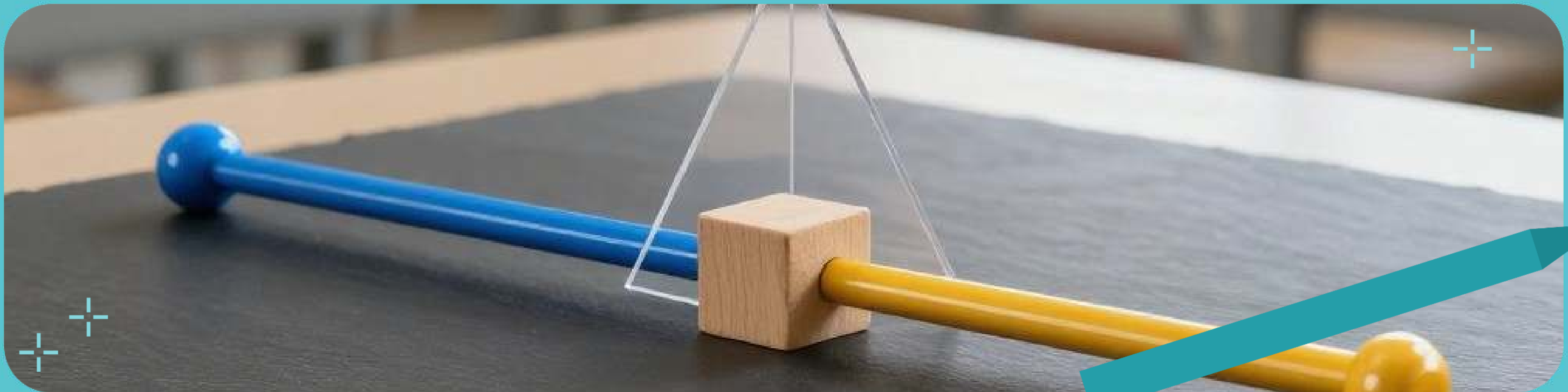


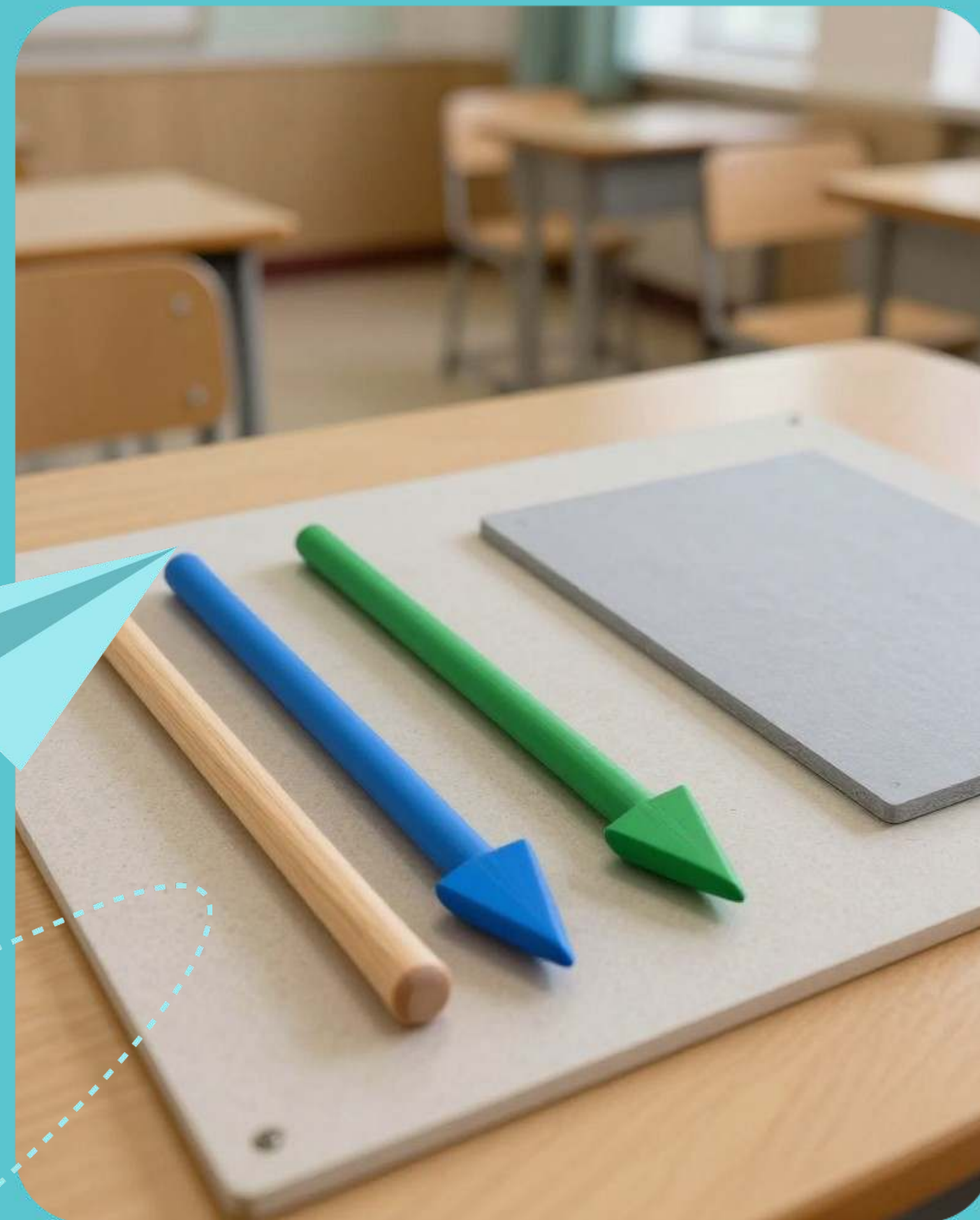
Скалярное произведение векторов в геометрии 9 класса

