

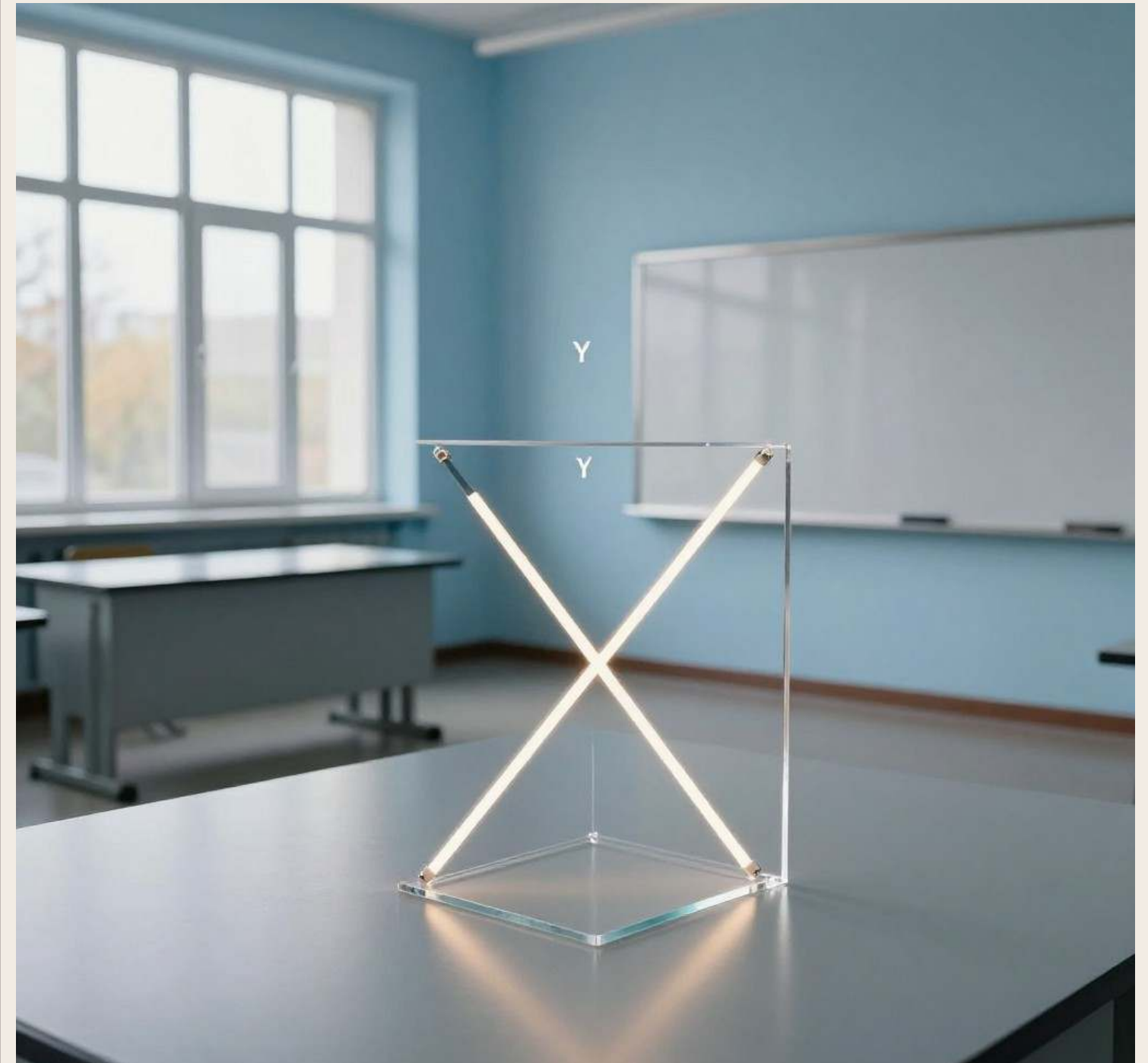


Прямоугольная система координат в пространстве

Освойте язык координат: точки, расстояния, середины, векторы — всё в единой модели.

