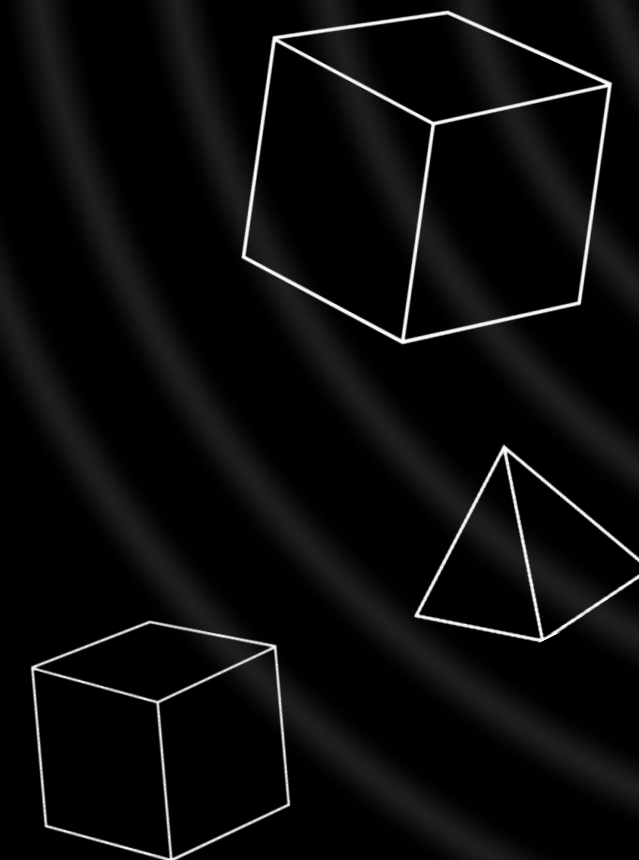


Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями

Научимся приводить дроби к общему знаменателю и считать без ошибок.



Почему эта тема важна

Рациональные дроби помогают записывать выражения с буквами, встречающиеся в формулах и задачах. Главное — уметь приводить разные знаменатели к общему виду, чтобы складывать и вычитать выражения правильно и удобно.



Что такое рациональная дробь

Выражение с буквами

Рациональная дробь состоит из числителя и знаменателя, где могут быть буквы, числа и знаки действий. Она показывает, как значение меняется вместе с переменной.

Ноль в знаменателе

Знаменатель не должен обращаться в ноль, иначе дробь не имеет смысла. Поэтому перед вычислениями всегда проверяют, какие значения переменной нужно исключить заранее.

Пример ограничения

В дроби $1/(x-3)$ нельзя подставлять $x = 3$, потому что знаменатель станет равен нулю. Такие запрещённые значения записывают отдельно от ответа и учитывают при проверке.

Главное правило работы с дробями с разными знаменателями

1

Сначала общий знаменатель

Сложение и вычитание начинают только после приведения дробей к общему знаменателю. Пока знаменатели разные, выполнять действие напрямую нельзя, иначе получится неверный результат.

2

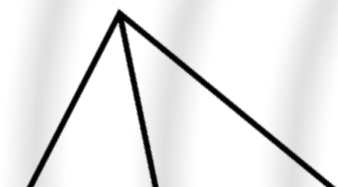
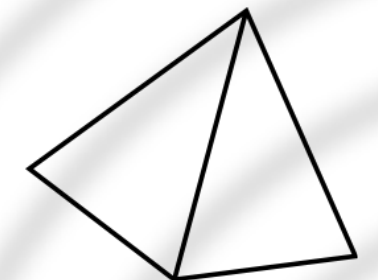
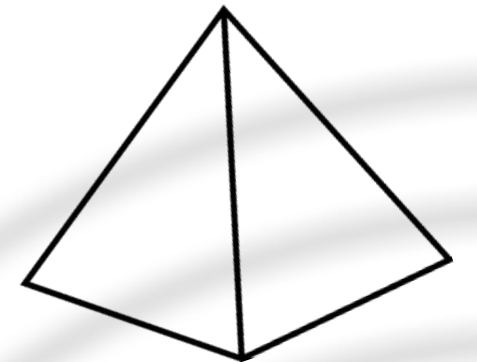
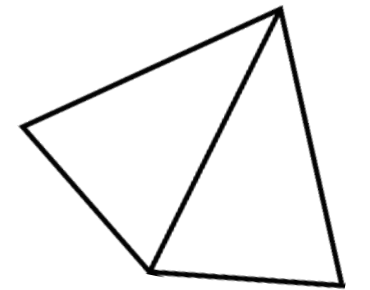
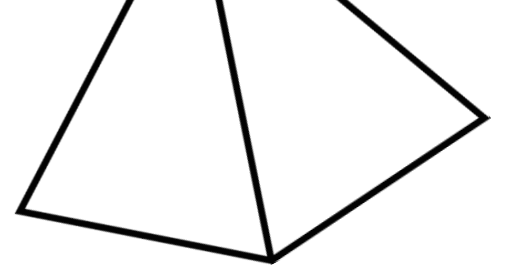
Меняются только числители

После преобразования знаменатель у обеих дробей становится одинаковым. Тогда складывают или вычитают только числители, а общий знаменатель остаётся без изменений.

3

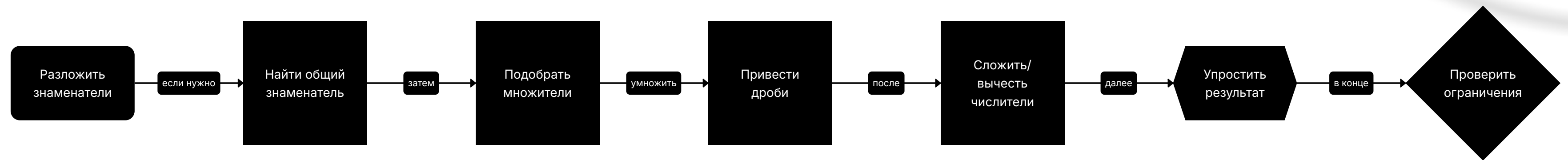
Смысл не меняется

При приведении дроби умножают числитель и знаменатель на одно и то же выражение. Поэтому значение дроби сохраняется, а запись становится удобной для вычислений.