Узнаем, как длины, углы и координаты связаны одной формулой.



Как векторы помогают решать геометрические задачи

Эта тема связывает координаты с геометрией: через неё удобно находить углы, проверять перпендикулярность и решать задачи о фигурах на плоскости.



Это число показывает, насколько согласованы направления двух векторов и каковы их длины.

Школьный курс геометрии, 9 класс

1

результат всегда является
числом, а не вектором.

Основные свойства скалярного произведения



Свойство	Запись
Переместительное	$a \cdot b = b \cdot a$
Распределительное	$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
С числом	$(ka) \cdot b = k(a \cdot b)$
Квадрат вектора	$a \cdot a = a ^2$
Перпендикулярность	$a \cdot b = 0$

Школьный курс геометрии, 9 класс

Свойства помогают упрощать выражения и делать геометрические выводы без громоздких построений.

По этим свойствам можно преобразовывать выражения, находить длины и проверять прямой угол в задачах.



Формула в координатах на плоскости

1. Запись векторов

Если вектор задан координатами, его удобно записывать как упорядоченную пару чисел. Тогда каждый компонент участвует в вычислении отдельно, без обращения к чертежу или углу.

2. Правило вычисления

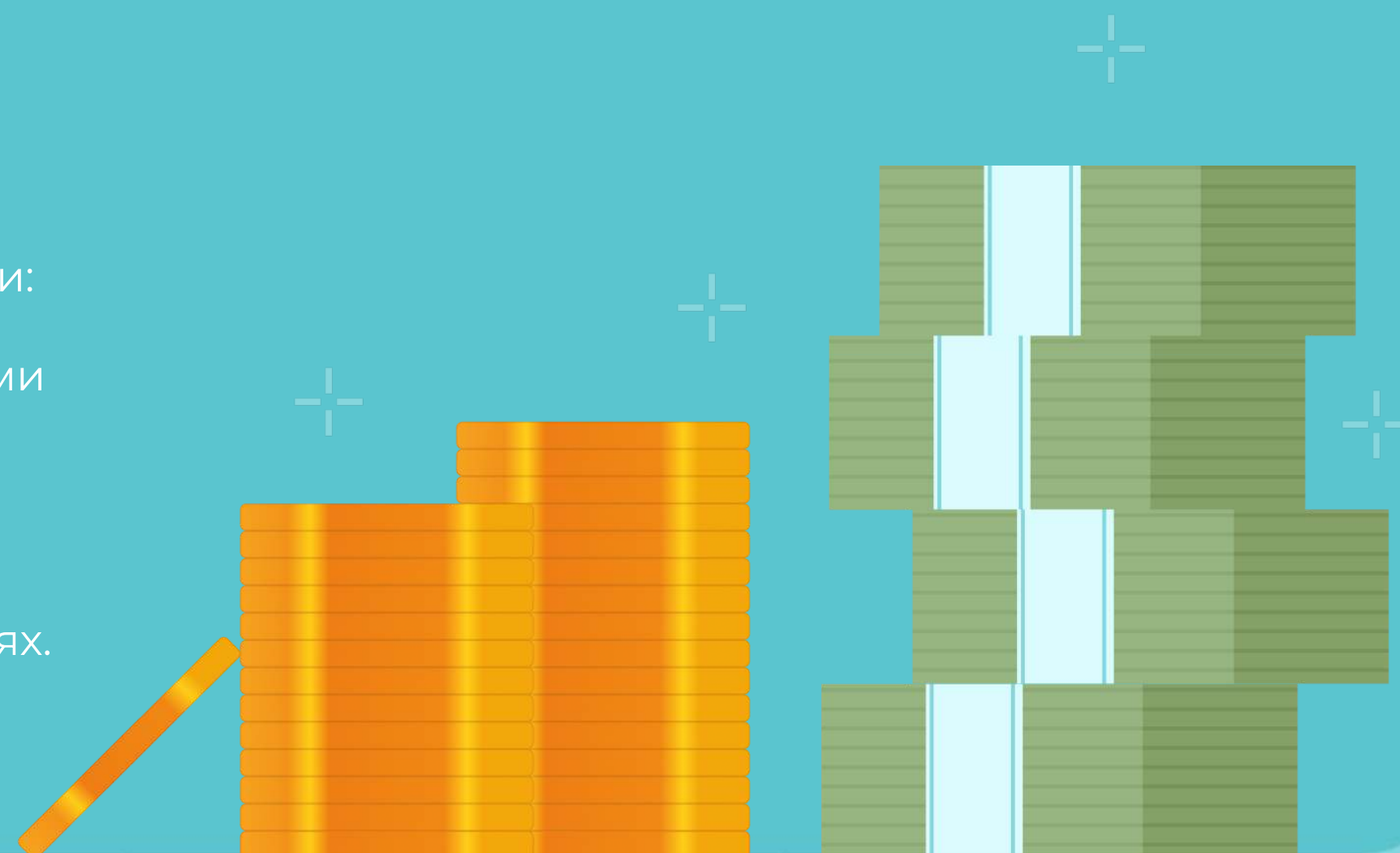
Для векторов $a = (x_1, y_1)$ и $b = (x_2, y_2)$ скалярное произведение находят как $x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2$. Перемножаются только одноимённые координаты.

3. Почему это удобно

Координатная формула особенно полезна на плоскости: она позволяет быстро считать результат по числам и решать задачи даже тогда, когда угол между векторами не задан.

