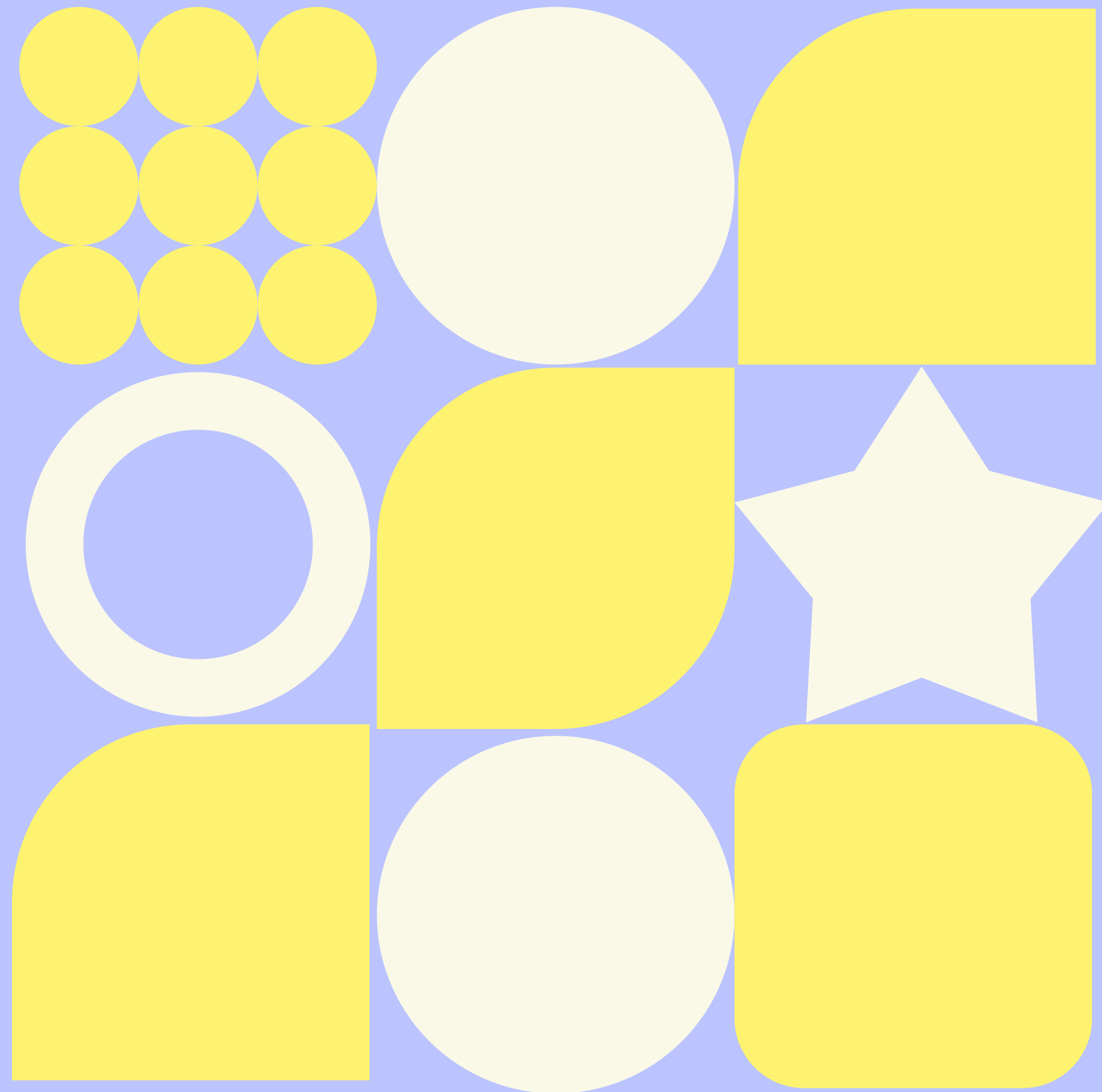


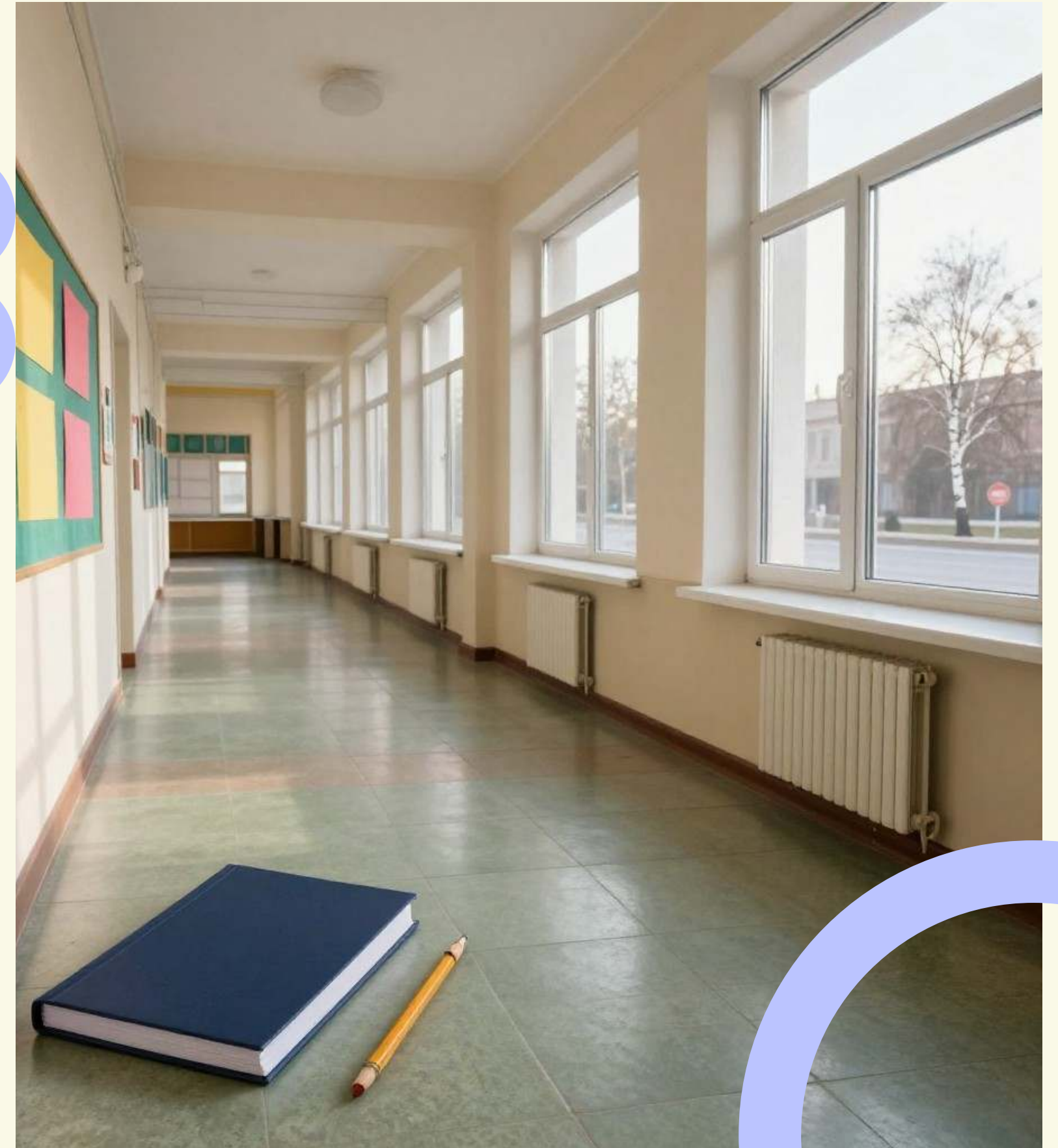
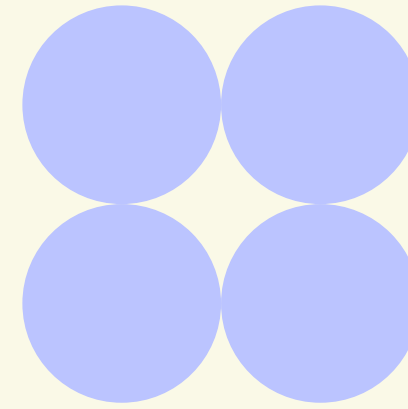
Функции и их графики: как математика показывает зависимость

Функции делают зависимость
наглядной.



Почему функции важны

Функции помогают описывать реальные изменения: цену, путь, температуру, расход топлива. На координатной плоскости такие зависимости становятся точками, линиями и кривыми, которые легко сравнивать и понимать.



Что такое функция

Однозначное соответствие

Функция задаёт правило, по которому каждому значению x соответствует только одно значение y . Именно это отличие делает её удобной моделью зависимости между величинами.

Независимая переменная

Значение x выбирают или задают отдельно, поэтому его называют независимой переменной. От него зависит результат вычисления, который затем получают для y .

Зависимая переменная

Величина y меняется вместе с x и называется зависимой переменной. Если меняется входное значение, по правилу меняется и выходное значение функции.

