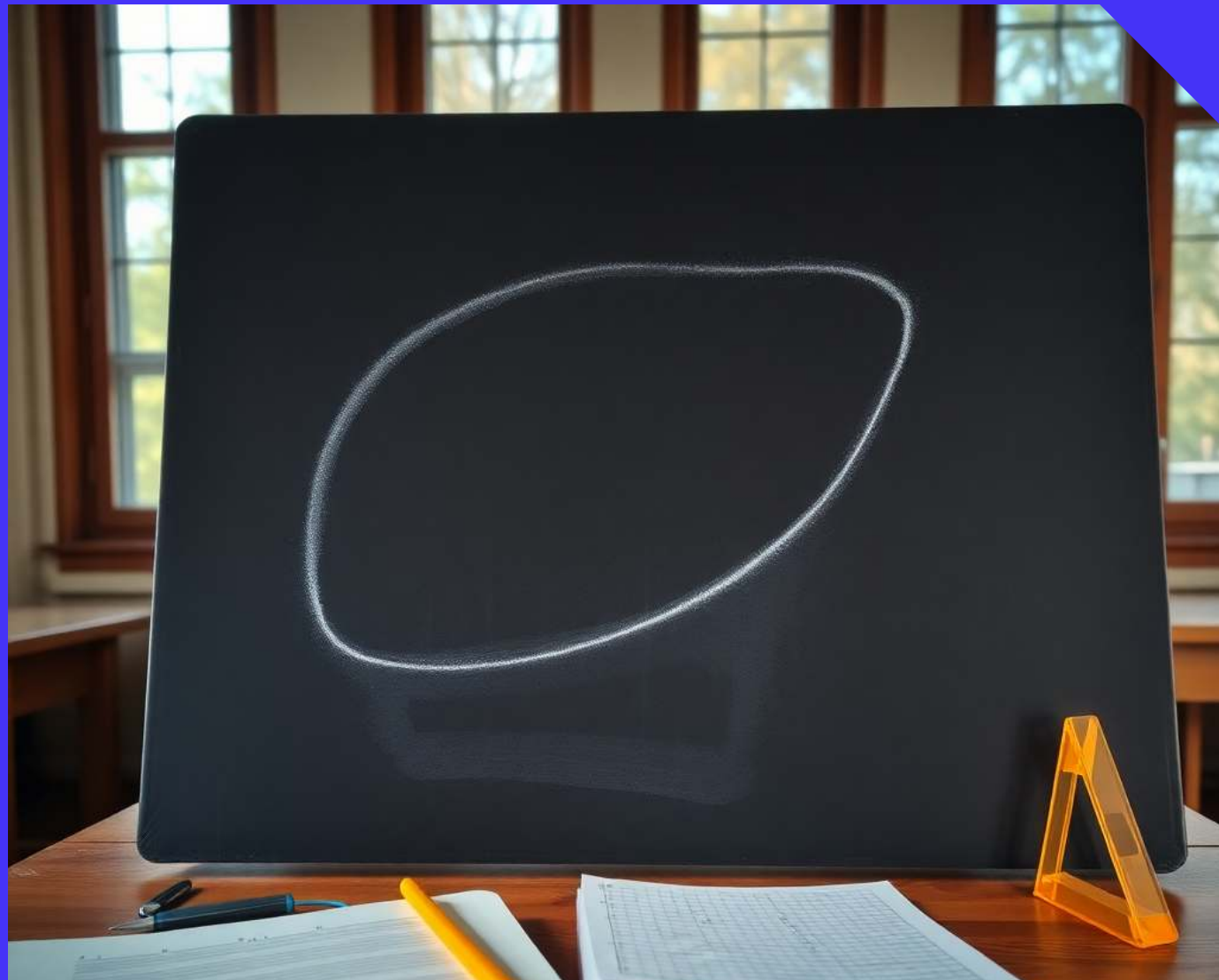


Решение квадратных • неравенств

Парабола, корни и промежутки знаков



Эта тема помогает находить допустимые значения переменной в задачах на движение, площадь, прибыль и ограничения. Она опирается на квадратные уравнения и учит выбирать ответ по знаку выражения на числовой прямой.

Зачем нужны квадратные неравенства в 9 классе

Общий вид квадратного неравенства

Стандартная запись

Квадратное неравенство записывают как $ax^2 + bx + c > 0$, < 0 , ≥ 0 или ≤ 0 . Здесь a не равно нулю, иначе выражение перестает быть квадратным.

Роль коэффициентов

Коэффициенты a , b и c определяют форму параболы и её положение на плоскости. От них зависит, где график поднимается, опускается и пересекает ось x .

Что нужно найти

Знак неравенства подсказывает, какие значения x подходят: при каких x выражение положительно, отрицательно или обращается в ноль. Именно эти значения и составляют ответ.