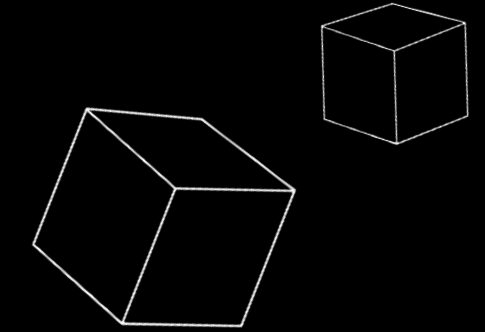


Алгоритм сложения и вычитания рациональных дробей

Последовательность действий помогает не пропустить общий знаменатель, знаки и ограничения переменной.



Как находят общий знаменатель



1

Проверяют делимость

Общий знаменатель выбирают так, чтобы каждый из данных знаменателей делил его без остатка. Это позволяет привести дроби к одной и той же основе для дальнейших действий.

2

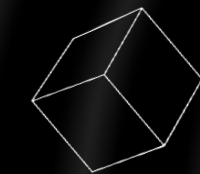
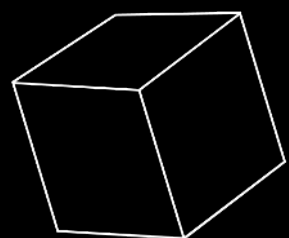
Собирают множители

Для простых выражений общий знаменатель составляют из всех множителей, которые встречаются в исходных знаменателях. Так меньше риск забыть важную часть выражения и ошибиться.

3

Не дублируют повторения

Если одинаковый множитель встречается в обоих знаменателях, его берут один раз или в наибольшей степени. Это делает общий знаменатель короче и удобнее.



Приведение к общему знаменателю на примере

Исходные дроби

Рассмотрим дроби $1/(x+2)$ и $1/(x-3)$. Их знаменатели разные, поэтому сначала нужно найти общий знаменатель, а затем изменить только числители.

Общий знаменатель

Подходящий общий знаменатель — $(x+2)(x-3)$, потому что он содержит оба множителя и делится на каждый исходный знаменатель без остатка.

Дополнительные множители

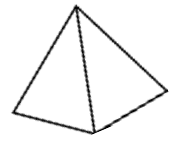
Для первой дроби дополнительным множителем будет $x-3$, а для второй — $x+2$. Именно на них умножают числитель и знаменатель каждой дроби.

Новая запись дробей

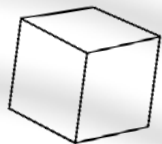
После приведения получаются дроби $(x-3)/((x+2)(x-3))$ и $(x+2)/((x+2)(x-3))$. Теперь их можно складывать или вычитать по общему правилу.



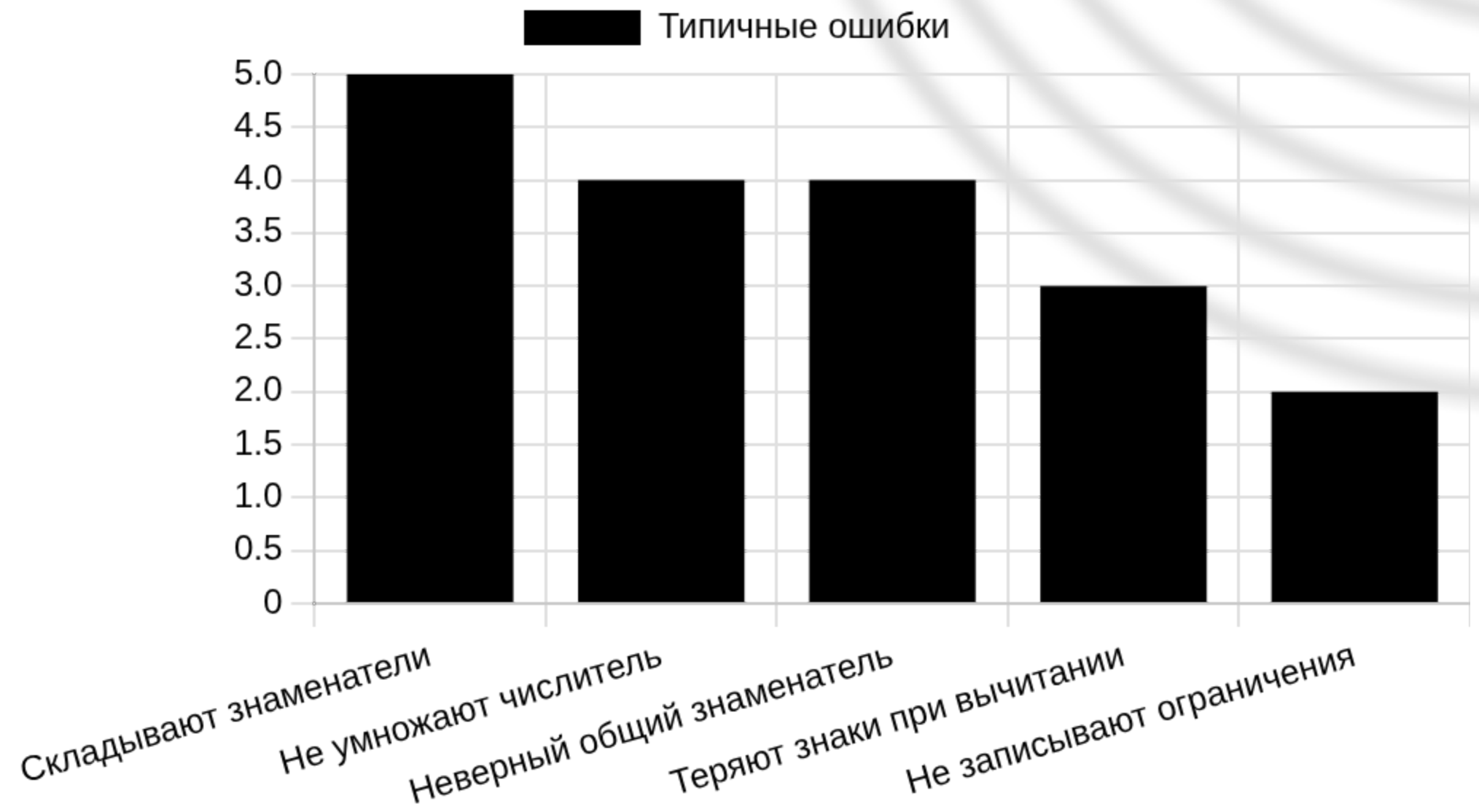
Типичные ошибки при сложении и вычитании дробей