Запись $y=f(x)$

Запись $y=f(x)$ показывает, что y находится по формуле или правилу f для выбранного x . Это удобный способ кратко записывать зависимость.

Когда это не функция

Если одному и тому же x соответствуют два разных значения y , такая зависимость не является функцией. Для функции это правило всегда нарушаться не должно.

Что нужно помнить о области определения и значений



Область определения

Это все значения x , которые можно подставить в правило без ошибки. Они должны давать осмысленный результат и не нарушать условия формулы.



Область значений

Это все значения y , которые получаются после вычислений. Она показывает, какие ответы вообще может выдавать функция при допустимых x .



Знаменатель ноль

В дробных выражениях нельзя брать значения, при которых знаменатель равен нулю. Такое подставление приводит к невозможному действию — делению на ноль.



Пример $y=1/x$

Для функции $y=1/x$ значение $x=0$ исключается из области определения. Если подставить ноль, получится деление на ноль, а это недопустимо.

Координатная плоскость и запись точек

Две оси

Координатная плоскость состоит из осей x и y , расположенных перпендикулярно. По ним удобно отмечать положение любой точки и строить графики зависимостей.

Начало координат

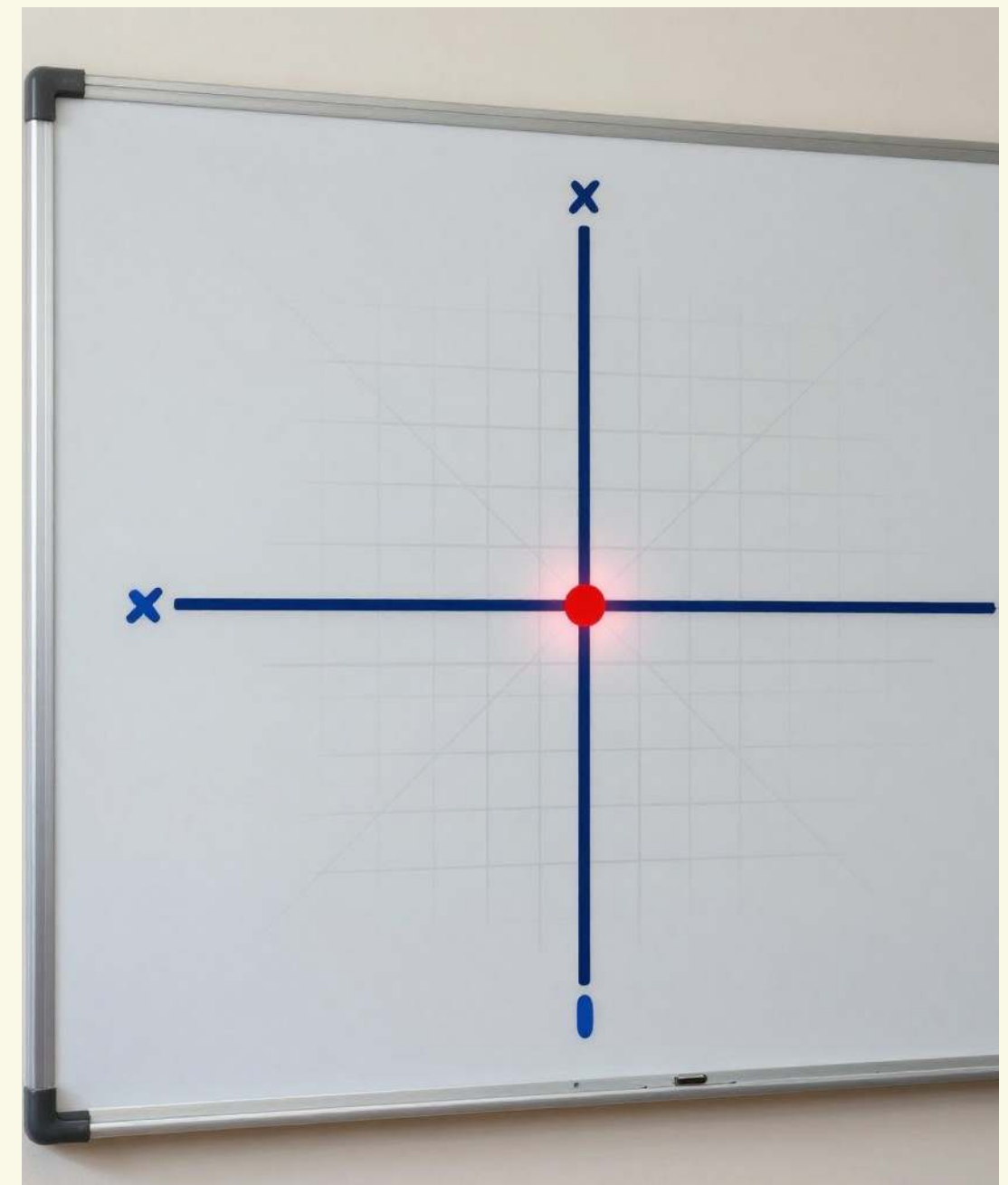
Точка $(0; 0)$ называется началом координат. Она находится в месте пересечения осей и служит отправной точкой при построении многих графиков.

