

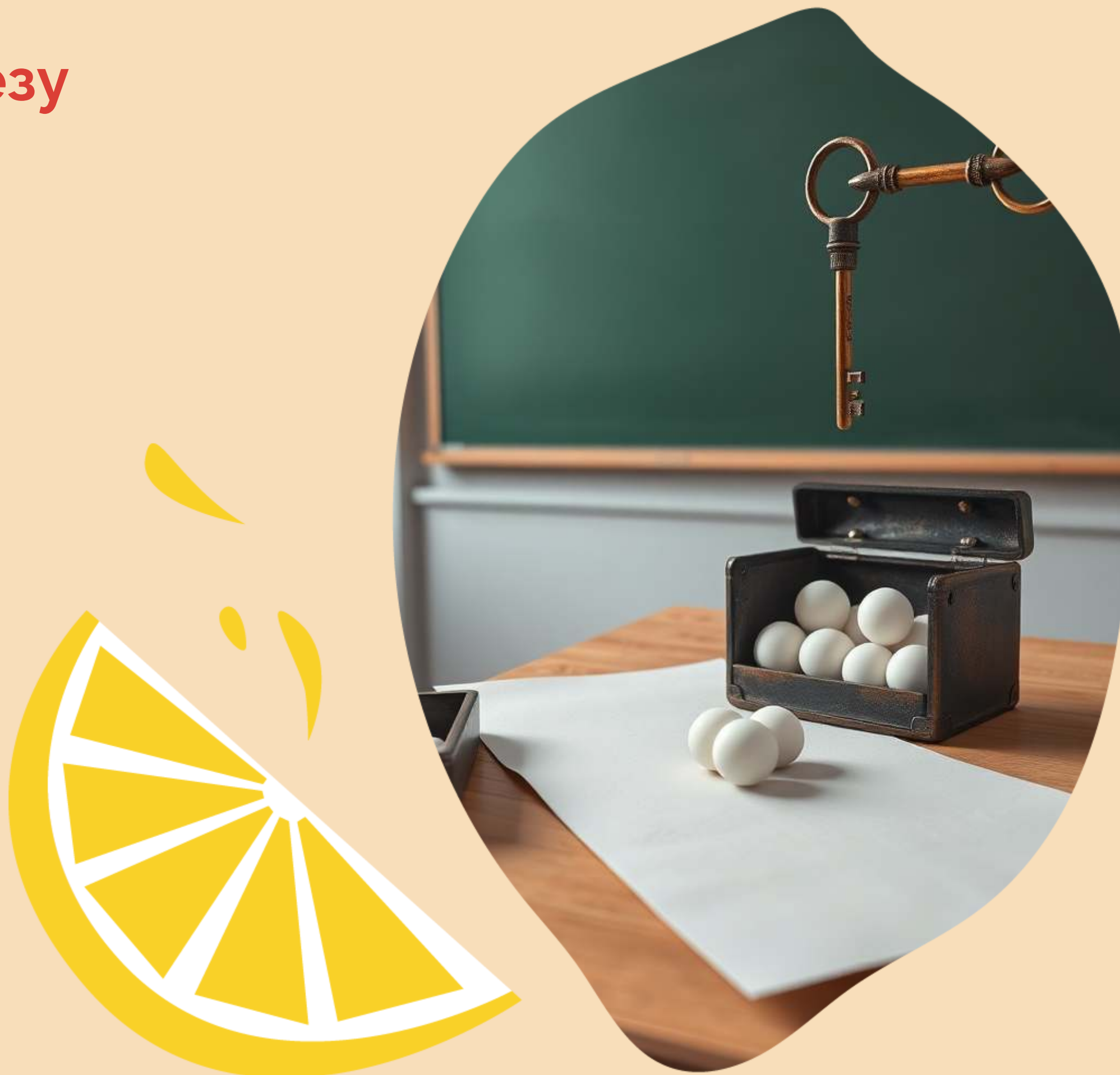
Теорема Безу и корни многочлена

Как остаток деления помогает находить корни многочлена?



Зачем нужна теорема Безу

Теорема Безу связывает подстановку числа в многочлен, остаток деления и проверку корня. Она особенно полезна при уравнениях третьей и более высокой степени, где прямые преобразования быстро становятся громоздкими и неудобными.



Многочлен и его корни

Запись многочлена

Многочлен одной переменной имеет вид $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, где старший коэффициент a_n не равен нулю и задаёт степень выражения.

Что значит корень

Число a называют корнем многочлена, если после подстановки получается $P(a)=0$. Это означает, что соответствующее значение функции равно нулю, а сам многочлен обращается в ноль.

Связь с графиком

Если a — корень, то точка $(a, 0)$ лежит на графике многочлена. Поэтому все корни можно увидеть как точки пересечения графика с осью абсцисс.



Формулировка теоремы Безу

1

Остаток деления

При делении многочлена $P(x)$ на двучлен $x-a$ остаток равен значению $P(a)$. Поэтому подстановка числа в многочлен сразу отвечает на вопрос о результате деления.

2

Признак корня

Если $P(a)=0$, то остаток равен нулю, а значит, $x-a$ делит многочлен $P(x)$ без остатка. Так проверка значения превращается в проверку делимости.

3

Область применения

Теорема верна для многочленов с действительными и комплексными коэффициентами. В школьных задачах чаще всего рассматривают целые и рациональные значения a , которые удобно проверять подстановкой.