Ошибки чаще появляются на этапе приведения к общему знаменателю и при раскрытии скобок. Особенно внимательно нужно следить за знаками и дробными ограничениями.



Главный риск — работать со знаменателем как с обычным числом. Если соблюдать алгоритм, большинство ошибок легко предотвратить.



Сложение дробей с разными знаменателями

1

Единый знаменатель

После приведения дробей к общему знаменателю знаменатель становится одинаковым. Тогда складывают только числители, а общий знаменатель записывают без изменений.

2

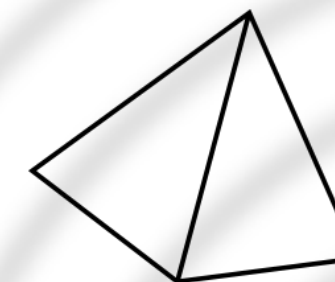
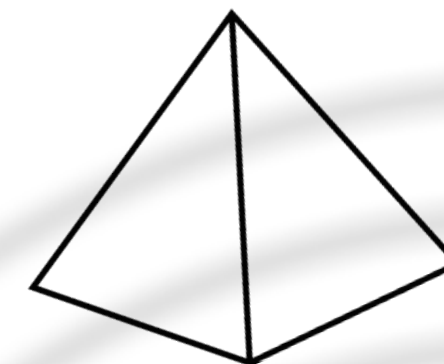
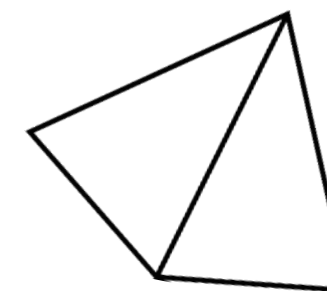
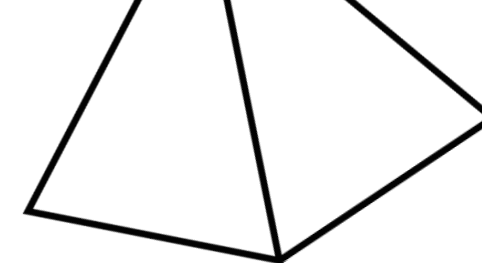
Правило суммы

Если дроби имеют вид a/c и b/c , то их сумма равна $(a+b)/c$. Для рациональных дробей действует тот же принцип, только вместо чисел используются выражения.

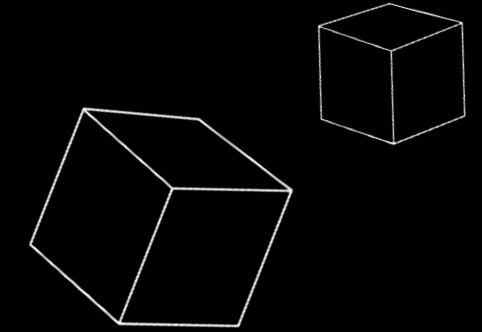
3

Пример с буквами

После приведения $1/(x+2)$ и $1/(x-3)$ складывают выражения $x-3$ и $x+2$ в числителе. Так получается новая дробь с общим знаменателем.



Вычитание дробей с разными знаменателями



1

Сохраняют знаменатель

При вычитании общий знаменатель тоже остаётся общим, а меняется только числитель. Важно не трогать знаменатель после приведения дробей к одному виду.

2

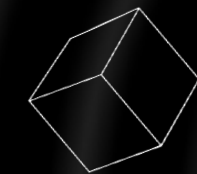
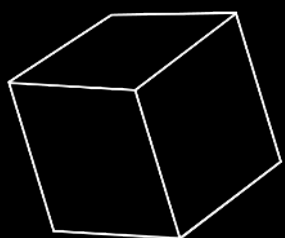
Правильный порядок

Если дроби записаны как $a/c - b/c$, то результат равен $(a-b)/c$. В вычитании порядок особенно важен, потому что он влияет на знак ответа.

3

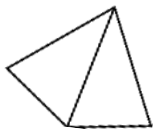
Следят за скобками

Когда в числителе есть несколько слагаемых, каждое из них участвует в вычитании. Поэтому скобки раскрывают аккуратно, чтобы не потерять минус и не изменить выражение.

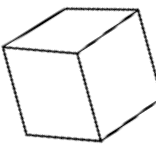


Примеры приведения и вычисления

Пример	Общий знаменатель	Результат
$1/(x+1)+1/(x-1)$	$(x+1)(x-1)$	$2x/((x+1)(x-1))$
$2/(x-2)-1/(x+2)$	$(x-2)(x+2)$	$(x+6)/((x-2)(x+2))$
$3/x+2/(x+3)$	$x(x+3)$	$(5x+9)/(x(x+3))$



Три примера показывают, что общий знаменатель меняет лишь запись дроби, но не её значение. После приведения складывают или вычитают только числители, а затем проверяют ограничения для x .