Пара чисел

Точка записывается как $(x; y)$: сначала указывают значение по оси x , затем по оси y . Порядок чисел менять нельзя.

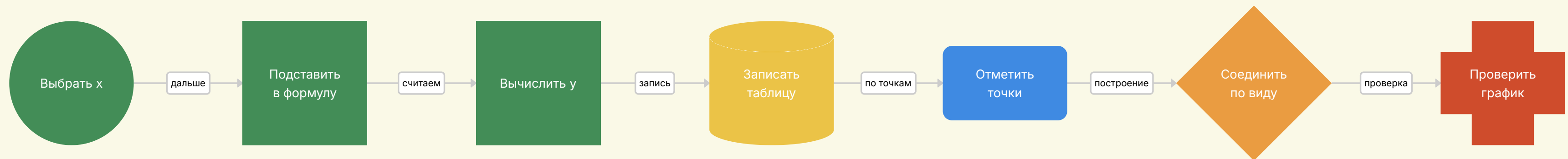
Таблица перед графиком

Чтобы построить график, часто сначала составляют таблицу значений. Затем по полученным парам чисел отмечают точки на плоскости и соединяют их по смыслу функции.

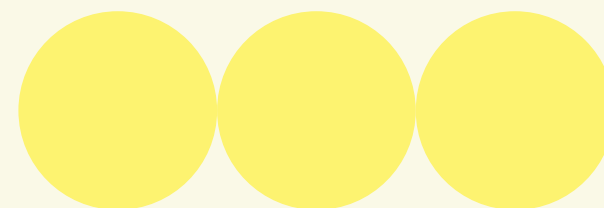


Построение графика по формуле

Последовательность действий при работе с функцией и её значениями



Линейная функция и её график



1 Вид формулы

Линейная функция записывается так: $y=kx+b$. Здесь k и b — числа, которые задают форму графика и его положение на координатной плоскости.

2 График — прямая

Если функция линейная, её график всегда представляет собой прямую линию. Поэтому такие зависимости удобно строить и сравнивать по двум-трём точкам.

3 Роль коэффициента k

Число k показывает наклон прямой. При $k>0$ линия идёт вверх слева направо, а при $k<0$ — вниз, поэтому функция убывает.

4 Роль числа b

Коэффициент b показывает точку пересечения графика с осью y . Если $b=0$, прямая проходит через начало координат и не смещена вверх или вниз.

