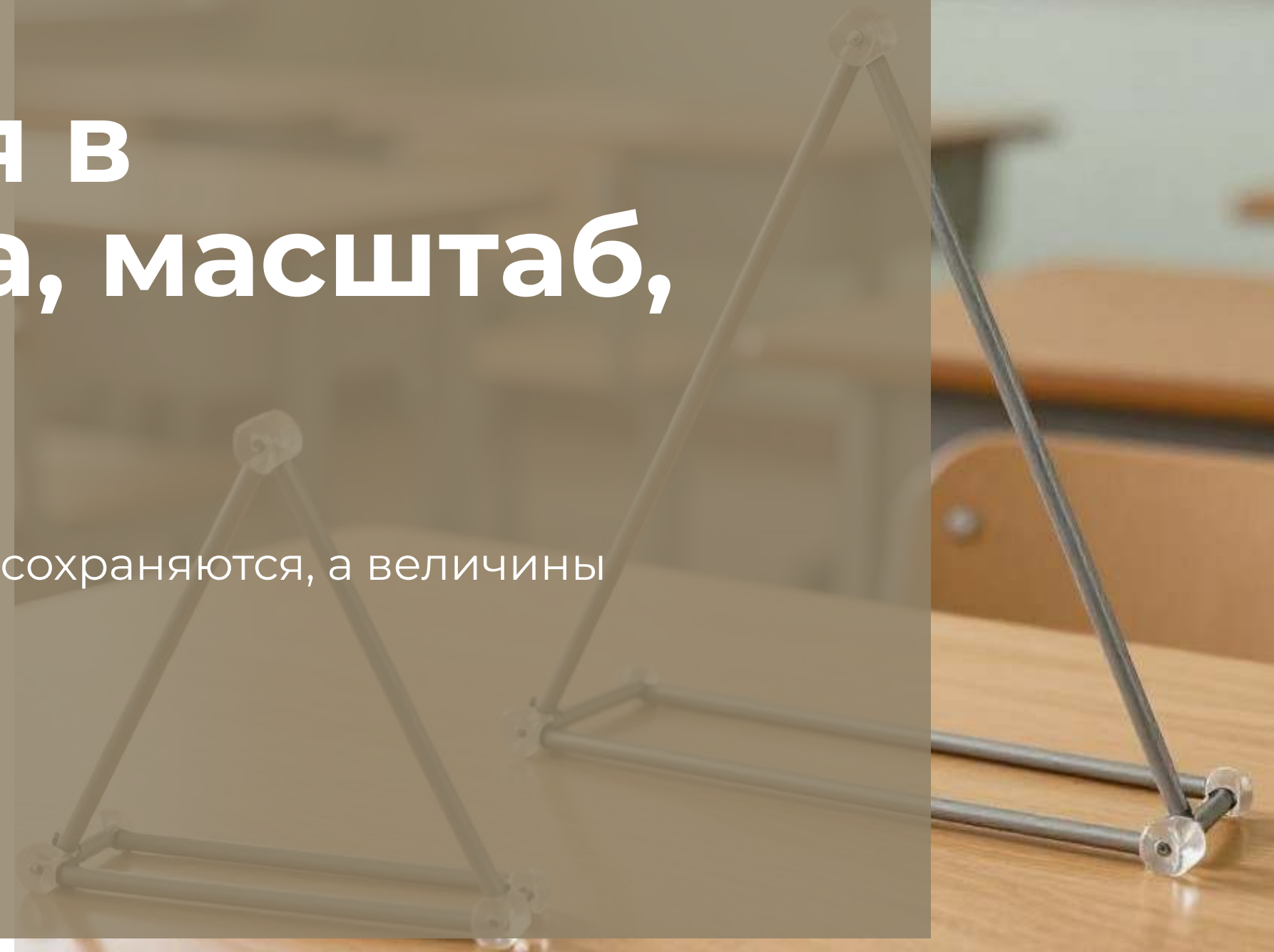


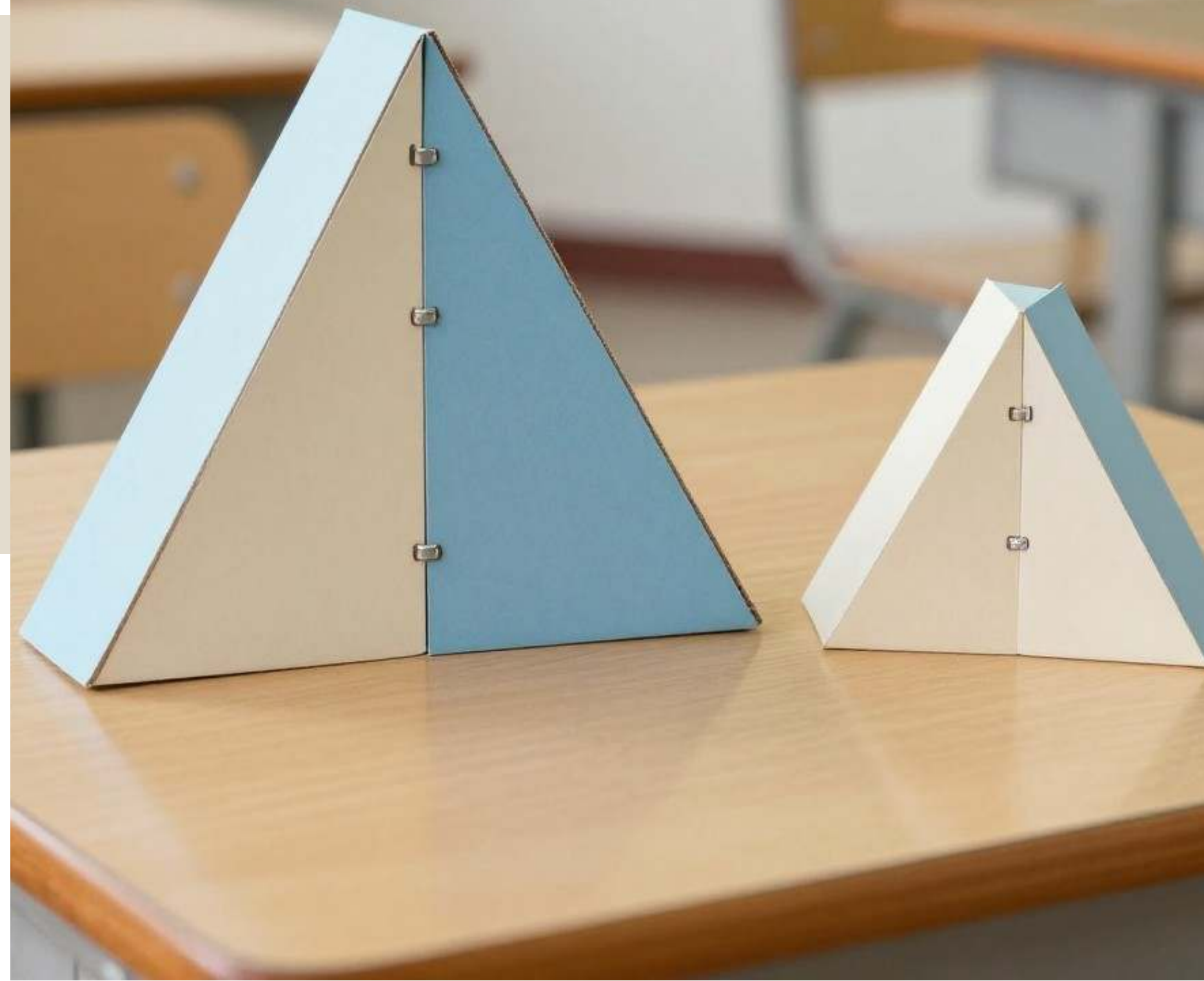
Принцип подобия в геометрии: форма, масштаб, пропорции

Подобие связывает форму и измерения: углы сохраняются, а величины масштабируются в одном отношении.