Почему координаты в пространстве изучаются в 11 классе

Прямоугольная система координат продолжает декартову идею с плоскости и превращает геометрию в алгебру. В стереометрии это удобно при работе с точками, прямыми, плоскостями и объёмными фигурами; метод применяют также в физике, информатике и навигации.



Три оси и начало координат

1

В пространстве вводят три взаимно перпендикулярные оси: Ox , Oy и Oz . Каждая ось задаёт направление одной координаты, поэтому координаты имеют смысл только относительно выбранных направлений.

2

Все оси пересекаются в одной точке O — начале координат. От неё «отсчитывают» положение любой точки, двигаясь вдоль осей в положительном или отрицательном направлении.

3

Порядок записи координат фиксирован: сначала x , затем y , потом z . Такая договорённость делает запись однозначной и позволяет переходить от рисунка к вычислениям без путаницы.

Как задаются координаты точки в пространстве



1

Проекции на оси и числовое описание

Координаты точки $A(x; y; z)$ определяются её проекциями на координатные оси. Число x показывает, насколько точка смещена вдоль оси Ox , число y — вдоль Oy , а число z — вдоль Oz .

2

Пунктирная схема и смысл тройки $(x; y; z)$

На координатном рисунке обычно видны сама точка A , её проекции и пунктирные отрезки, связывающие точку с осями. Такая схема объясняет, что координаты — это числовое описание положения в объёме.

Знаки координат в октантах

Знаки (x, y, z)
(+ , + , +)
(+ , + , -)
(+ , - , +)
(+ , - , -)
(- , + , +)
(- , + , -)
(- , - , +)
(- , - , -)

Октанты разделяют пространство тремя взаимно перпендикулярными плоскостями (Oxy, Oxz, Oyz). В каждом октанте знаки x, y, z постоянны.

По знакам x, y и z можно сразу определить, в каком октанте находится точка: расположение определяется не только величинами координат, но и направлением их отклонения от начала координат.

Расстояние от точки до координатных плоскостей



По модулю координата становится расстоянием до «противолежащей» плоскости: знак влияет лишь на сторону, но не на величину расстояния.

Разные расстояния «выбирают» разные координаты. Поэтому, зная расстояния до плоскостей, можно восстановить модули координат.

Иллюстрация (пример): $|z|=4$, $|y|=3$, $|x|=2$; в общем случае используются $|z|$, $|y|$, $|x|$.

Точки на осях и координатных плоскостях

Если точка лежит на оси Ox , то она отстоит от начала координат только по направлению x . Поэтому её координаты имеют вид $(x; 0; 0)$: y и z равны нулю.

1

Для оси Oy аналогично: точка описывается тройкой $(0; y; 0)$. На оси Oz координаты записываются как $(0; 0; z)$, поскольку смещения вдоль остальных осей отсутствуют.

