ существуют. Если один из углов даёт косинус, равный нулю, формулу применять нельзя, потому что выражение теряет СМЫСЛ.

3

Пропускают нулевой знаменатель

Даже при существующих тангенсах знаменатель может обратиться в ноль. В таком случае дробь не определена, и ответ по формуле получить невозможно без дополнительного анализа.

4

Смешивают единицы измерения

Ещё одна распространённая ошибка — записать один угол в градусах, а другой в радианах. В одной формуле обе величины должны быть заданы в одинаковой системе измерения.

Сравнение формул суммы и разности

Сопоставление помогает быстро запомнить структуру формул и не перепутать знаки при вычислениях.

Структура одинакова, но знак в числителе и знаменателе меняется по-разному; именно это чаще всего определяет правильность ответа.

Формулы $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ из школьного курса тригонометрии

Элемент	Сумма	Разность
Числитель	$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$	$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$
Знаменатель	$1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$	$1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$
Условие	tg существуют	tg существуют
Риск ошибки	Минус внизу	Плюс внизу

Использование формул в уравнениях и преобразованиях

1

Упрощение выражений

Формулы $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta)$ позволяют заменить громоздкие выражения с «неудобными» углами на более простые дроби. Это особенно полезно, когда прямого табличного значения нет, а вычисление нужно выполнить точно.

2

Решение уравнений

В тригонометрических уравнениях такие формулы помогают свести сложный угол к сумме или разности стандартных значений. Тогда уравнение становится короче и легче для анализа.

3

Доказательство тождеств

При преобразовании тождеств формулы суммы и разности часто используются как промежуточный шаг. Они позволяют раскрыть выражение, сократить дроби и увидеть скрытую симметрию.

4

Переход к табличным углам

Если выражение содержит 15° , 75° , 105° или 165° , формулы помогают связать его с углами 30° и 45° . В результате задача опирается на известные значения из таблицы.

Где применяются формулы тангенса суммы и разности

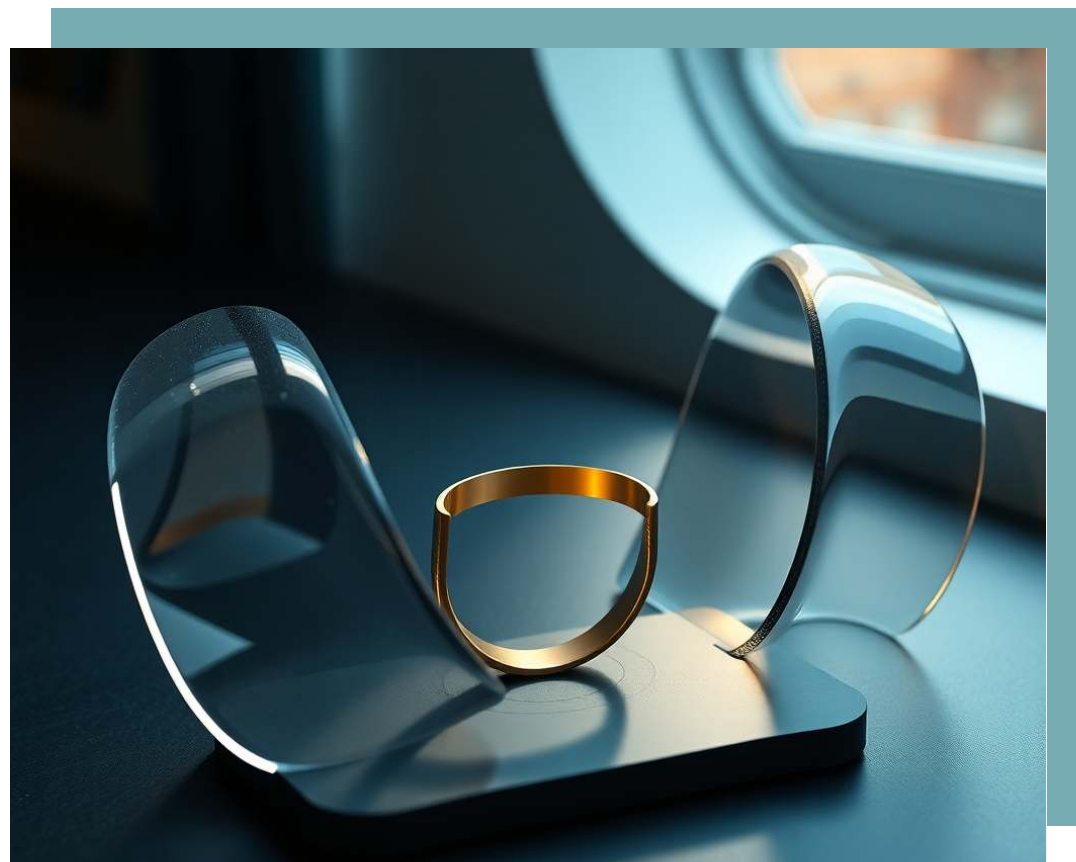
Разные области используют одну и ту же идею: переход от сложного угла к комбинации известных значений.