4. Главная идея

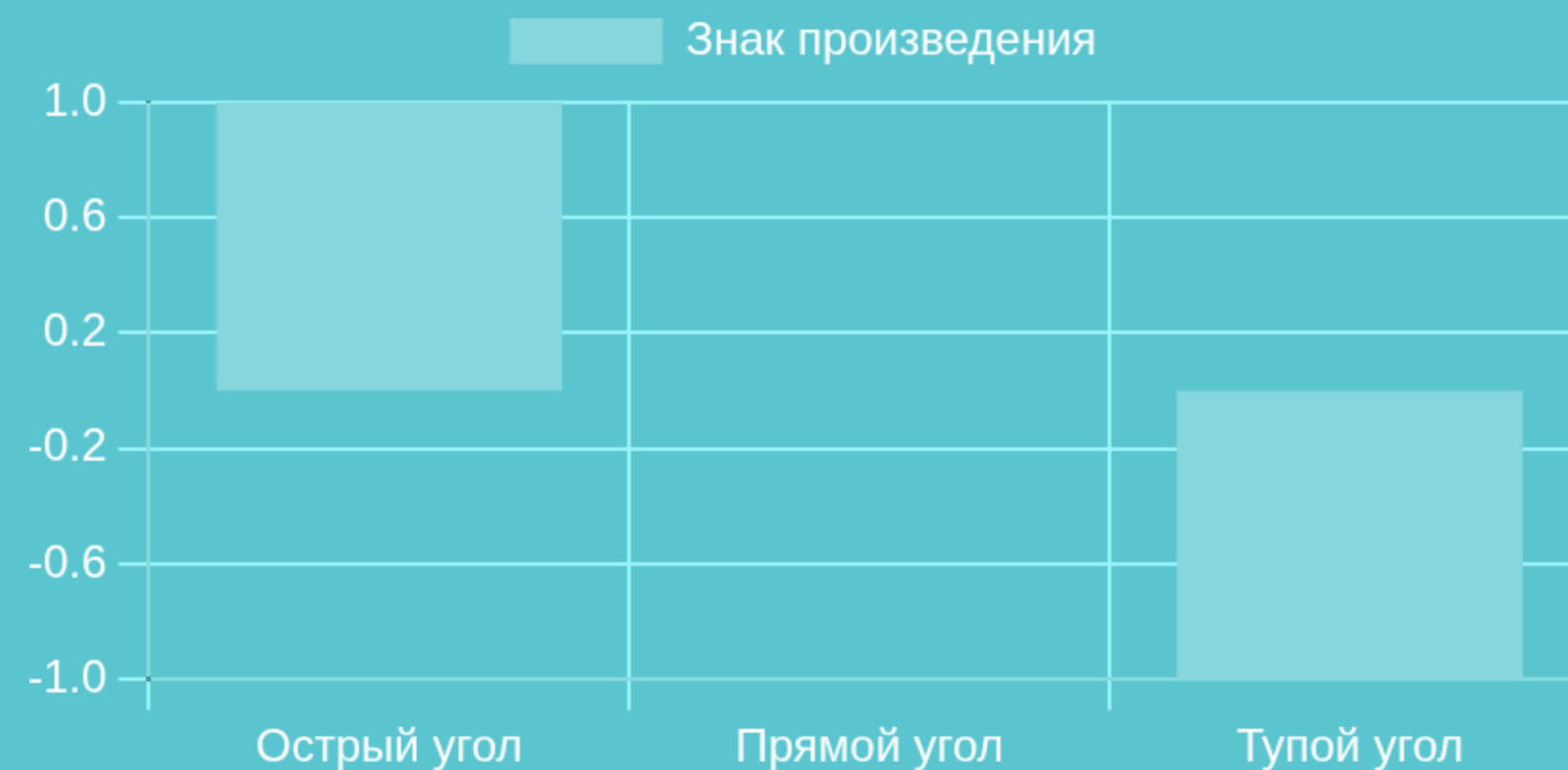
Чем точнее записаны координаты, тем легче получить правильный ответ. Поэтому важно не путать порядок чисел и аккуратно следить за знаками при вычислениях.



Как знак скалярного произведения связан с углом

Знак результата помогает быстро понять, какой угол образуют векторы, даже без точного измерения.

Положительное значение соответствует острому углу, ноль — прямому, отрицательное — тупому; чем ближе направления, тем больше произведение при равных длинах.