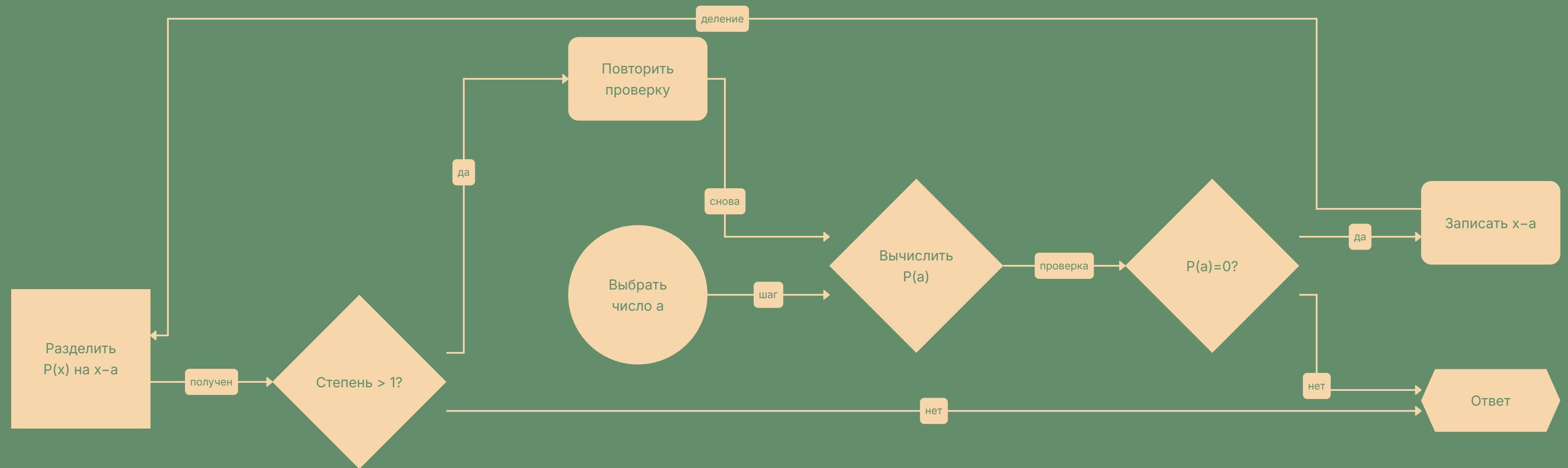
4

Практический смысл

Теорема Безу позволяет не только находить корни, но и быстро находить делители многочлена. Это делает её базовым инструментом при решении уравнений и разложении на множители.

Алгоритм применения теоремы Безу

Последовательная проверка значения многочлена, делимости и понижения степени



Геометрический смысл корня многочлена

Точка пересечения

Корень многочлена соответствует точке, где график пересекает ось Ox . Если $P(a)=0$, то точка $(a, 0)$ принадлежит графику и показывает нулевое значение функции.

Кратные корни

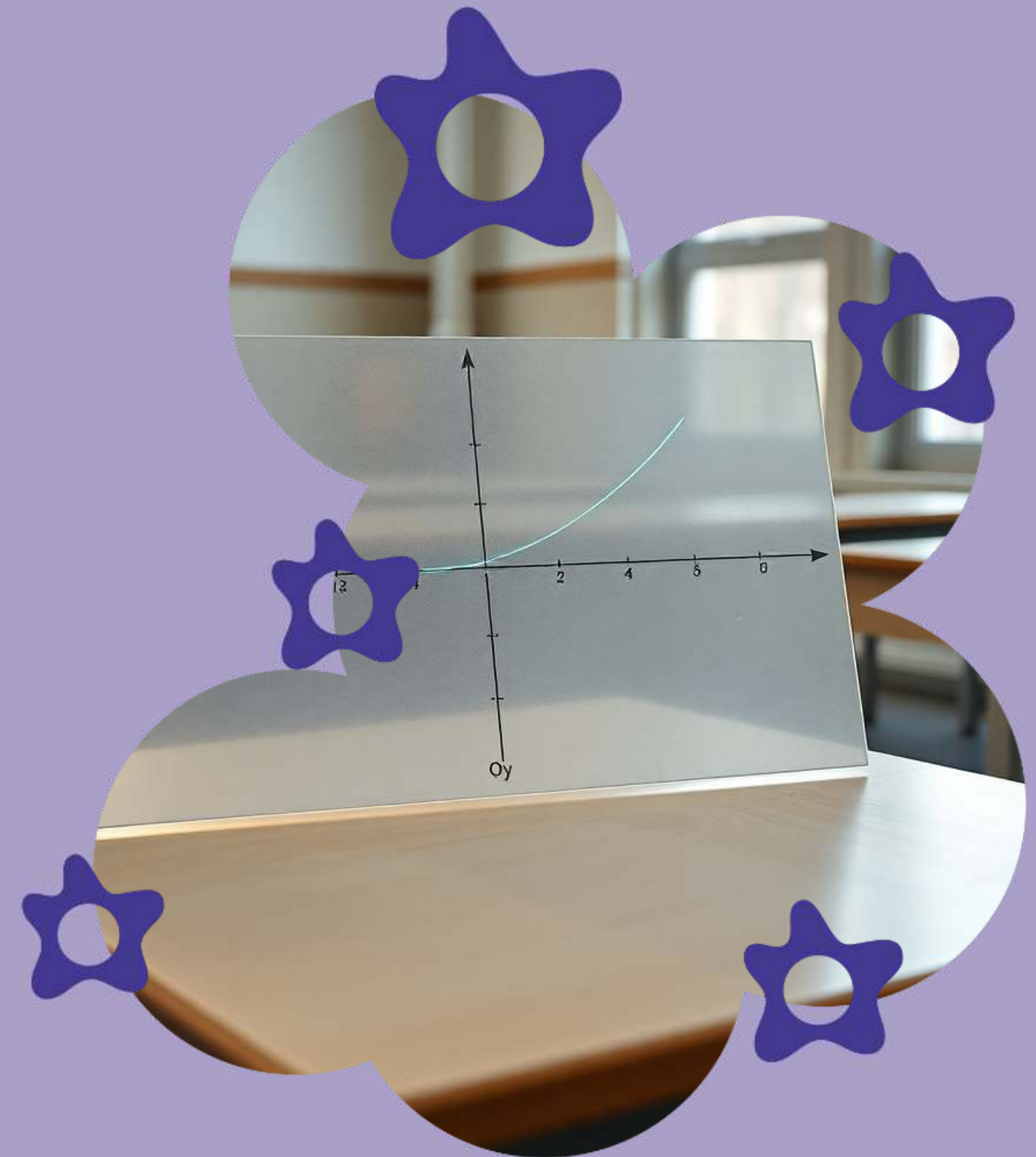
Если корень кратный, график может не пересекать ось, а лишь касаться её. Такое поведение особенно заметно у чётных кратностей и помогает предположить структуру множителя.