Во всех трёх случаях вычисление сводится к одному шагу: привести дроби к общему знаменателю. После этого меняется только числитель, а область допустимых значений нужно проверять отдельно.

Зачем сокращать результат

Короткая запись

Сокращение убирает общий множитель из числителя и знаменателя, поэтому ответ становится компактнее и легче читается. Это особенно удобно, когда выражение содержит несколько скобок или длинные многочлены.

Проверка на множители

После вычислений полезно посмотреть, нет ли одинакового множителя в обеих частях дроби. Им может быть число, например 3, или выражение, например $x-2$, если оно встречается и сверху, и снизу.

Ограничения сохраняются

Сокращение не отменяет запреты на значения переменной. Если знаменатель обращался в ноль при некоторых x , эти значения остаются недопустимыми даже после упрощения результата.

Пошаговый пример с буквами

1

1. Найдём общий знаменатель

Для дробей $x/(x-1)$ и $2/(x+1)$ общий знаменатель равен $(x-1)(x+1)$. Он содержит оба множителя и подходит для обеих дробей без изменения их смысла.

2

2. Приведём дроби

Первую дробь умножаем на $x+1$, вторую — на $x-1$. Получаем $x(x+1)/((x-1)(x+1))$ и $2(x-1)/((x-1)(x+1))$. Теперь знаменатели одинаковы, можно переходить к сложению.

3

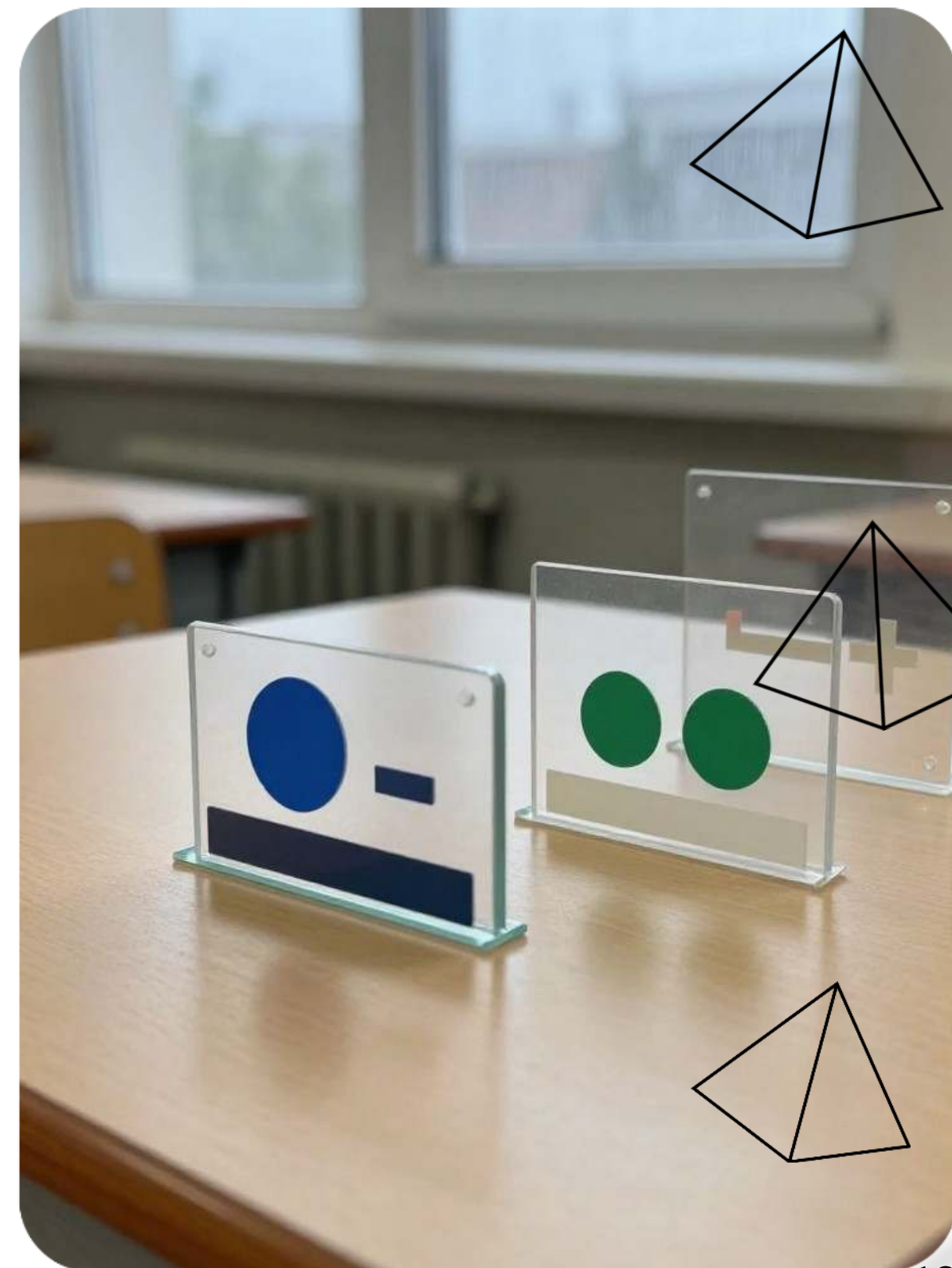
3. Сложим числители

Складываем только верхние части: $x(x+1)+2(x-1)$. После раскрытия скобок выходит $x^2+x+2x-2$, а затем объединяем подобные слагаемые.