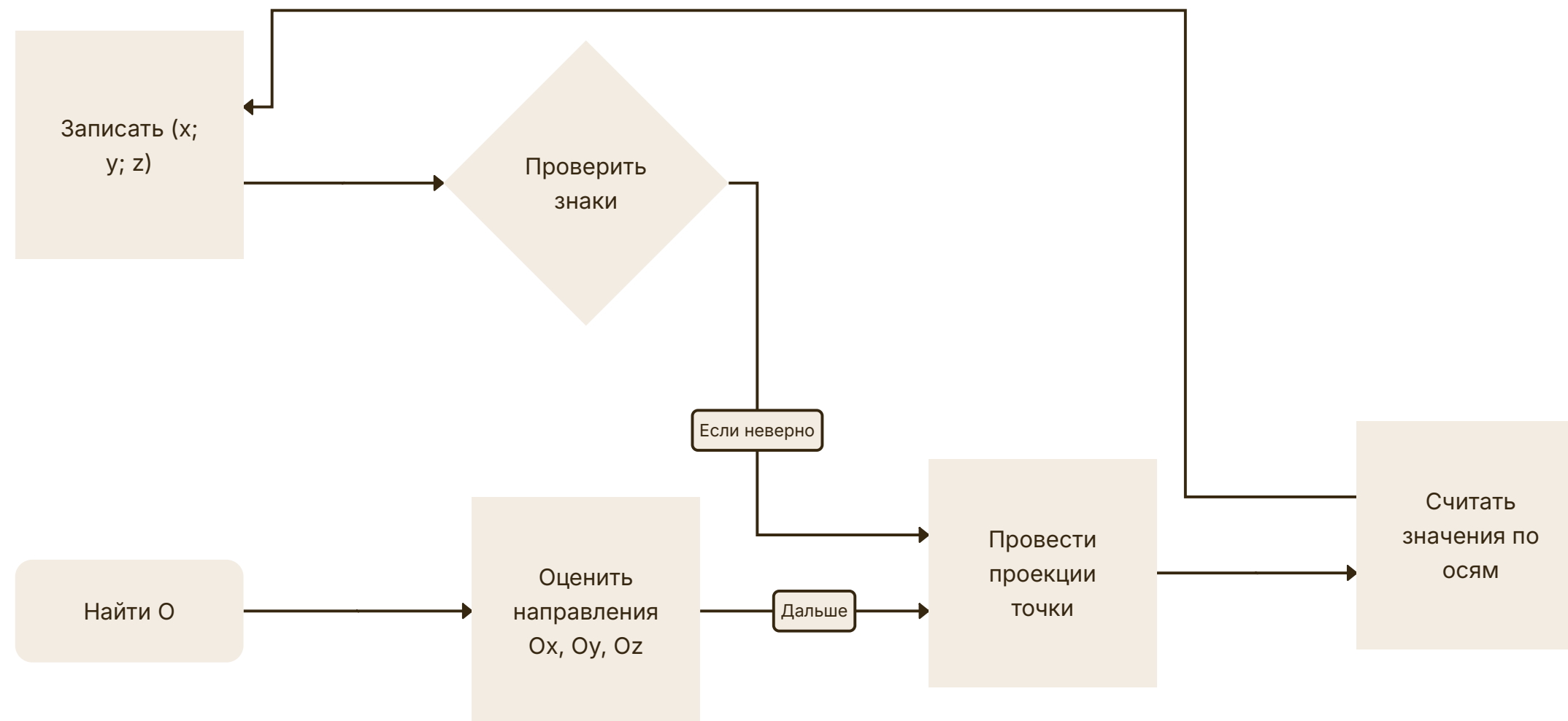
2

На плоскостях действуют «нулевые» координаты: для Oxy это $(x; y; 0)$, для Oxz — $(x; 0; z)$, для Oyz — $(0; y; z)$. Эти признаки ускоряют проверку положения точки по рисунку.

3

Алгоритм нахождения координат точки

Чтение координатного чертежа в прямоугольной системе координат





3

Именно три различия координат суммируются в формуле, чтобы получить длину отрезка

Учебные материалы по стереометрии (координатная формула расстояния)

Для $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$ вычисляют $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$. Это пространственный аналог теоремы Пифагора.

Сравнение расстояний между разными парами точек



На диаграмме одинаковое изменение x ($=1$) даёт разные длины, потому что «подключаются» также изменения y и z через квадраты.

Общая длина зависит от всех трёх координат: она определяется суммой квадратов приращений, поэтому одинаковая разность одной координаты не определяет расстояние.

Пример расчётов по формуле $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$; значения: $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$.

Середина отрезка и деление отрезка в отношении

Координаты середины M отрезка AB вычисляют как средние арифметические координат концов: $M((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2; (z_1+z_2)/2)$. Это работает сразу по каждой оси, потому что оси независимы.

Если точка P делит отрезок AB в отношении $m:n$, её координаты получают с взвешиванием: ближе к концу, который «берётся с большим весом», и меньше зависит от расстояний до противоположного конца. Формулы выражают идею пропорционального деления.