Несколько корней

У многочленов высокой степени корней может быть несколько. Тогда график пересекает ось абсцисс в разных точках, и каждая из них соответствует отдельному решению уравнения.

Наглядность графика

По виду графика удобно проверять найденные корни и понимать, сколько решений следует ожидать. Это помогает связать алгебраическую запись многочлена с его геометрическим образом.



Примеры вычисления $P(a)$ и остатка при делении

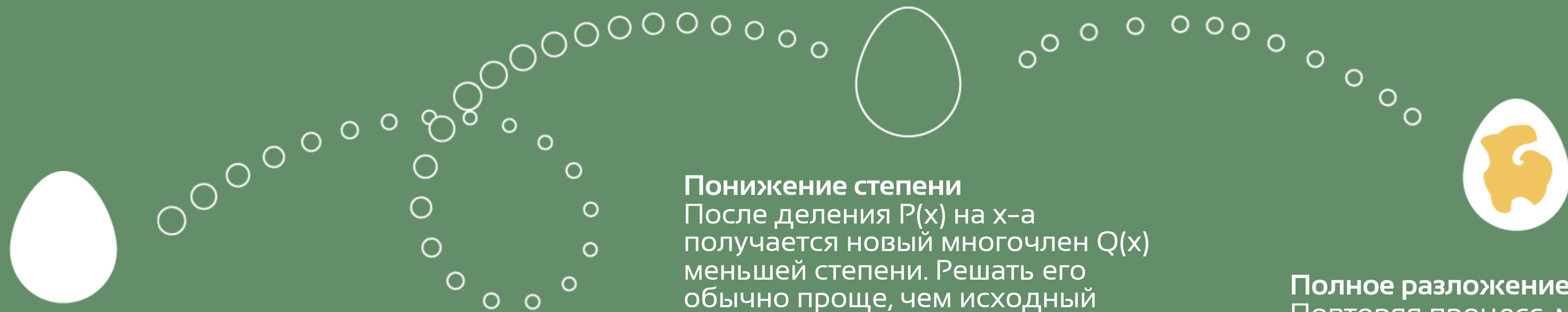
Для многочлена $P(x)=x^3-4x+3$ значения $P(a)$ сразу показывают, делится ли многочлен на $x-a$.

Нулевое значение появляется только при $a=1$, значит $x-1$ является делителем. Во всех остальных случаях остаток равен найденному значению $P(a)$.

Вычисления для $P(x)=x^3-4x+3$

a	$P(a)$	Вывод
-1	6	не делится
0	3	не делится
1	0	делится
3	18	не делится

Следствие о делимости многочлена



Найдён корень

Если подстановка даёт $P(a)=0$, число a действительно является корнем. Это означает, что многочлен имеет делитель $x-a$ и можно переходить к следующему шагу.

Понижение степени

После деления $P(x)$ на $x-a$ получается новый многочлен $Q(x)$ меньшей степени. Решать его обычно проще, чем исходный многочлен высокой степени.