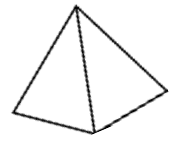
4

4. Запишем ответ

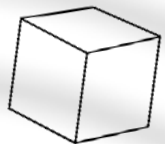
Итоговая дробь имеет вид $(x^2+3x-2)/((x-1)(x+1))$. Перед записью ответа нужно убедиться, что x не равен 1 и -1, чтобы знаменатель не обращался в ноль.



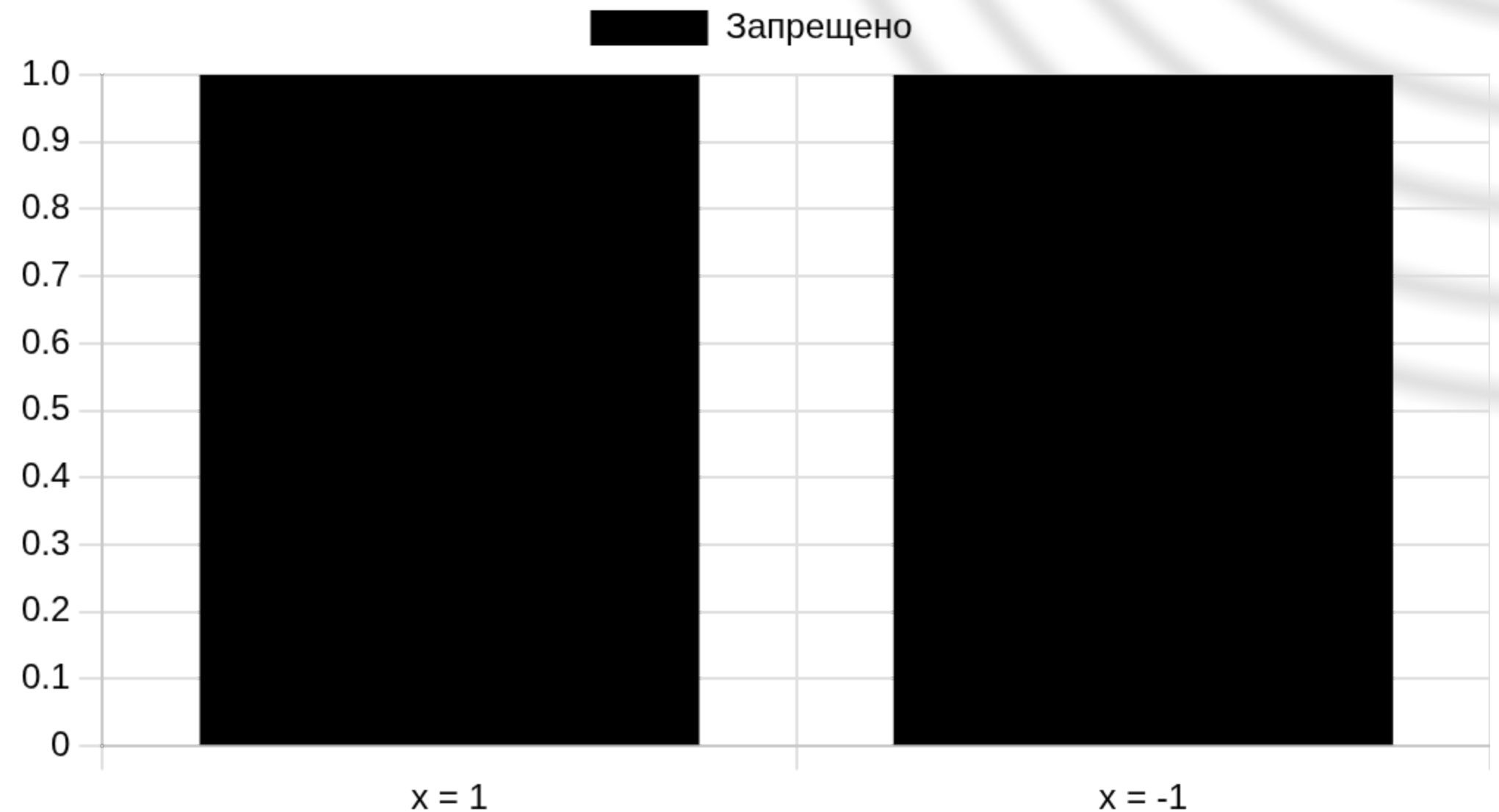
Какие значения переменной нельзя подставлять



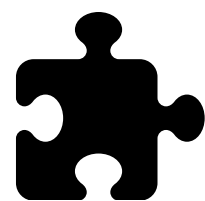
Оба значения запрещены, потому что при них один из знаменателей обращается в ноль. Такие точки всегда нужно исключать ещё до подстановки числа в выражение.



Если знаменатель равен нулю, дробь не имеет смысла. Поэтому $x = 1$ и $x = -1$ входят в список ограничений, а не в ответ.



Когда общий знаменатель находить легче



Общие множители

Если знаменатели уже содержат одинаковую часть, её не нужно придумывать заново. Достаточно выделить общий множитель и сразу записать знаменатель в более удобном виде.



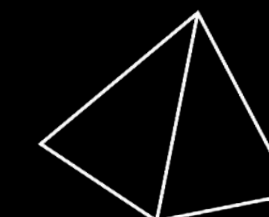
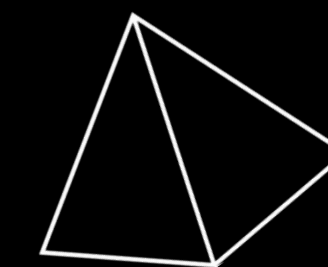
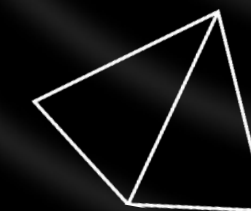
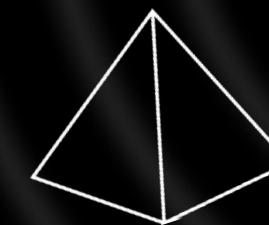
Меньше действий

Разложение на множители помогает увидеть, что второй знаменатель может совпадать с первым после преобразования. Тогда не приходится искать лишние множители и выполнять длинные промежуточные шаги.