Связь с уравнением

Чтобы решить неравенство, сначала изучают соответствующее уравнение $ax^2 + bx + c = 0$. Его корни делят числовую прямую на промежутки, где знак выражения не меняется.

Связь с графиком функции

Парабола

График функции $y = ax^2 + bx + c$ всегда является параболой. По её виду удобно понять поведение выражения и выбрать нужные промежутки решения.

Направление ветвей

Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх. Если $a < 0$, ветви направлены вниз. Это сразу показывает, где выражение будет положительным или отрицательным.

Нули функции

Точки, в которых график пересекает ось x , называются нулями функции. В этих точках значение выражения равно нулю, а значит, они совпадают с корнями уравнения.

Области решения

Решение неравенства — это те участки графика, где он расположен выше оси x или ниже неё. По графику легко увидеть, какие значения x подходят.

Роль дискриминанта

01

Сначала уравнение

Чтобы решить неравенство, сначала находят корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Без них нельзя разделить числовую прямую на нужные промежутки.

02

Формула D

Дискриминант вычисляют по формуле $D = b^2 - 4ac$. Он показывает, сколько корней имеет квадратное уравнение, а значит, сколько точек нужно отметить на прямой.

03

Три возможных случая

Если $D > 0$, уравнение имеет два корня. Если $D = 0$, корень один. Если $D < 0$, корней нет, и график не пересекает ось x .

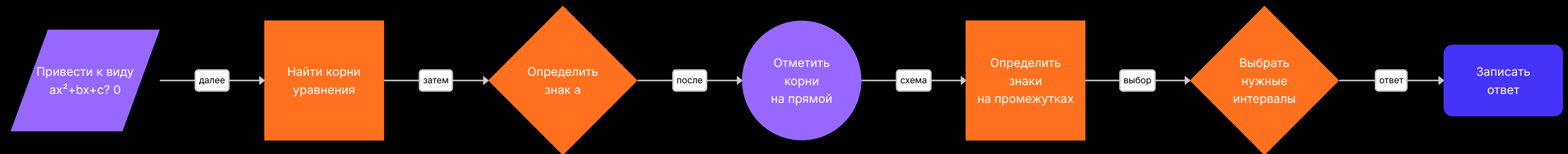
04

Что это даёт

От числа корней зависит, на сколько промежутков делится числовая прямая и как распределяются знаки выражения. Поэтому дискриминант помогает заранее выбрать способ решения.

Алгоритм решения квадратного неравенства

Последовательность действий при работе с квадратным выражением и числовой прямой



Случай двух корней

Два корня

При $D > 0$ квадратное уравнение имеет два разных корня x_1 и x_2 . Они делят числовую прямую на три промежутка, которые нужно рассмотреть отдельно.

Если $a > 0$

Когда коэффициент a положителен, парабола направлена вверх. Тогда выражение положительно вне корней и отрицательно на промежутке между ними.

Если $a < 0$

При отрицательном a парабола направлена вниз. В этом случае знак распределяется наоборот: отрицательно снаружи и положительно между корнями.

Зачем это знать

Такой способ позволяет быстро определить ответ без подробного построения графика. Достаточно помнить порядок знаков и аккуратно выбрать нужные промежутки.

Случай одного корня

Одна точка касания

При $D = 0$ график касается оси x в одной точке x_0 . В этой точке значение выражения равно нулю, а по обе стороны знак не меняется.

Если $a > 0$

Когда a положителен, парабола направлена вверх. Тогда выражение неотрицательно на всей числовой прямой и обращается в ноль только в точке x_0 .

Если $a < 0$

Если a отрицателен, парабола направлена вниз. В этом случае выражение неположительно на всей числовой прямой и равно нулю только в точке касания.



Три случая по дискриминанту

Таблица показывает, как число корней связано с видом графика и распределением знаков квадратного выражения.

Число корней и знак коэффициента a помогают быстро понять, где выражение положительно или отрицательно.

D	Корней	График	Знаки
$D > 0$	2	Пересекает	Меняются
$D = 0$	1	Касается	Не меняются
$D < 0$	0	Не пересекает	Постоянны

Курс алгебры 9 класса

Числовая прямая и интервалы



Промежутки

Корни делят числовую прямую на участки, где знак квадратного выражения остаётся постоянным. Поэтому решение удобно искать не по отдельным числам, а по промежуткам.



Нестрогие знаки

При знаках $\geq$ и $\leq$ корни входят в решение, если в них выражение равно нулю. Тогда используют квадратные скобки и включают границы в ответ.