Такие выражения напрямую связаны с симметрией: середина — точка, относительно которой координаты «уравновешиваются». Поэтому они часто встречаются в задачах, где нужно не только вычислить, но и проверить взаимное расположение точек.

Основные формулы координатной геометрии

Объект	Формула	Смысл	Когда нужна
Точка A	$(x; y; z)$	координаты	чтение/задание
Расстояние dAB	$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$	длина отрезка	нахождение d
Середина M	$((x_1+x_2)/2; (y_1+y_2)/2; (z_1+z_2)/2)$	координаты M	середина AB
До плоскости	$ x , y , z $	перпендикулярное расстояние	плоскости Oyz/Oxz/Oxy

В компактной таблице собраны ключевые соотношения: как записывать координаты точки, вычислять длины отрезков и середины, а также определять расстояние до координатных плоскостей через модули соответствующих координат.

Большинство задач сводится к аккуратной работе с разностями координат, квадратами и модулями: именно эти операции превращают геометрическую ситуацию в вычисление по готовой формуле.

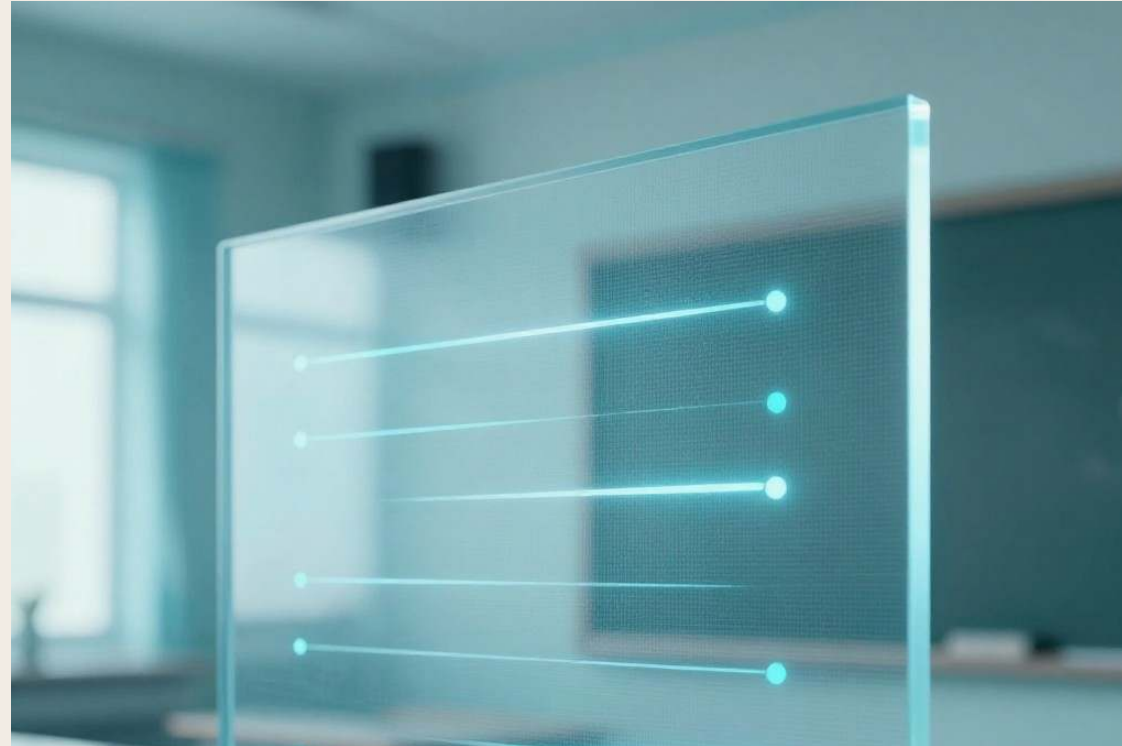
Курс геометрии и алгебраических методов в стереометрии (школьная программа)