Пример значений линейной функции $y=2x+1$

x	y
-2	-3
-1	-1
0	1
1	3
2	5

Вычисления по формуле $y=2x+1$



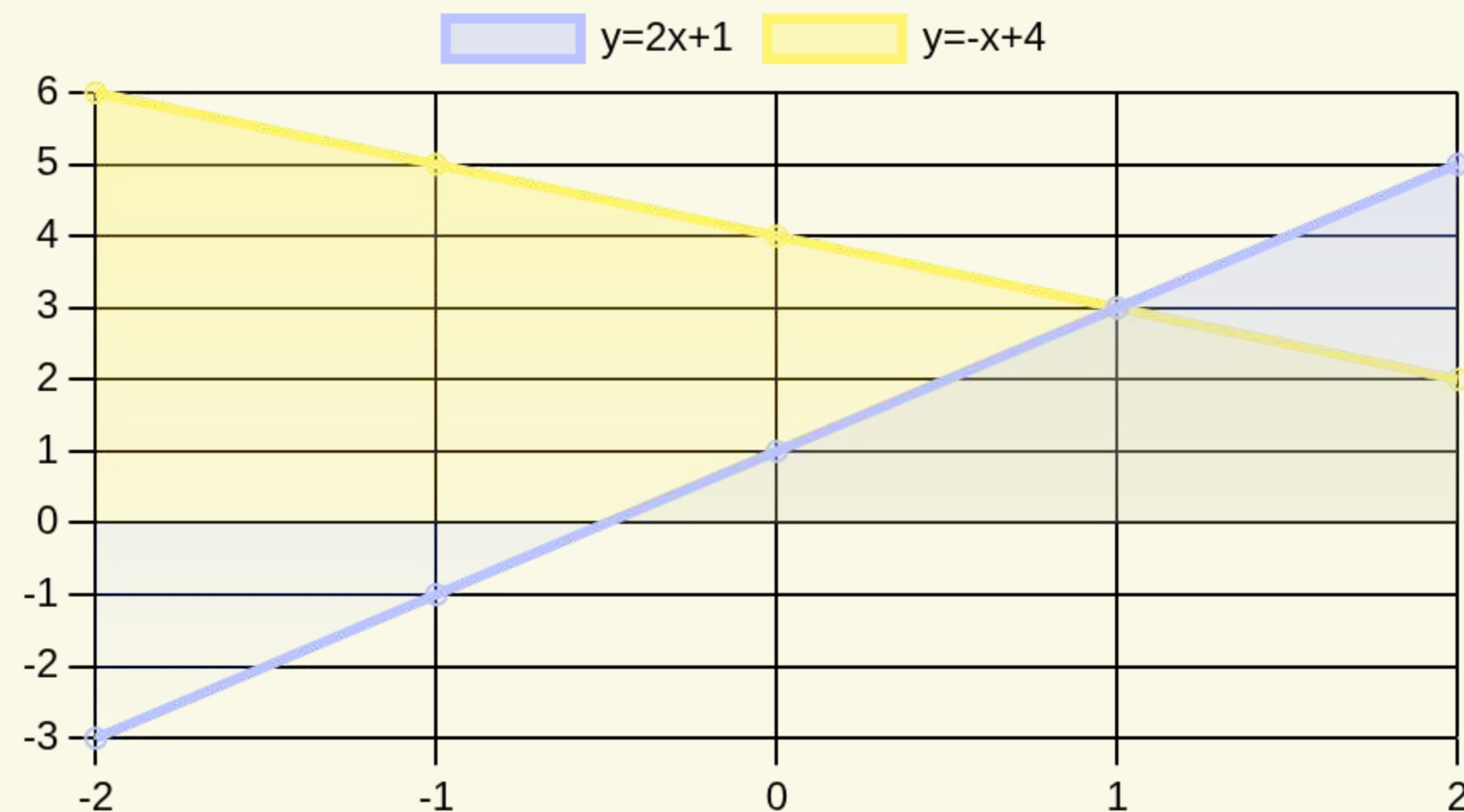
По таблице видно, как меняются значения функции при последовательном изменении x .

При увеличении x на 1 значение y каждый раз растёт на 2, поэтому график будет прямой линией.

Сравнение роста и убывания линейных функций

Обе зависимости заданы формулами, но изменяются по-разному: одна возрастает, другая убывает. Это удобно видеть на одном поле координат.

Первая функция растёт, вторая убывает. Их пересечение показывает, при каком x значения совпадают.



Вычисления по формулам $y = 2x + 1$ и $y = -x + 4$

Нелинейные функции

Не прямая линия

Нелинейная функция не изображается прямой. Её график может быть изогнутым, иметь ветви или менять направление, поэтому форма сразу подсказывает особенности зависимости.

Парабола $y = x^2$

График функции $y = x^2$ имеет вид параболы. Он симметричен относительно оси y , а вершина находится в точке $(0; 0)$, где значение y наименьшее.