Строгие знаки

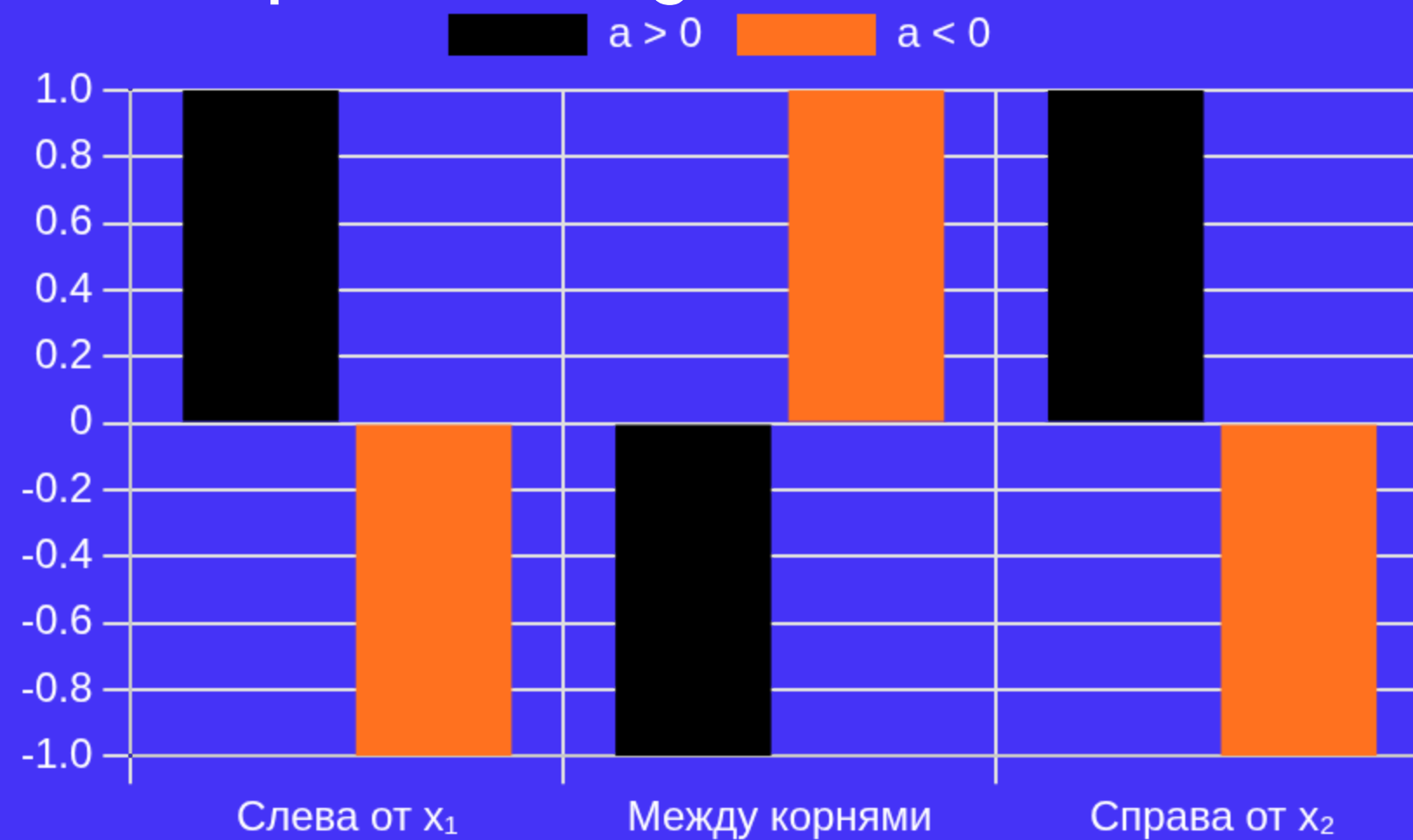
При знаках $>$ и $<$ корни не входят в ответ. Их отмечают пустыми точками, а решение записывают с круглыми скобками, показывая открытые промежутки.



Аккуратная запись

После выбора нужных участков важно записать ответ без пропусков и ошибок в скобках. Это помогает точно показать, какие значения переменной подходят.

Знаки квадратного выражения на промежутках



Знак меняется только при переходе через корни, поэтому достаточно знать их порядок и направление ветвей параболы.

Для двух корней схема знаков сразу показывает нужные промежутки без подробного построения графика.

Пример: $x^2 - 5x + 6 > 0$

Разложение на множители

Запишем выражение в виде произведения: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Так сразу видно, что нули функции — это 2 и 3.

Знак коэффициента

Коэффициент при x^2 положительный, значит ветви параболы направлены вверх. Поэтому вне корней выражение положительное, а на отрезке между ними — отрицательное.

Выбор промежутков

Нужно оставить только те части числовой прямой, где значение больше нуля. Подходят промежутки слева от 2 и справа от 3, без самих корней.