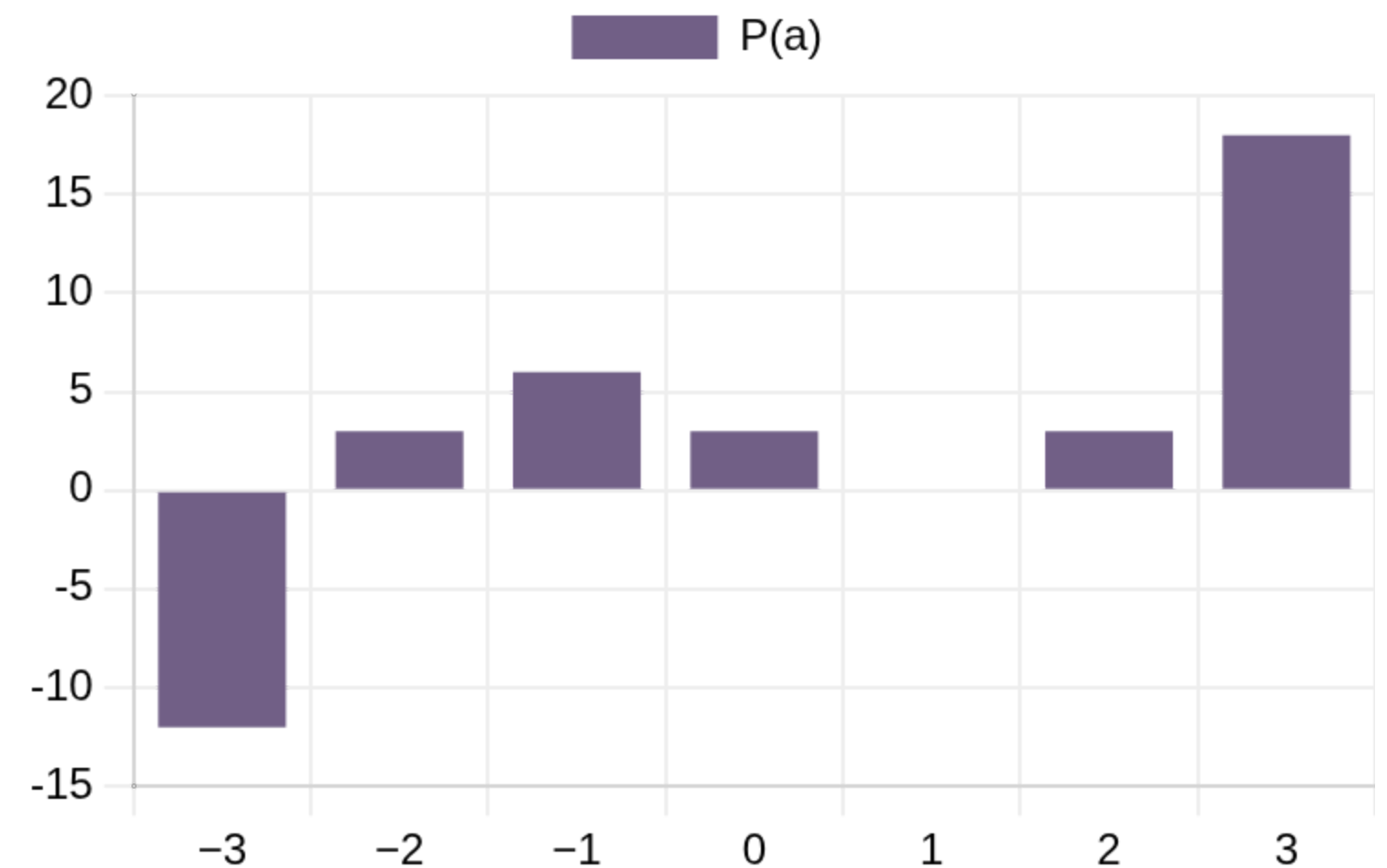
Полное разложение

Повторяя процесс, можно разложить многочлен на произведение линейных множителей и, при необходимости, оставить квадратный множитель для последующего решения.

Проверка нескольких целых значений

Подстановка целых чисел помогает быстро исключить неподходящие кандидаты и не тратить время на случайный перебор.

Нулевое значение есть только при $a=1$, значит именно это число является корнем; остальные варианты сразу отвергаются.



Вычисления для $P(x)=x^3-4x+3$

Теорема о рациональных корнях

1

Возможный вид корня

Если многочлен с целыми коэффициентами имеет рациональный корень p/q в несократимом виде, то p делит свободный член, а q делит старший коэффициент многочлена.

2

Сужение поиска

Эта теорема резко уменьшает число вариантов для проверки. Вместо бесконечного множества рациональных чисел остаётся конечный список, который можно перебрать подстановкой.

3

Случай старшего коэффициента 1

Когда старший коэффициент равен 1, возможны только целые рациональные корни. Их нужно искать среди делителей свободного члена, что особенно удобно в школьных задачах.

4

Практическая польза

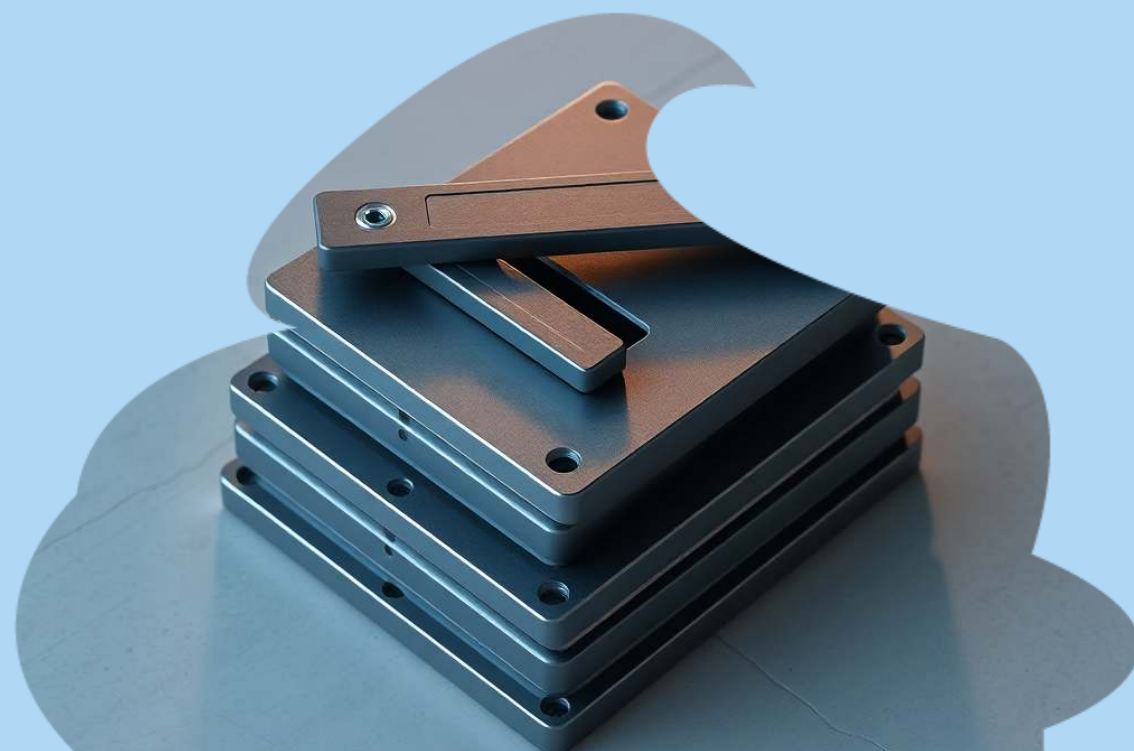
Теорема о рациональных корнях часто служит первым шагом перед применением теоремы Безу. Она помогает быстро выделить вероятные корни и перейти к делению многочлена.