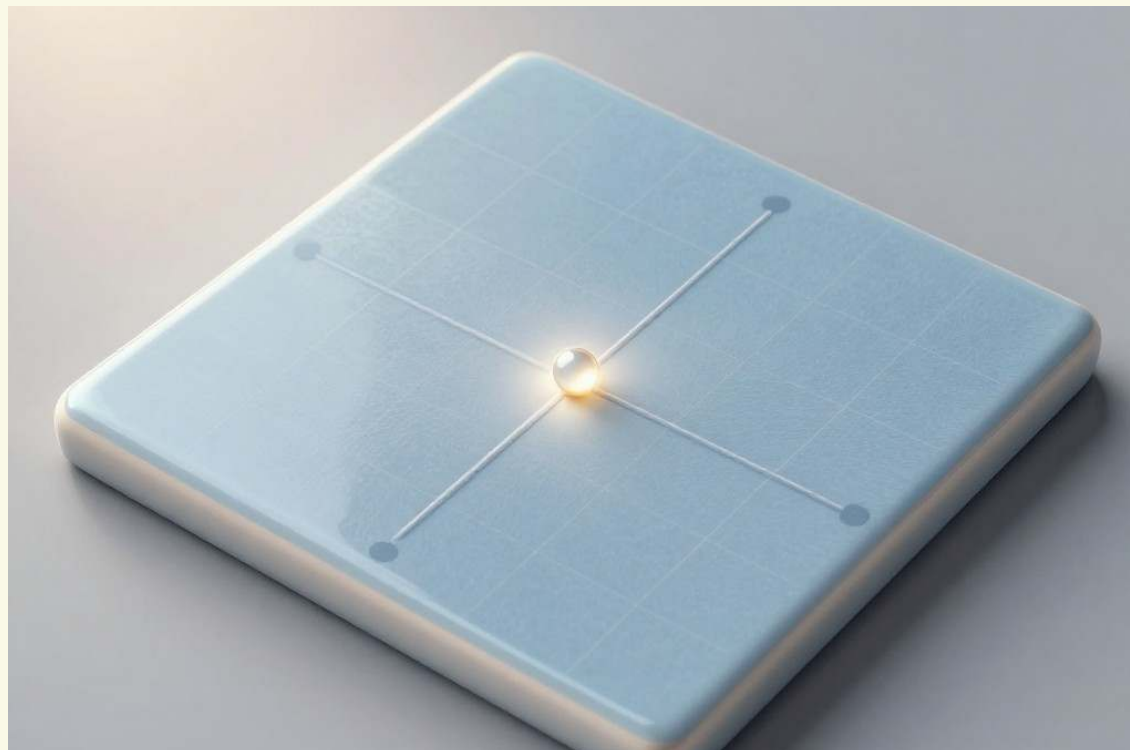
График $y = 1/x$

График функции $y = 1/x$ состоит из двух ветвей. Он не пересекает оси координат и помогает заметить, что некоторые значения x вообще не допускаются.

На что похожа парабола

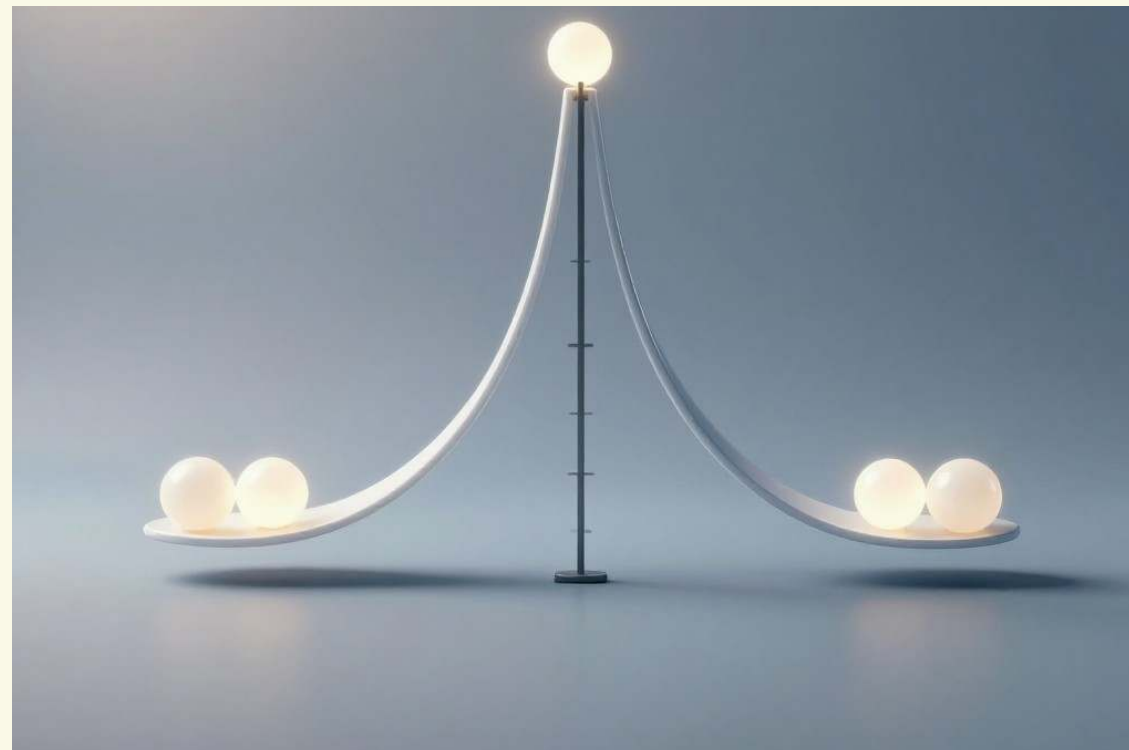
1 Точка отсчёта

График функции $y=x^2$ начинается в начале координат и сразу показывает, как меняется значение y при росте x . Каждой точке на ветвях параболы соответствует своё значение функции, а сама форма выглядит плавной и симметричной.