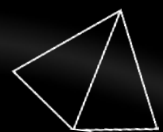
Быстрее и надёжнее

Для дробей $2/(x-2)$ и $3/(2x-4)$ удобно заметить, что $2x-4 = 2(x-2)$. После этого общий знаменатель находится сразу, а вычисления становятся короче и понятнее.

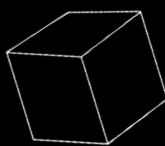


Частые ошибки и правильные действия

Ошибка	Верное действие
Сложить знаменатели	Найти общий знаменатель
Умножить только знаменатель	Умножить обе части
Забыть минус в скобках	Аккуратно раскрыть скобки
Не проверить ограничения	Исключить нули знаменателя



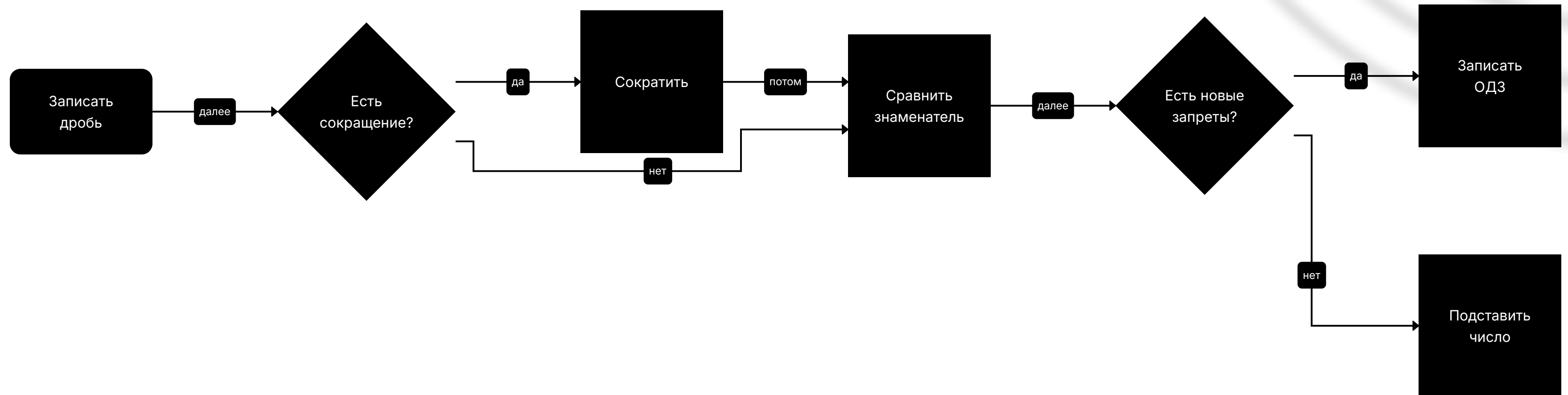
Сравнение типичных ошибок с верными действиями помогает быстрее замечать неточности в решении. Особенно важно следить за знаменателями, множителями и знаками при вычитании.

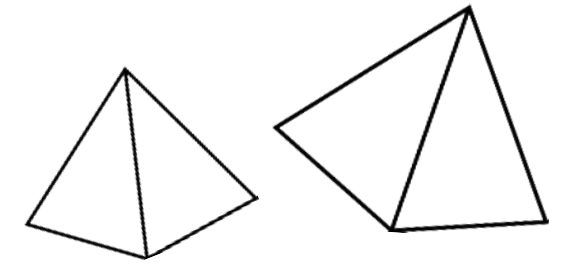
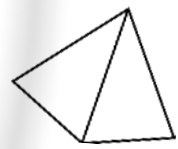


Большинство ошибок связано не с самой формулой, а с невнимательностью к деталям. Если контролировать знаменатель, множители и знаки, решение становится значительно надёжнее.

Проверка ответа после вычисления

Последовательность проверки помогает найти вычислительные ошибки и не пропустить запрещённые значения переменной.





Связь с обыкновенными дробями

Общий принцип

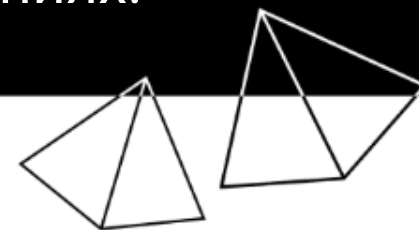
В обычных дробях и рациональных дробях сначала ищут общий знаменатель, а уже потом работают с числителями. Этот приём остаётся одинаковым, меняются только сами записи чисел.