Как последовательно раскладывают многочлен



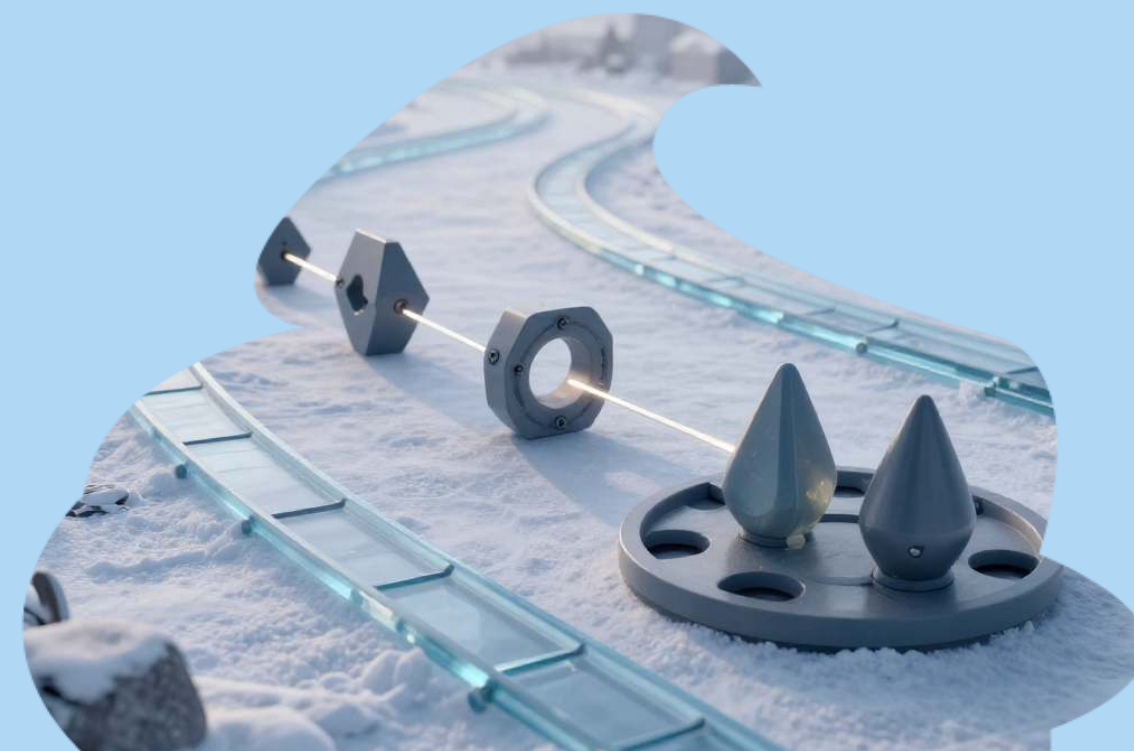
Один корень — один шаг к упрощению

Сначала проверяют число, которое может быть корнем, и находят значение многочлена. Если оно равно нулю, появляется множитель $x-a$, а исходное выражение становится короче и удобнее для дальнейших действий.



Деление открывает следующий уровень

После выделения множителя выполняют деление многочлена на $x-a$. Степень уменьшается на единицу, поэтому новая запись выглядит проще, а список возможных корней становится уже и понятнее.



Цепочка множителей ведёт к ответу

Пошаговое разложение многочлена

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$



Показан короткий путь от проверки корня к полному разложению на множители.



Один найденный корень сразу сокращает степень многочлена, а повторная проверка быстро приводит к полному разложению.



Разбор многочлена $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ по теореме Безу

Шаг	Результат
$P(1)=0$	$x-1$
Деление	x^2-5x+6
$P(2)=0$	$x-2$
Итог	$(x-1)(x-2)(x-3)$

Кратность корня и повторение множителя

Чем больше кратность, тем чаще повторяется множитель $(x-a)$ в разложении многочлена и тем заметнее особое поведение графика в точке корня.

Кратность напрямую связана с числом повторений множителя и помогает отличить простой корень от кратного.

Простой корень Кратность 2
Кратность 3



По форме графика можно быстро понять, пересекает ли он ось Ox или касается её. Это особенно полезно при проверке найденных корней и при поиске кратных решений.

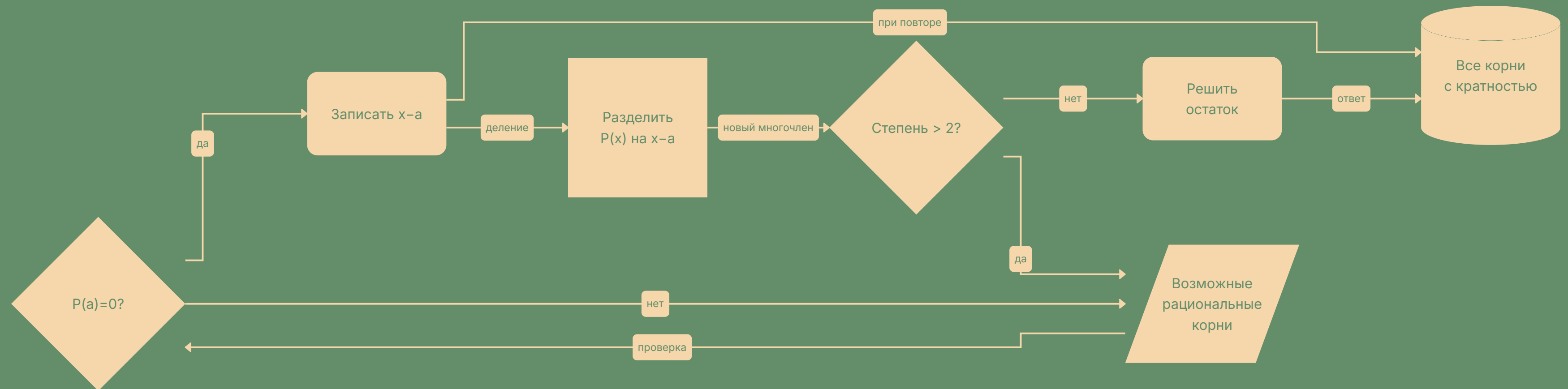
Свойства графика многочлена в окрестности корня

2

основных типа
поведения графика
помогают по виду
кривой предположить
кратность корня.

Как найти все корни многочлена

Последовательность действий основана на проверке кандидатов и многократном понижении степени многочлена.



На что чаще всего ошибаются

$\pm$

Путают знак подстановки

Часто забывают, что в точке a нужно подставлять именно число a , а не менять знак произвольно. Одна неверная скобка сразу даёт ошибочный вывод о корне.