2 Зеркальное отражение

Если взять одинаковые по модулю числа, но с разными знаками, получится одна и та же высота графика. Поэтому точки $(1; 1)$ и $(-1; 1)$, а также $(2; 4)$ и $(-2; 4)$ расположены симметрично относительно оси y .



3 Сдвиг вверх

Формула $y=x^2+3$ не меняет форму параболы, а только поднимает её выше. Вершина оказывается в точке $(0; 3)$, и весь рисунок сохраняет симметрию, но располагается на три единицы выше исходного графика.

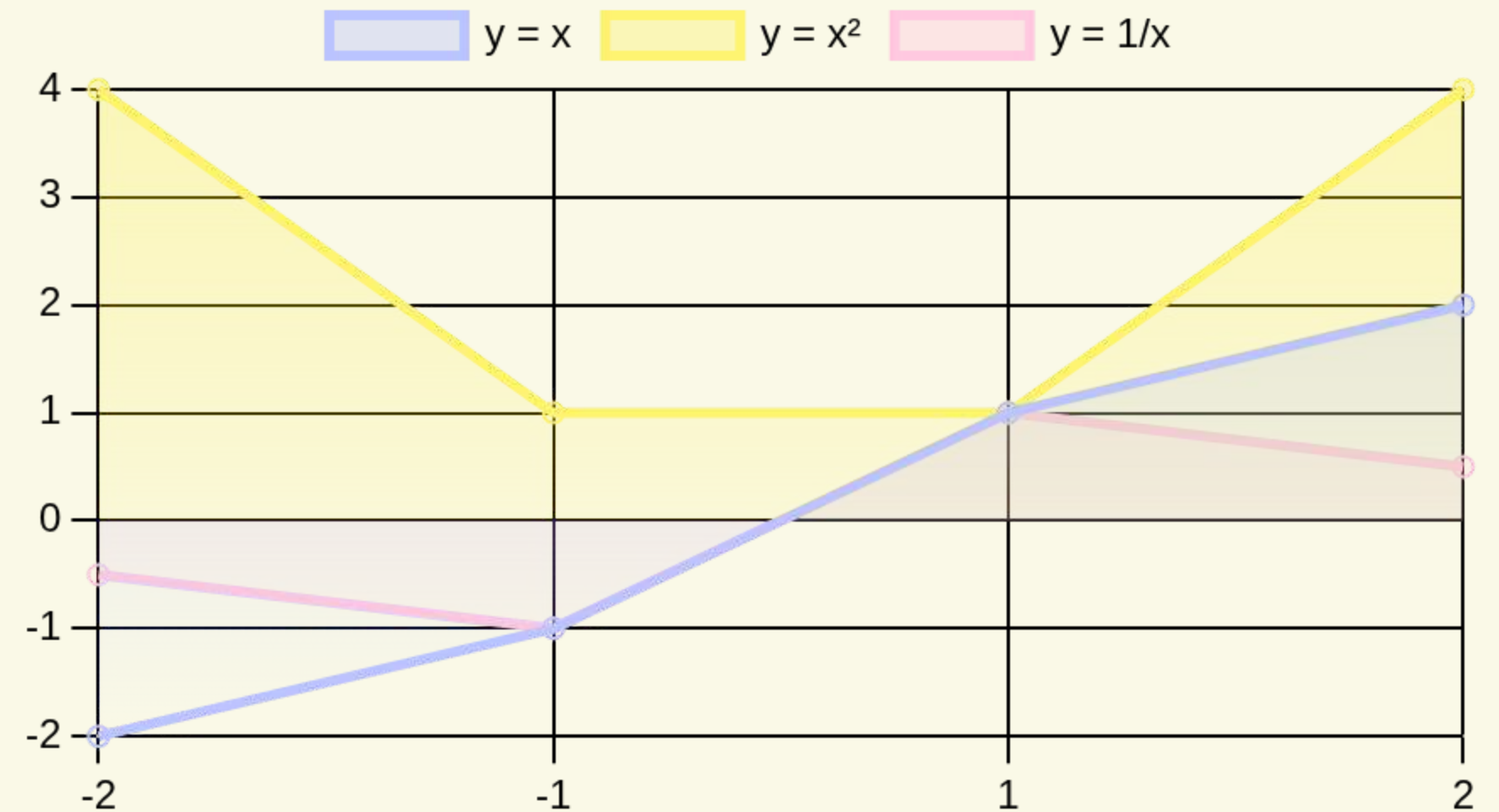


Как выглядят разные графики

Три графика легко отличить по форме: прямая, парабола и две ветви гиперболы. По виду рисунка сразу понятно, как ведёт себя функция.