Место темы в курсе геометрии 11 класса

Подобие изучают после треугольников, пропорций и теорем о параллельных прямых. В 11 классе ключевая опора — подобие треугольников: через него решается большая часть задач. Идея восходит к евклидовой геометрии и практике моделирования реальных объектов; в школе её применяют также в картографии, архитектуре и черчении.



$$k > 1$$

Такое соотношение означает, что одна фигура является увеличенной копией другой.

Школьный курс геометрии (тема «Подобие фигур»).

Фигуры подобны, если их соответствующие углы равны, а стороны пропорциональны. Коэффициент подобия k показывает, во сколько раз меняется масштаб.

Признаки подобия треугольников

По ограниченному набору данных можно доказать подобие треугольников, не сравнивая все элементы напрямую.

Обычно достаточно проверить либо углы, либо комбинации углов и сторон, либо пропорциональность всех трёх сторон — это ускоряет доказательства в задачах.

Признак подобия	Что достаточно проверить
По двум углам	Два равных угла
По двум сторонам и углу между ними	Стороны пропорциональны + включённый угол
По трём сторонам	Три стороны пропорциональны

Как меняются длины, площади и объёмы при масштабе

Когда линейный масштаб меняется в k раз, площади меняются заметно сильнее, а объёмы — ещё сильнее, поэтому «визуальная» оценка часто обманывает.

Три масштаба развиваются по разным законам: линейный — k , площадной — k^2 , объёмный — k^3 . Это помогает правильно переводить размеры с модели на реальность.

Школьный курс геометрии, тема «Подобие и масштаб».

Смысл коэффициента подобия

Коэффициент подобия k связывает соответствующие линейные величины двух подобных фигур: стороны, отрезки, высоты и другие размеры. Именно он переводит измерения с одной фигуры на другую.

Если $k > 1$, исходная фигура «увеличивается»: все линейные величины растут пропорционально. При $0 < k < 1$ фигура уменьшается, и линейные размеры уменьшаются в том же отношении.

Коэффициент подобия действует по-разному на разные характеристики. Площади масштабируются как k^2 , а объёмы — как k^3 , поэтому нельзя подменять площадной масштаб линейным и наоборот.