Разница только в буквах

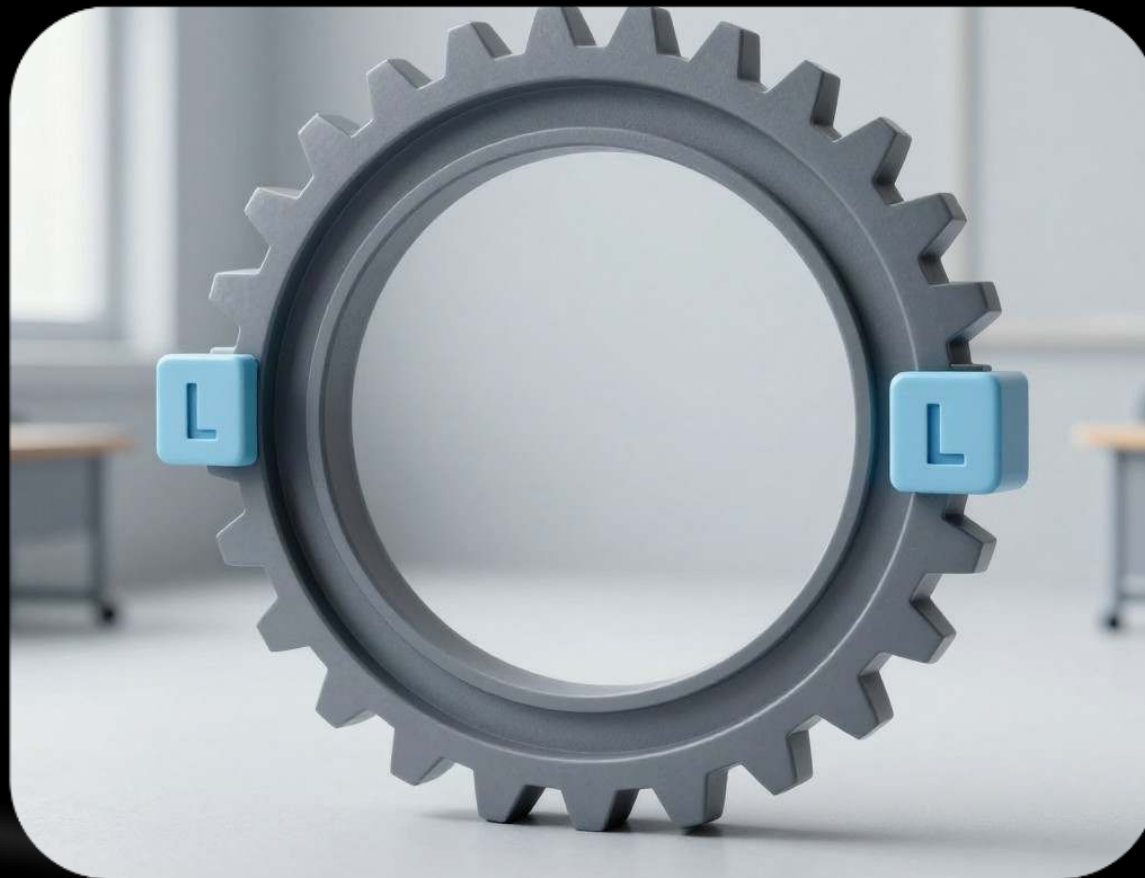
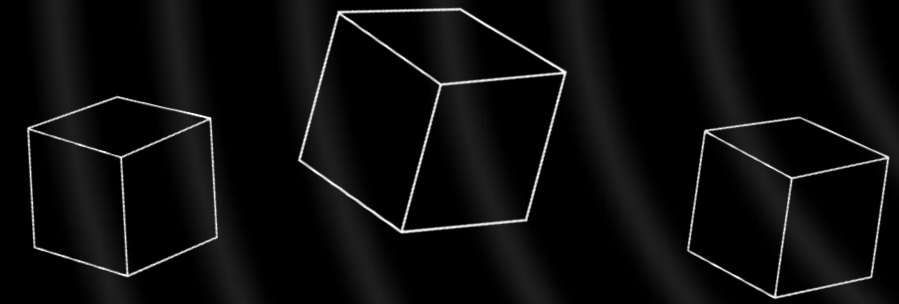
У обыкновенных дробей в числителе и знаменателе стоят числа, а у рациональных — выражения с переменными. Поэтому важно уметь раскрывать скобки и приводить подобные слагаемые.

Полезные навыки

Нахождение НОК, аккуратная работа со знаками и умение упрощать выражения помогают решать такие задания быстрее. Чем лучше освоены эти действия, тем меньше ошибок возникает при вычислениях.

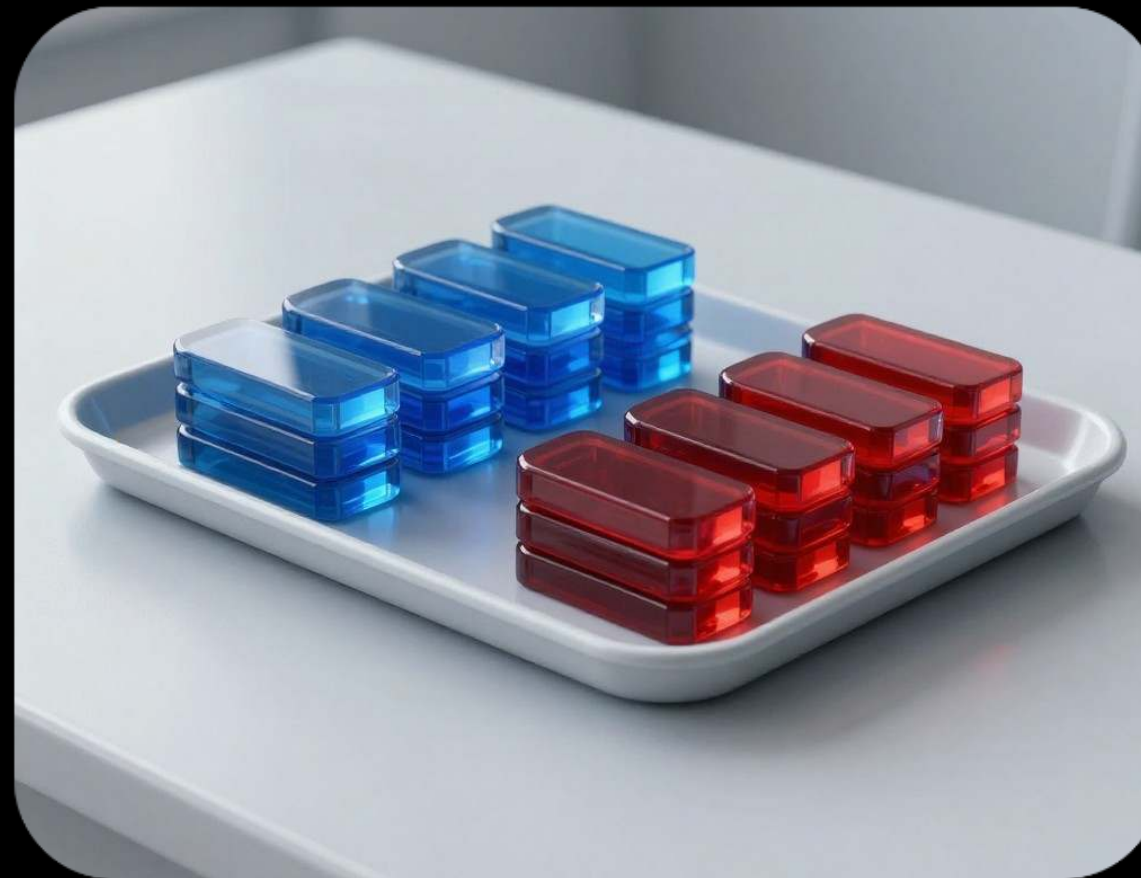
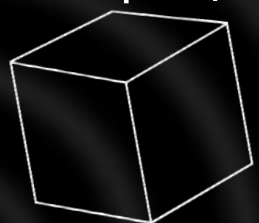