Наиболее заметно применение в учебных задачах и геометрии, но формулы важны и там, где требуется точная работа с поворотами и направлениями.

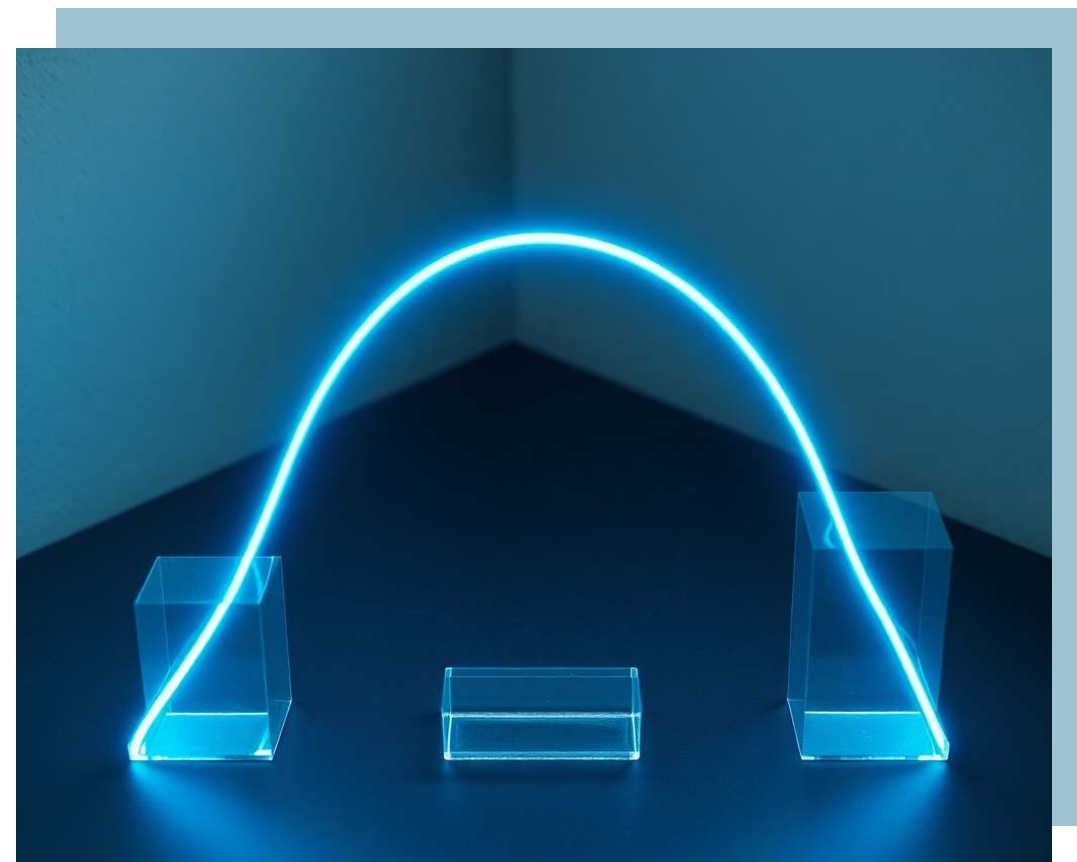
Обобщение типовых учебных и прикладных областей применения тригонометрии