График помогает узнать тип функции ещё до вычислений: рост, симметрия и разрывы видны на глаз.



Школьный курс алгебры 7 класса; значения рассчитаны по формулам $y=x$, $y=x^2$, $y=1/x$.

0

это значение аргумента, при котором график пересекает ось x

Школьный курс алгебры 7 класса.

Ноль функции показывает, где значение y становится равным нулю. По таким точкам удобно проверять построение графика и находить решения простых уравнений.

Признаки, заметные по графику

По внешнему виду графика можно быстро определить основные свойства функции и понять, как она изменяется.

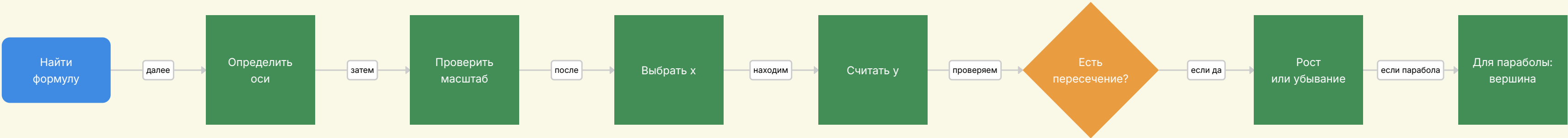


Направление линии и её форма сразу показывают, меняется ли функция, остаётся ли постоянной или идёт в обратную сторону.

Признак	Как выглядит	Что видно
Возрастает	Идёт вверх	x растёт
Убывает	Идёт вниз	y уменьшается
Постоянна	Горизонталь	y не меняется

Пошаговое чтение готового графика

Алгоритм основан на типичных действиях при работе с графиком функции в 7 классе.



Где графики помогают каждый день



Физика

По графику можно увидеть, как меняются температура, скорость или путь тела. Это помогает сравнивать величины и замечать важные моменты быстрее, чем по длинному списку чисел.



География

Графики показывают изменения погоды, уровня осадков и температуры в течение суток или недели. По ним удобно отслеживать динамику и делать простые выводы о климате.



Биология

Рост растения, изменение массы или высоты удобно записывать на графике. Так легко увидеть, когда рост ускоряется, замедляется или почти останавливается.



Экономика и спорт

Графики показывают продажи, расходы, результат тренировки или дистанцию на соревновании. По ним быстро видно, где показатели растут, а где снижаются.

Распределение времени в течение дня

Круговая диаграмма показывает, как сутки делятся между основными занятиями школьника. Сумма всех частей всегда равна одному дню.

Больше всего времени занимает сон, а самые маленькие доли часто связаны с дорогой и обязательными делами.



Условный пример распорядка дня школьника; данные иллюстративные.

Что чаще всего идёт не так

1

Путают оси

Если перепутать ось x и ось y , точки окажутся не там, где должны быть. Из-за этого весь график будет искажён, даже если вычисления выполнены верно.

2

Выбирают неудобный масштаб

Слишком крупные деления делают график грубым, а слишком мелкие — неудобным для чтения. Перед построением важно выбрать одинаковый и понятный шаг по обеим осям.

3

Наносят точки, но соединяют неверно

Не все точки нужно соединять прямыми линиями. Вид соединения зависит от функции: прямая, кривая или две отдельные ветви должны соответствовать формуле.

4

Забывают про ограничения

В дробных выражениях нельзя использовать значения, при которых знаменатель равен нулю. Если это пропустить, получится ошибка в области определения функции.

5

Не проверяют результат

Полезно сверить несколько точек с формулой и посмотреть, совпадают ли они с рисунком. Такая проверка помогает вовремя заметить неточности и исправить их.

Три коротких примера для запоминания

2. Квадратичная зависимость

· Функция $y=x^2$ образует параболу
· с минимумом в начале координат.
· Её правая и левая части одинаковы,
· поэтому график удобно сравнивать по оси
· y .

1. Линейная зависимость

· Функция $y=3x$ даёт прямую, которая
· проходит через начало координат
· и поднимается вверх. По графику сразу
· видно, что значение y растёт вместе с x .

3. Постоянное значение

· Функция $y=5$ изображается
· горизонтальной прямой. Она показывает
· случай, когда значение y не меняется
· при любом x .



Функции и графики: язык зависимости

График превращает формулу в наглядный рисунок: по нему видно, как меняется величина, где функция равна нулю и какой у неё характер. Это делает математику понятной и полезной в жизни.