Ответ

Итоговая запись решения: $x < 2$ или $x > 3$. На числовой прямой это два открытых промежутка, разделённых точками 2 и 3.

Разложение $(x - 2)^2$; школьная алгебра 9
класса

1

точка является единственным решением
этого неравенства.

Квадратное выражение обращается
в ноль только при одном значении x ,
поэтому решение не образует
промежуток.

Случай, когда корней нет

01

Нет пересечений

Если дискриминант отрицателен, уравнение не имеет действительных корней, а парабола не пересекает ось x . Это сразу показывает, что знак выражения не меняется.

02

Парабола выше оси

При $a > 0$ ветви направлены вверх, и весь график лежит выше оси x . Значит, выражение всегда положительно, а для нестрогого неравенства подходит вся числовая прямая.

03

Парабола ниже оси

При $a < 0$ ветви направлены вниз, и график целиком расположен ниже оси x . В этом случае выражение всегда отрицательно, поэтому ответ зависит от знака неравенства.

04

Какой ответ возможен

Для строгого знака может получиться пустое множество, а для нестрогого — все действительные числа. Выбор определяется тем, требуется ли положительность или неположительность выражения.

Типичные ошибки при решении

Чаще всего ошибки связаны не с вычислениями, а с выбором знаков и промежутков. Таблица помогает быстро проверить себя.

Верный порядок действий важнее скорости: корни, знак параболы, промежутки и только потом запись ответа.

Ошибка	Причина	Правильное действие
Не учли a	Смотрят только на корни	Определить знак параболы
Путают знаки	Не читают неравенство	Сравнить с $>$, $<$, $\geq$, $\leq$
Ошибки на прямой	Неверно отмечают корни	Аккуратно нанести точки
Нет проверки	Не подставляют числа	Проверить каждый промежуток

Типовые ошибки в школьных работах по алгебре

Проверка полученного ответа



Точный ответ

Если проверка совпадает с неравенством, выбранные интервалы записаны верно. Это помогает избежать ошибок в границах и убедиться, что корни учтены правильно.



Подстановка числа

Возьмите по одному числу из каждого промежутка и подставьте в выражение. Такой быстрый тест показывает, где значение действительно имеет нужный знак.

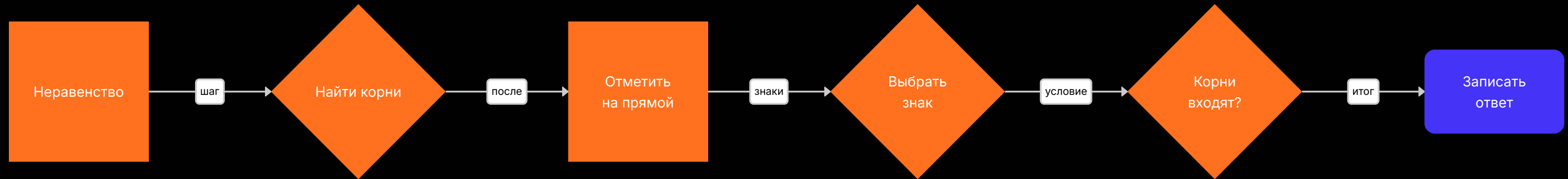


Особые случаи

Проверка особенно полезна при дробных корнях и отрицательном коэффициенте a . В этих задачах легко перепутать расположение знаков без дополнительного контроля.

Как выбрать нужные промежутки ответа

Последовательность шагов при решении квадратного неравенства по корням и знакам на числовой прямой.



Где применяются квадратные неравенства

Размеры и границы

Такие неравенства помогают определить, при каких значениях длины, ширины или высоты условие задачи остаётся выполненным. Это важно, когда нужно уложиться в допустимые размеры.

Движение и время

В задачах на движение квадратные выражения появляются после составления формулы и переноса всех членов в одну часть. Затем находят те значения времени, которые подходят по смыслу.

Площадь и прибыль

В текстовых задачах квадратное неравенство часто описывает, когда площадь, выручка или прибыль остаются положительными. Решение показывает, какие значения переменной допустимы.

Условие «в пределах»

Фразы «не меньше», «не больше» и «больше нуля» удобно переводятся на язык неравенств. После этого ответ ищут как набор промежутков на числовой прямой.

Разбор примера $x^2 - x - 6 \leq 0$



Школьный пример по алгебре 9 класса

Средний промежуток включает точки, где выражение равно нулю, поэтому границы -2 и 3 входят в ответ.

Для нестрогого неравенства при $a > 0$ подходит участок между корнями вместе с ними.



Чтобы решить квадратное неравенство, нужно найти корни, определить знак параболы и выбрать подходящие промежутки. Дискриминант подсказывает число корней, а числовая прямая помогает записать ответ точно.

Квадратные неравенства: ключ к ответу