$=$

Смешивают значение и коэффициент

Значение $P(a)$ — это результат подстановки, а не отдельный коэффициент многочлена. Эти понятия легко перепутать, если не записывать вычисления по шагам и без сокращений.

$\div$

Делят на не тот двучлен

Если корень равен a , делить нужно на $x-a$, а не на $x+a$. Ошибка в знаке меняет весь результат и делает дальнейшее разложение неверным.

$\checkmark \equiv$

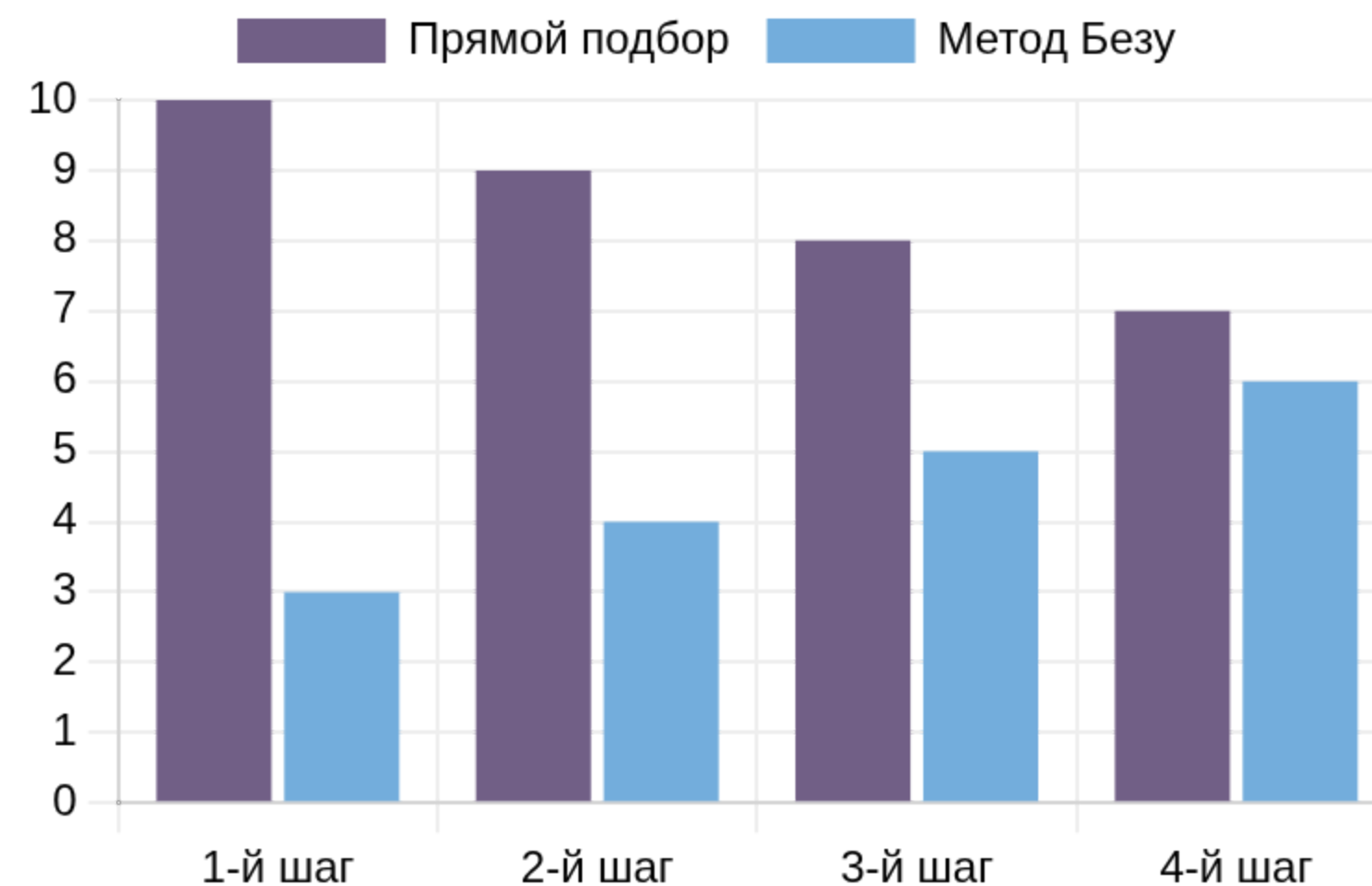
Останавливаются слишком рано

Найти один корень недостаточно: после деления нужно продолжать проверку. Кроме того, важно учитывать кратность, иначе в ответе теряется часть множителей.