Подобие в моделях, чертежах и масштабе



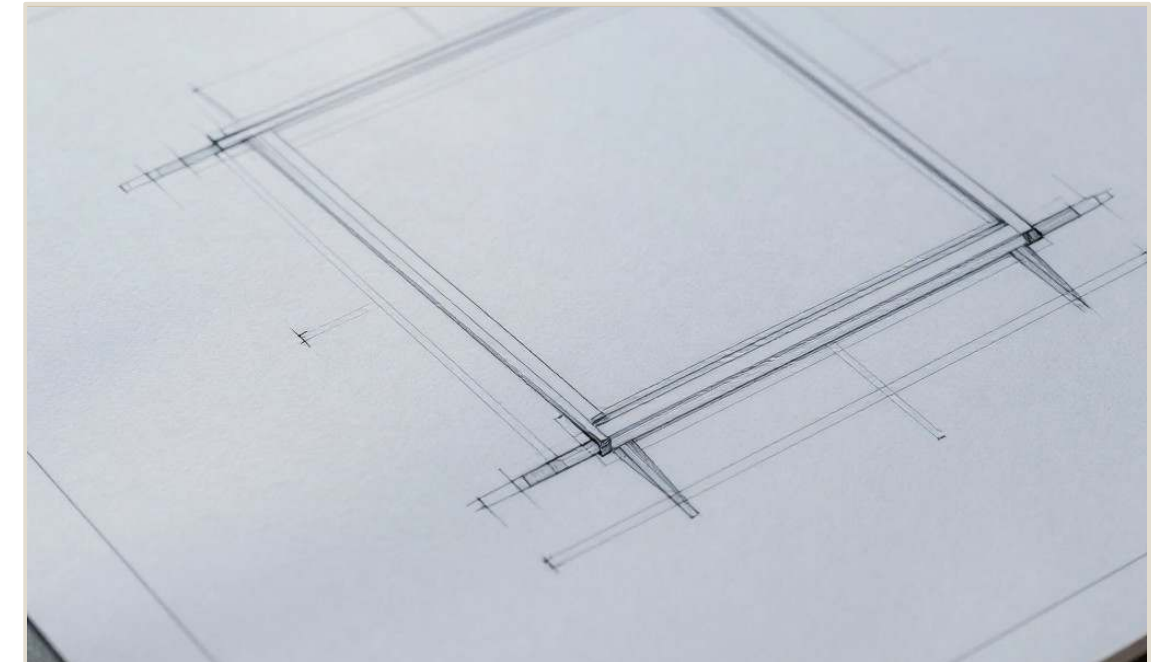
Макет здания и реальные пропорции

По уменьшенной модели можно сохранить общую форму: согласуются этажность и расположение элементов. Если известен масштаб макета, по нему рассчитывают реальные размеры отдельных частей — например, ширину окон или высоту выступов.



Географическая карта как «уменьшённая КОПИЯ»

Карта переносит большие расстояния в удобный формат, сохраняя геометрическую схожесть ориентиров. При выборе масштаба 1:500 или 1:1000 легко перейти от расстояния на карте к реальному расстоянию на местности.

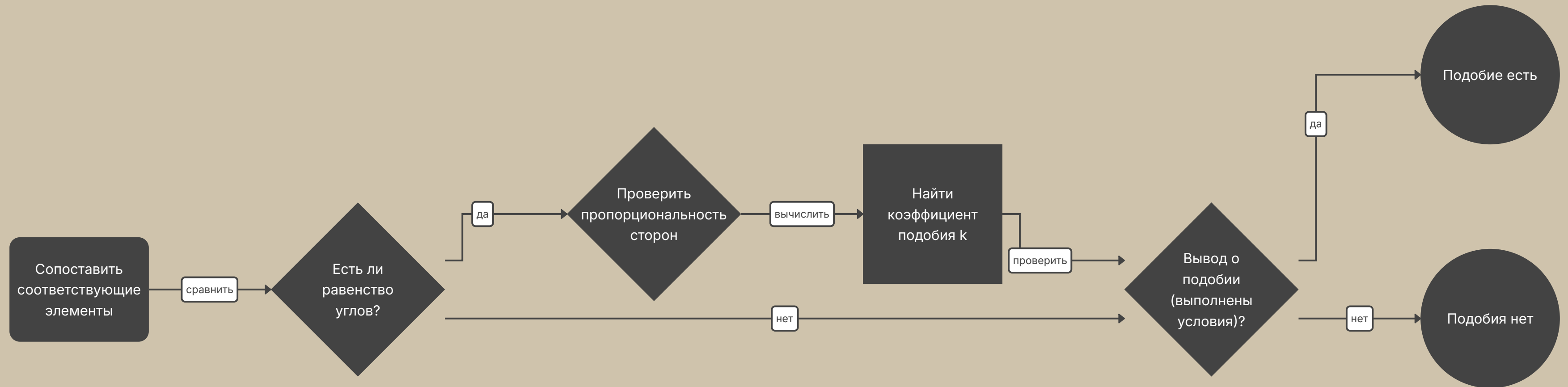


Технический чертёж и измерения по модели

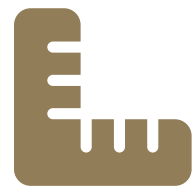
В чертежах подобие помогает читать размеры через пропорции. Даже без прямого выхода к реальному объекту измеряют отрезки на схеме и пересчитывают их в нужные величины, опираясь на коэффициент масштаба.

Алгоритм проверки подобия фигур

Логика проверки: сначала сопоставить элементы, затем подтвердить условия для подобия, а при нехватке данных — использовать признаки треугольников.



Подобие и периметр



Периметры масштабируются линейно

Для подобных фигур периметры относятся так же, как соответствующие стороны: $P_1/P_2 = k$. Поэтому по одной паре длин можно пересчитать весь контур.



При $k = 2$ периметр растёт в 2 раза

Если коэффициент подобия равен 2, то каждый линейный отрезок увеличивается в 2 раза, а значит и суммарная длина по контуру тоже увеличивается в 2 раза.