Мини-практика для закрепления



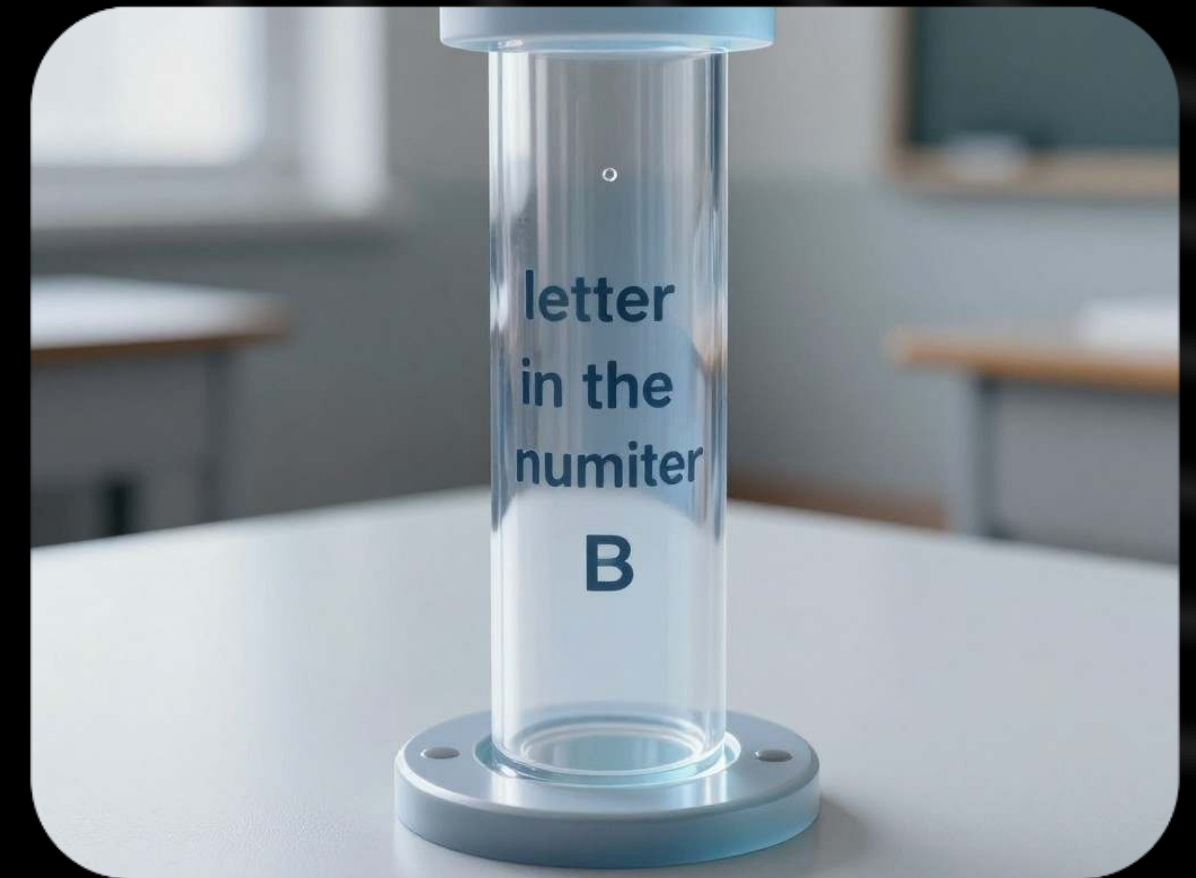
Карточка 1: симметричные знаменатели

Попробуйте начать с выражения $1/(x-4)+1/(x+4)$. Здесь удобно заметить, что знаменатели отличаются только знаком, поэтому общий знаменатель находится быстро. После вычисления обязательно проверьте, при каких x знаменатели обращаются в ноль.



Карточка 2: вычитание с разными знаками

Во втором примере $2/(x+1)-3/(x-1)$ важно не потерять знак минус при приведении к общему знаменателю. Сначала найдите общий знаменатель, затем аккуратно вычтите числители и запишите ограничения для переменной.



Карточка 3: дробь с буквой в числителе

В выражении $x/(x-2)+4/(x+2)$ нужно работать так же, как с обычными числами, но внимательнее следить за скобками. После приведения к общему знаменателю проверьте, можно ли полученный результат упростить.

Главное о рациональных дробях

При сложении и вычитании рациональных дробей сначала находят общий знаменатель, затем работают только с числителями. После вычислений ответ проверяют на сокращение и обязательно исключают запрещённые значения переменной.