Координатные плоскости как «экраны» в пространстве



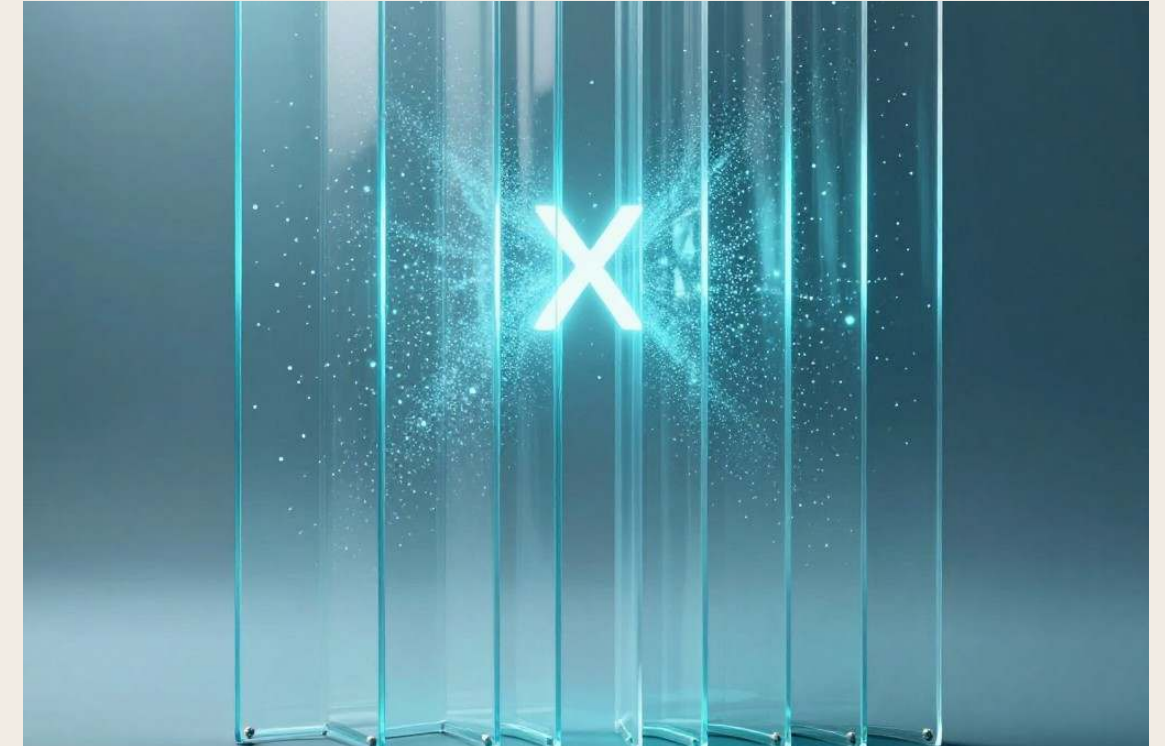
Плоскость Oxy : где z исчезает

Представьте себе «экран», на котором всё отображается только двумя числами: x и y . Когда точка лежит на плоскости Oxy , её третья координата равна нулю, то есть $z=0$. Визуально эта плоскость как бы отсекает верх и низ пространства.



Плоскость Oxz : отслеживаем x и z

Если вместо y вы «смотрите сбоку», появляется плоскость Oxz . Любая точка на ней имеет вид $(x; 0; z)$, потому что $y=0$. Так удобнее анализировать взаимное расположение объектов, когда движение или линии удобно описывать через x и z .



Плоскость Oyz : x становится нулём

Для плоскости Oyz снова включается другая перспектива: фиксируются y и z . Здесь $x=0$, поэтому любая точка записывается как $(0; y; z)$. Эта «перегородка» помогает быстро определять, насколько далеко точка от плоскостей, перпендикулярных осям.

Координаты вектора в пространстве

1

Если заданы точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то координаты вектора $\overline{AB}$ равны $(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$. Эти разности показывают, как нужно сдвинуться по каждой оси.