При $k = 0,5$ периметр уменьшается в 2 раза

Когда $k = 0,5$, все соответствующие стороны уменьшаются вдвое. Соответственно уменьшается и периметр: во сколько раз изменяются стороны, во столько же меняется и P .

Как изменяются величины у подобных фигур

Сводная таблица масштабов: какие показатели меняются, а какие сохраняют значение при подобии.

Величина	Как меняется
Длины и периметр	в k раз
Площади	в k^2 раз
Объёмы	в k^3 раз
Углы	не изменяются

Частая ошибка — перепутать линейный и площадной масштаб. Чтобы избежать её, всегда проверяйте, какая величина считается: длина, площадь или объём.

Задачи, в которых используется подобие треугольников

01

Подобные треугольники помогают находить недоступные высоты, расстояния и размеры, не измеряя их напрямую. Вы сопоставляете «малый» и «большой» треугольники и переносите пропорции между сторонами.

02

Типичные сюжеты: тень дерева в разное время дня, ширина реки по наблюдаемым углам, расстояние до объекта по линиям визирования, размеры фигур на чертеже по известным отрезкам.

03

Алгоритм решения почти всегда один: выделить два подобных треугольника, записать отношения соответствующих сторон и затем вычислить нужную величину через коэффициент подобия.

Что сохраняется и что изменяется при подобии

В подобных фигурах углы не меняются, а численные характеристики «растут» с разной скоростью в зависимости от того, что именно измеряют.

Диаграмма показывает: масштаб линейных величин задаётся степенью k^1 , площади — k^2 , объёмы — k^3 . Это помогает избегать типичных ошибок при решении задач.

Школьный курс геометрии, тема «Подобные фигуры и масштаб» (обобщённые законы масштабирования), без привязки к конкретному источнику.

Подобие в природе и окружающем мире: два визуальных наблюдения



Листья разной величины: одинаковая «геометрическая идея»

На ветке можно заметить листья разных размеров, но с похожими контурами и внутренним «рисунком» жилок. В природе подобие часто не строгое: формы слегка искажаются ростом и условиями среды. Однако общая закономерность читается как масштабирование одной фигуры.



Снежинки и кристаллы: закономерность формы в разных масштабах

Снежинки и некоторые кристаллы визуально напоминают друг друга по структуре, хотя размеры отличаются. При всей уникальности отдельных узоров можно увидеть повторяемые элементы формы. Геометрическое подобие помогает описывать такие наблюдения, связывая форму и размер без лишних измерений.

Подобие в координатной плоскости

Мысленно фиксируем центр масштабирования

Рассмотрим начало координат как точку, относительно которой «раскрывается» фигура. Подобие здесь удобно трактовать как преобразование с общим центром.

Смотрим, как меняются расстояния и контуры

После масштабирования отрезки между соответствующими точками растут пропорционально k . Это позволяет анализировать графики и чертежи через понятие коэффициента подобия.

Умножаем координаты на k

Если каждую точку (x, y) преобразовать в (kx, ky) , то фигура увеличится или уменьшится в k раз, сохраняя форму. Равенство соответствующих углов сохраняется автоматически.

Типичные ошибки при решении задач на подобие

Контрольный алгоритм проверки перед вычислениями (шаги соответствия и масштабов).



Равные и подобные фигуры: в чём разница

Таблица сопоставляет ключевые свойства. Она помогает не смешивать равенство (совпадение по форме и размеру) с подобием (совпадение по форме при изменённом масштабе).

Различие сводится к масштабу: равные фигуры соответствуют $k=1$, а подобные допускают любой положительный k . Это напрямую влияет на то, какие величины можно приравнивать.

Признак	Равные фигуры	Подобные фигуры
Форма	совпадает	совпадает
Размер	совпадает	может изменяться
Коэффициент подобия	$k = 1$	$k > 0$ (произвольный)
Углы	равны	равны

Школьный курс геометрии, базовые определения равенства и подобия.