Почему метод Безу экономит время

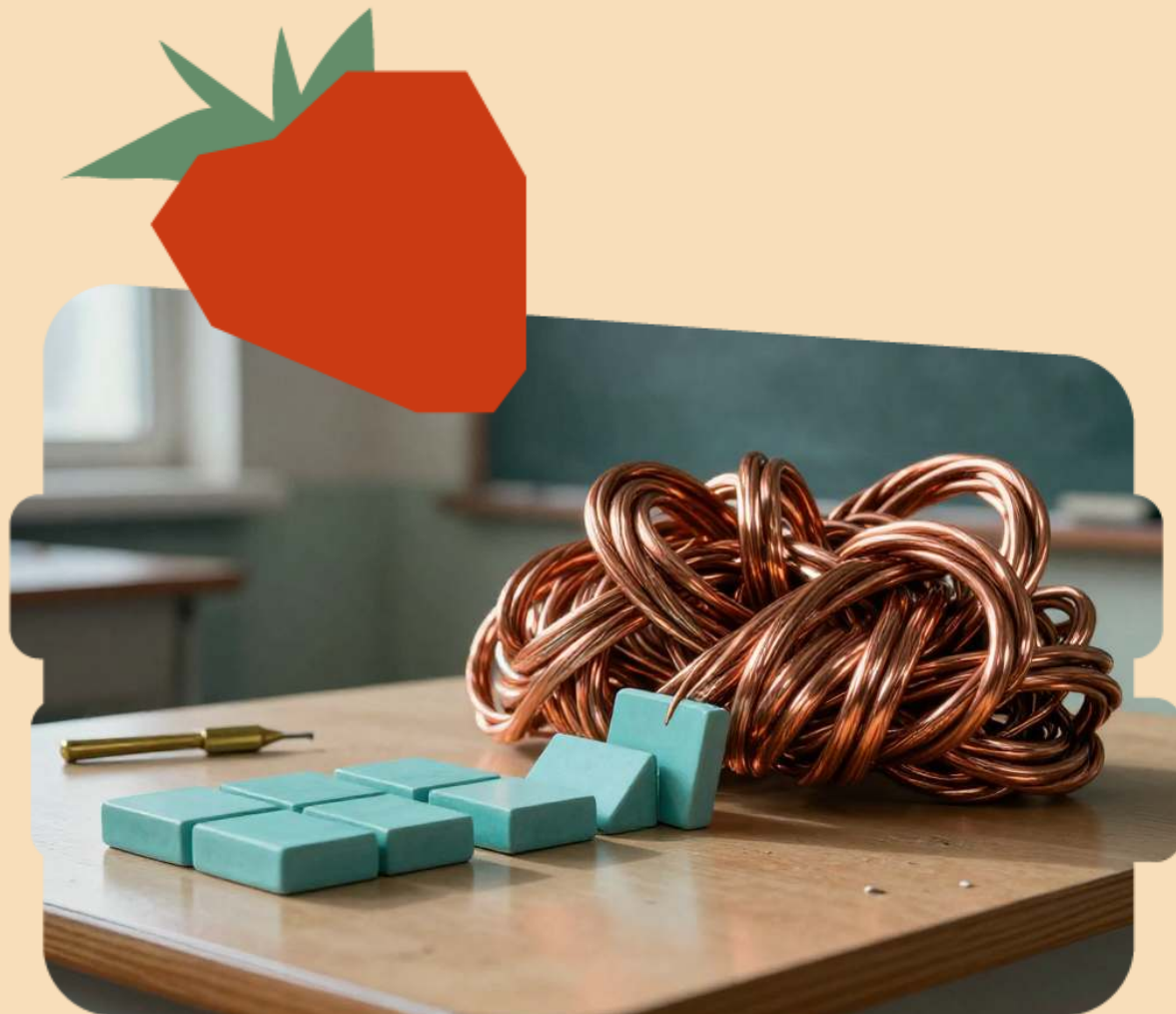
Метод сразу ограничивает круг проверок делителями свободного члена и старшего коэффициента, поэтому работа идёт по заранее понятному плану.

Систематический отбор корней и понижение степени делают решение короче и надёжнее, чем случайный перебор.



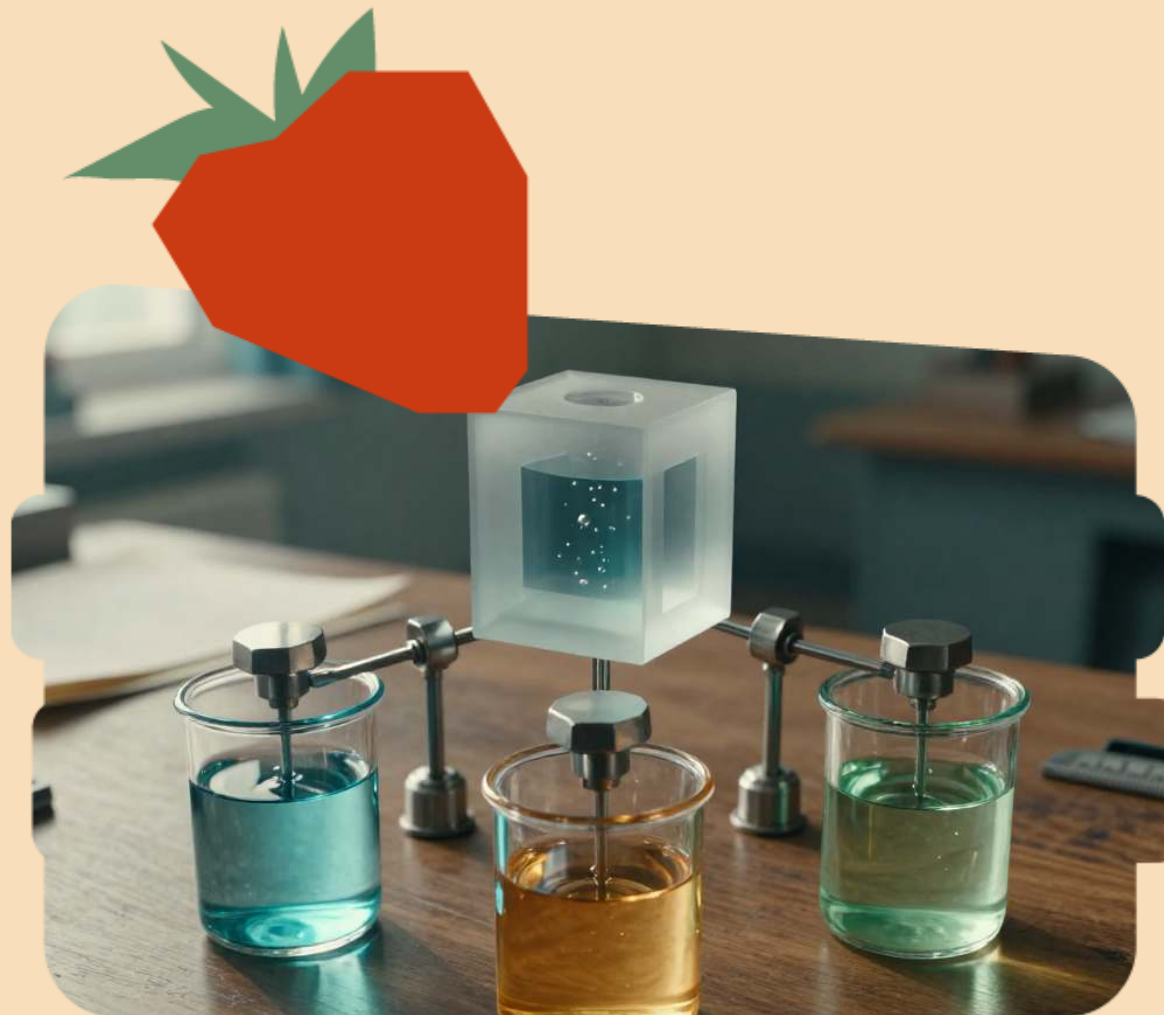
*Сравнение трудоёмкости методов
при решении уравнений с многочленами*