2

Векторные координаты удобно читать как направленные изменения: знак каждой разности говорит, в какую сторону направлен «шаг» вдоль соответствующей оси. Благодаря этому геометрия превращается в алгебраическую работу с числами.

3

Зная координаты вектора, можно дальше находить его длину и использовать для анализа параллельности и перпендикулярности. Тем самым вектор связывает положение точек и направление, нужное в стереометрических задачах.

Координаты как способ описания движения



Для движения по прямой или ломаной траектории каждая «новая точка» во времени соответствует новой тройке координат. Тогда траектория читается по тому, как меняются x , y и z .

Если на графике одна координата меняется сильнее остальных, значит основное смещение происходит в соответствующем направлении осей. Согласованное изменение всех трёх координат описывает движение в объёме.

Учебная модель: координаты точек во времени ($x(t)$, $y(t)$, $z(t)$); конкретные числовые данные в примере не заданы

Типичные ошибки при работе с координатами

1

Часто путают порядок координат: вместо $(x; y; z)$ подставляют значения в другой последовательности. В результате формулы середины и расстояния дают ошибочный ответ даже при правильных вычислениях.

3

Ошибки возникают и при чтении проекций: можно неверно определить, какой отрезок соответствует проекции точки на ось. Это приводит к неверным x , y или z и «ломает» всё решение.

2

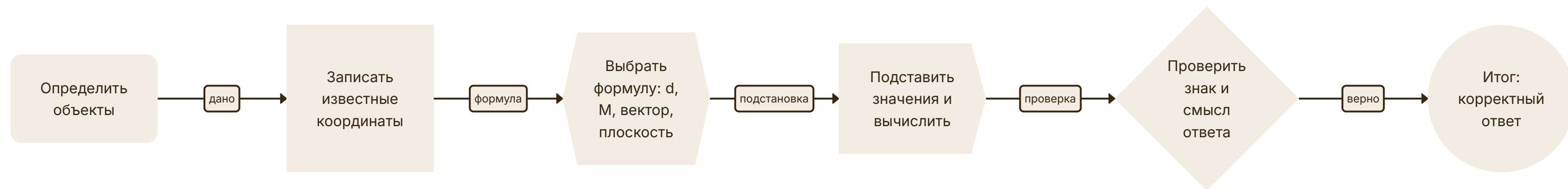
Нередкая проблема — потеря знака «минус». Если забыть, что координата может быть отрицательной, то неверно определятся и октант, и расстояние до плоскостей через модуль.

4

Ещё одна зона риска — подмена расстояния координатой и неправильное применение формулы середины отрезка. Надёжный способ избежать этого — сравнивать ответ с рисунком и проверять логическую согласованность знаков.

Алгоритм решения задач на координаты

Общий порядок действий, применимый к большинству школьных задач по пространственной геометрии