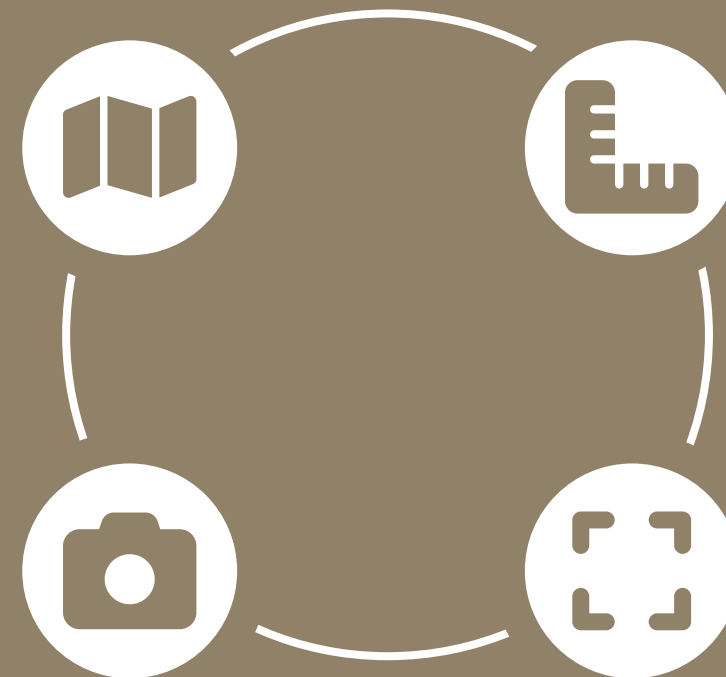
Подобие в картографии и измерениях на местности

Масштаб карты

На карте расстояния уменьшаются по фиксированному масштабу. Измерив на бумаге отрезок, вы получаете реальную длину, применяя одинаковое соотношение ко всем направлениям.

Аэрофотосъёмка и спутниковые снимки

Съёмка переводит реальные размеры в уменьшенное изображение. При сопоставлении объектов по форме можно использовать пропорции, чтобы судить о размерах без прямых измерений на местности.



Планы и навигационные схемы

План местности сохраняет форму маршрутов и соотношения сторон, хотя размеры меняются. Поэтому по схеме можно оценивать протяжённость участков и ориентироваться в пространстве.

Измерение крупных объектов по моделям

Когда предмет слишком велик или опасно измерять напрямую, используют модель. Подобие позволяет переносить линейные соотношения, а значит — вычислять расстояния через уменьшенные копии.

Рост линейных размеров, площадей и объёмов

При увеличении модели в k раз линейные размеры растут пропорционально k , а площадь «набирает» квадратный множитель. Объём увеличивается ещё быстрее, по закону k^3 .

Сравнение множителей показывает, что удвоение масштаба не даёт «удвоение всего»: площадь становится в четыре раза больше, а объём — в восемь раз. Это объясняет разницу между расчётом поверхности и вместимости.

Школьный курс геометрии, законы масштабирования подобных фигур: $S \propto k^2$, $V \propto k^3$. Дата не применима (теоретический расчёт).

Основные формулы и приёмы решения

1 Для подобных фигур соответствующие линейные величины относятся как один и тот же коэффициент k : $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2 = k$. Это отправная точка для вычислений.

2 Периметры изменяются с тем же коэффициентом: $P_1/P_2 = k$. Поэтому, найдя k по двум сторонам, легко перенести результат на весь контур треугольников или многоугольников.

3 Площади и объёмы растут иначе: $S_1/S_2 = k^2$, $V_1/V_2 = k^3$. Если в задаче перепутать степени, ответ получается неверным даже при верно найденном k .

4 Если требуется доказать подобие, отдельно проверяют углы и пропорции сторон. В практических задачах сначала находят k по известной паре соответствующих отрезков, затем применяют формулы к остальным величинам.

Итоги темы: почему принцип подобия важен

Принцип подобия связывает форму, масштаб и измерения в единую систему. Он нужен для доказательств и вычислений в планиметрии, для работы с чертежами, картами и моделями, превращая сложные измерения в задачи о пропорциях.