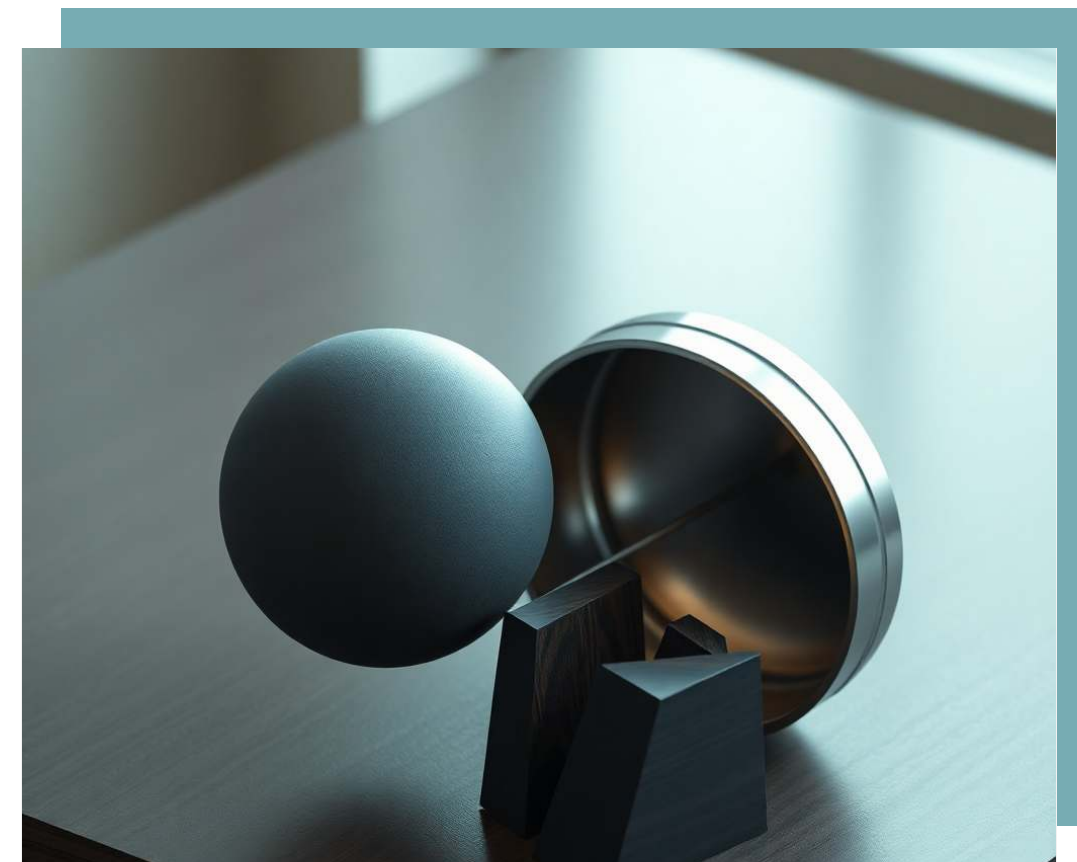
Связь с формулами для синуса и косинуса



Сначала появляются $\sin$ и $\cos$
Формулы для тангенса не возникают сами по себе: они строятся на формулах сложения и разности для синуса и косинуса. Именно они задают основу, из которой затем получается отношение двух тригонометрических выражений.



Одна логика преобразований
Если раскрыть $\sin(\alpha \pm \beta)$ и $\cos(\alpha \pm \beta)$, а затем разделить числитель и знаменатель на $\cos \alpha \cdot \cos \beta$, структура формулы для $\tan$ становится очевидной. Вся цепочка держится на одном и том же приёме преобразования.



Три группы формул связаны
Формулы для синуса, косинуса и тангенса удобно рассматривать вместе, потому что каждая следующая опирается на предыдущие. Такая схема помогает не заучивать выражения отдельно, а понимать их как элементы единой системы.

Проверка формулы на числовом примере

- 1 Берём известные значения**
Пусть $\operatorname{tg} \alpha = 1$, а $\operatorname{tg} \beta = 1/\sqrt{3}$. Это удобный выбор, потому что оба числа являются табличными и позволяют быстро проверить правильность формулы без лишних вычислительных трудностей.
- 2 Подставляем в формулу**
Для суммы получаем $(1 + 1/\sqrt{3}) / (1 - 1/\sqrt{3})$. После преобразования дроби выходит $2 + \sqrt{3}$, то есть точное значение тангенса угла 75° .
- 3 Сверяем результат**
Если ответ совпадает с табличным значением, значит, знаки в формуле выбраны верно, а преобразование выполнено корректно. Такая проверка полезна как способ самоконтроля в школьных задачах.

Формулы, которые открывают нетабличные углы

Формулы $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ и $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ связывают сложные углы с известными значениями и делают вычисления точными. Они нужны для уравнений, преобразований и уверенной работы с тригонометрией.