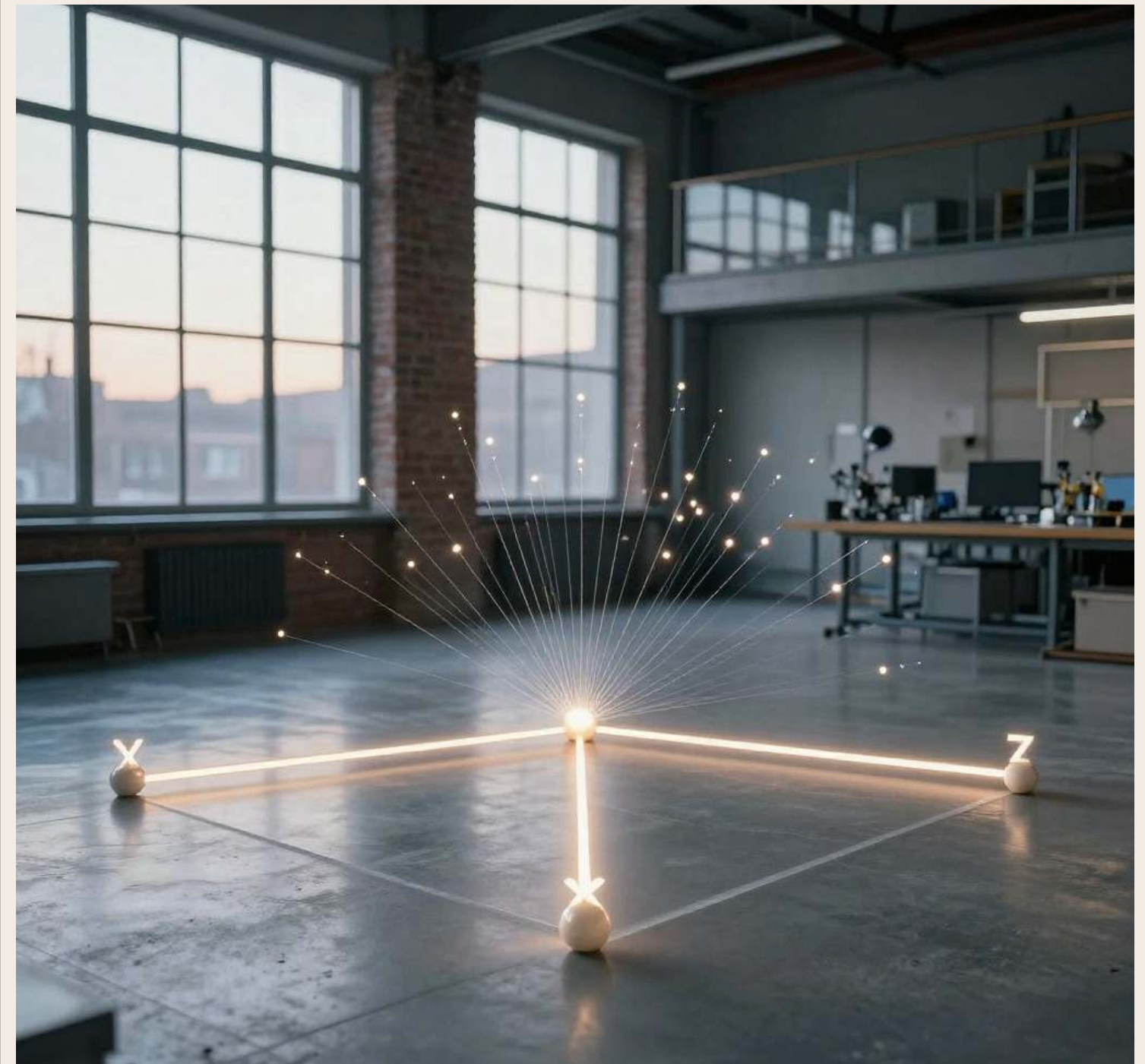
Практическое применение координатной системы