Где теорема Безу становится особенно полезной



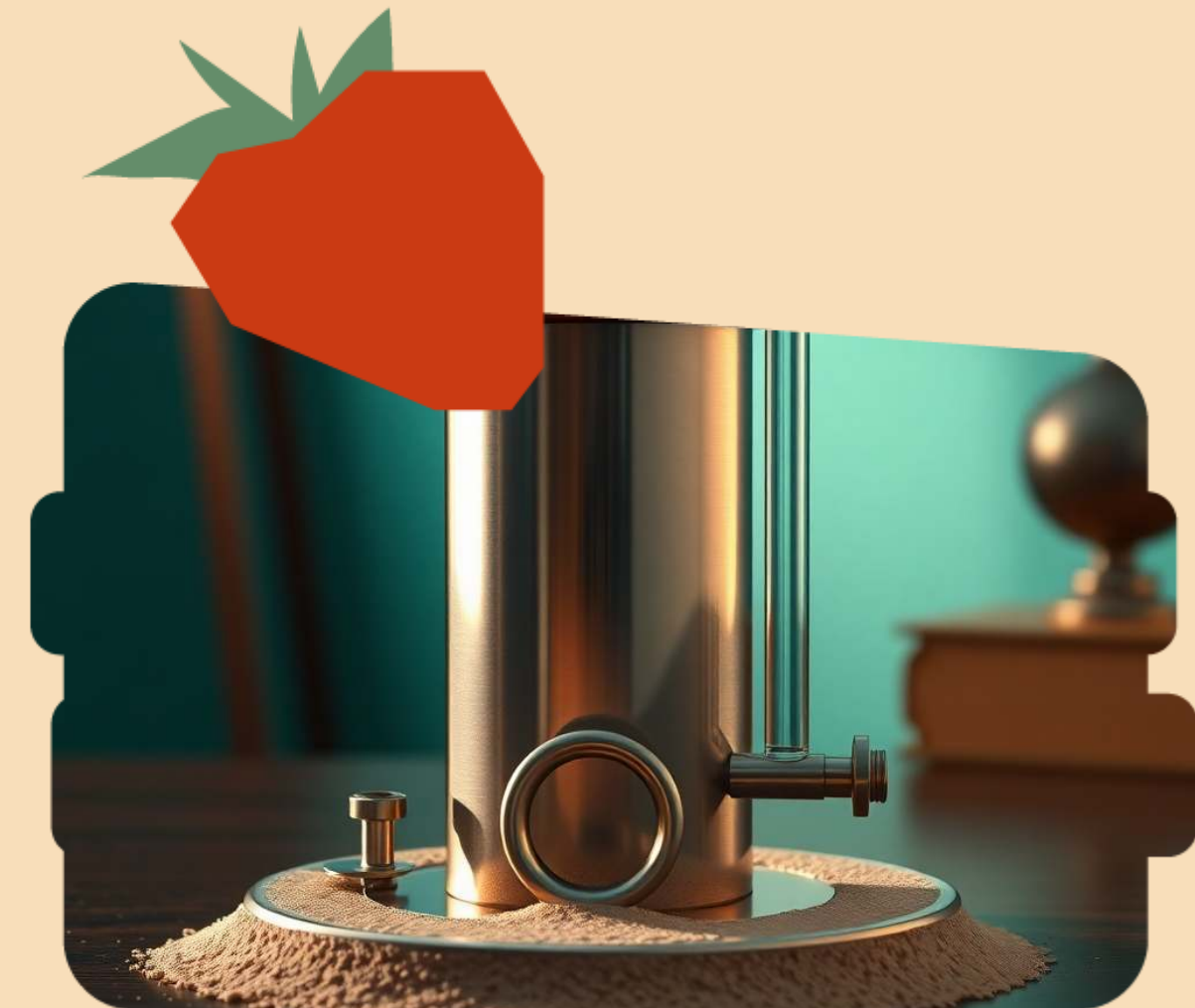
Факторизация вместо громоздких преобразований

Когда многочлен выглядит слишком длинным для прямого разложения, проверка нескольких значений помогает быстро найти первый множитель. После этого задача уже сводится к более простой записи меньшей степени, которую легче довести до конца.



Неизвестные коэффициенты находятся через подстановку

Если в многочлене есть неизвестные числа, удобно подставить такие значения аргумента, при которых известны нули или значения функции. Так возникает система уравнений, позволяющая восстановить вид многочлена без угадывания.



Делимость доказывается через остаток

Теорема Безу особенно удобна в задачах на доказательство делимости. Достаточно показать, что при подстановке нужного числа значение многочлена равно нулю, и сразу следует вывод о наличии делителя $x-a$.

Главные факты о теореме Безу и корнях

Короткая сводка связывает подстановку, делимость и кратность корней в одной схеме.

Одна подстановка одновременно проверяет корень и показывает остаток, а повторяемость множителя раскрывает кратность.

Теорема Безу и следствия о рациональных корнях

Факт	Смысл
$P(a)$	остаток
$P(a)=0$	a — корень
$x-a$ делитель	делимость
$(x-a)^k$	кратность k
p/q	проверка делителей

Теорема Безу превращает проверку в стратегию

Она связывает вычисление значения,
деление многочлена и поиск корней
в единую цепочку. Благодаря этому
уравнения высокой степени решаются
последовательно, а ответ получается точнее
и короче.