1

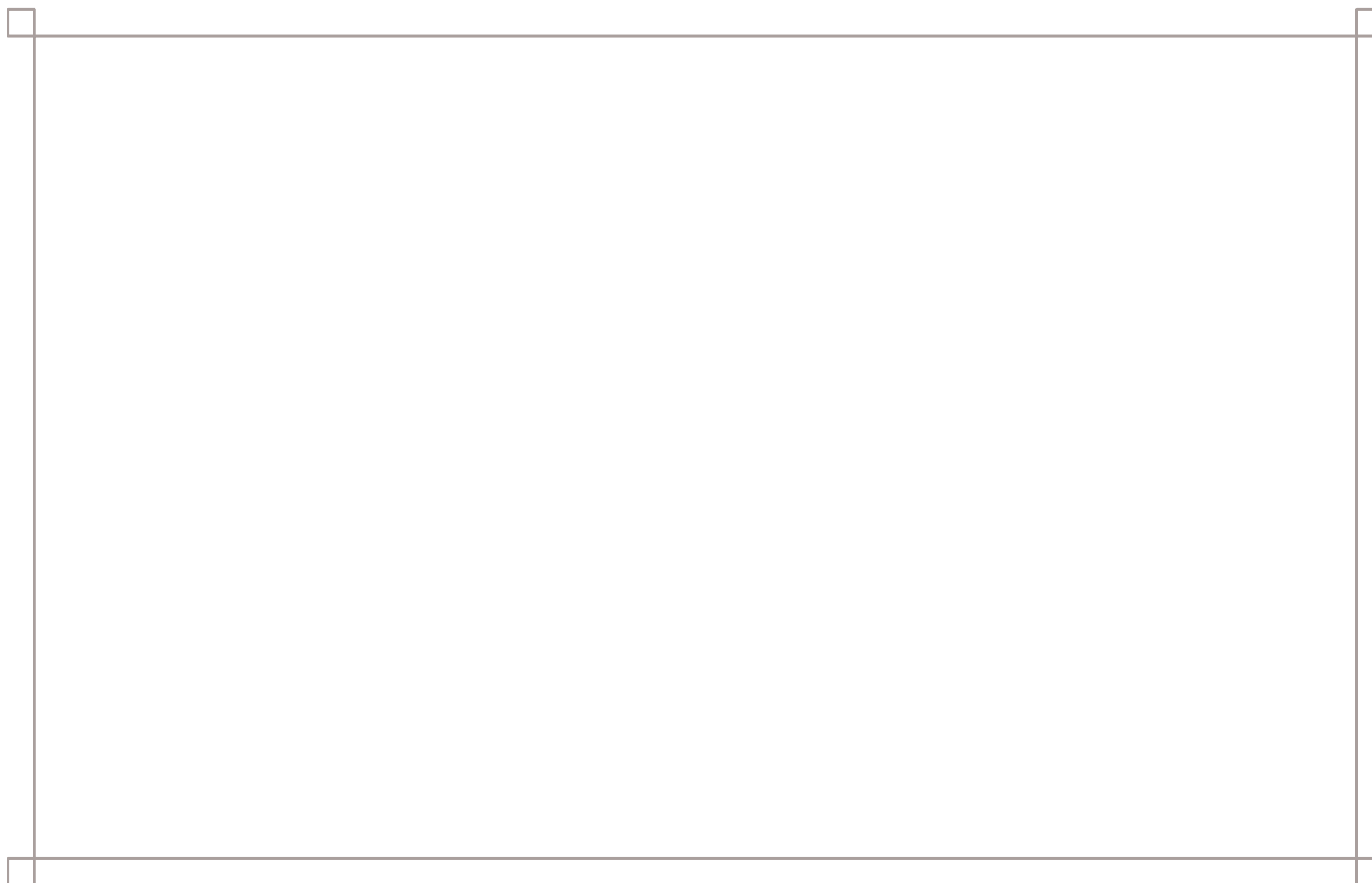
Координаты применяют там, где пространство нужно перевести в измеримые данные: в архитектурных чертежах, 3D-моделировании, навигационных системах и робототехнике. В каждом случае точки становятся числовыми ориентирами для расчётов и контроля точности.

2

По сути координатная система кодирует «геометрию» в набор чисел, удобный для вычислений и программ. Поэтому она лежит в основе компьютерных игр, трёхмерной графики и задач физики движения, где важно проследить изменения со временем.



Плоскость и пространство: что меняется



При переходе к 3D появляется третья ось, а значит требуется координата z . Без неё нельзя однозначно задать положение точки внутри объёма.

Различие в количестве осей и координат напрямую влияет на то, какие задачи можно решить: в 2D не описывают расстояния и объёмы, тогда как в 3D это становится возможным.

Обобщённая учебная схема; сопоставление количества осей, координат и плоскостей



Итоги: геометрия становится «вычислимой»

Прямоугольная система координат в пространстве объединяет геометрию и алгебру, обеспечивая универсальное описание положения точек, отрезков, векторов и плоскостей. В 11 классе ключевыми остаются координаты, октанты, расстояния, середина и уравнения плоскостей.