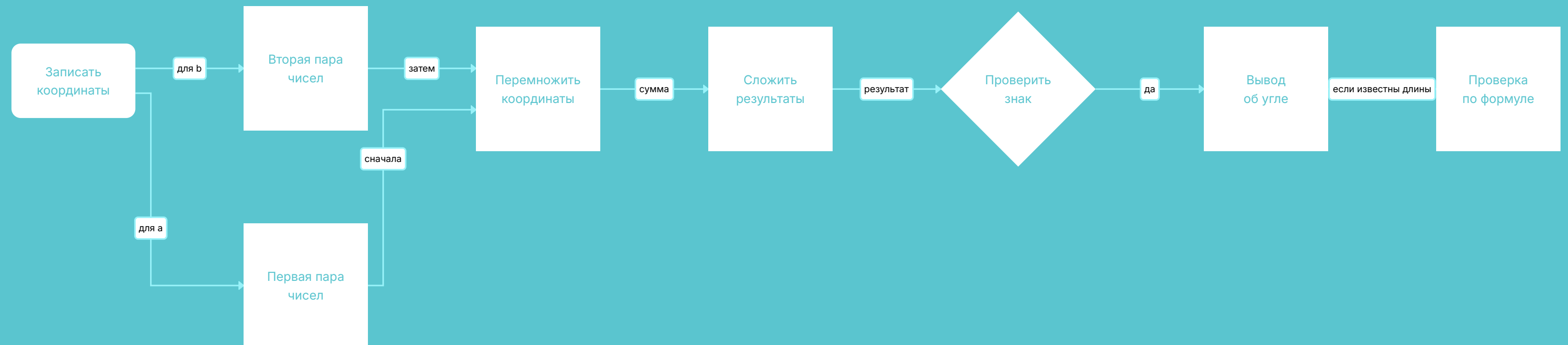


Школьный курс геометрии, 9 класс



Как найти скалярное произведение

Последовательность действий при вычислении по координатам и проверке ответа через угол.



Как выглядит скалярное произведение на координатной сетке



Два вектора из одной точки

На сетке удобно видеть, как оба вектора выходят из общего начала и направлены в разные стороны. По клеткам легко определить их координаты, а по наклону заметить, какой угол они образуют.



Проекции подсказывают ответ

Отдельные отрезки вдоль осей показывают, как каждая координата влияет на результат. Такая схема помогает понять, почему в формуле перемножаются только соответствующие числа и почему знак может меняться.



Если известны скалярное произведение и длины векторов, угол находят через арккосинус по полученному значению косинуса.

Школьный курс геометрии, 9 класс

2

**ИЗВЕСТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
НУЖНЫ, ЧТОБЫ ВЫРАЗИТЬ
КОСИНУС УГЛА И ЗАТЕМ
НАЙТИ САМ УГОЛ.**

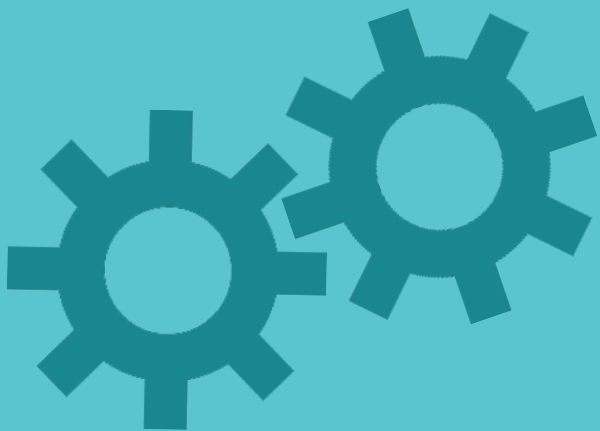
Примеры вычислений по координатам

Векторы	$a \cdot b$	Вывод
(1,2) и (3,4)	11	острый
(2, -1) и (4,8)	0	прямой
(-1,3) и (2,1)	1	острый
(3, -2) и (-1,5)	-13	тупой

В таблице показано, как по ответу можно сделать вывод о типе угла между векторами.

Положительный результат чаще указывает на острый угол, нулевой — на прямой, а отрицательный — на тупой; это удобно для быстрой проверки решения.

Составлено по правилу $a \cdot b = x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2$



Признак перпендикулярности

Нулевое произведение

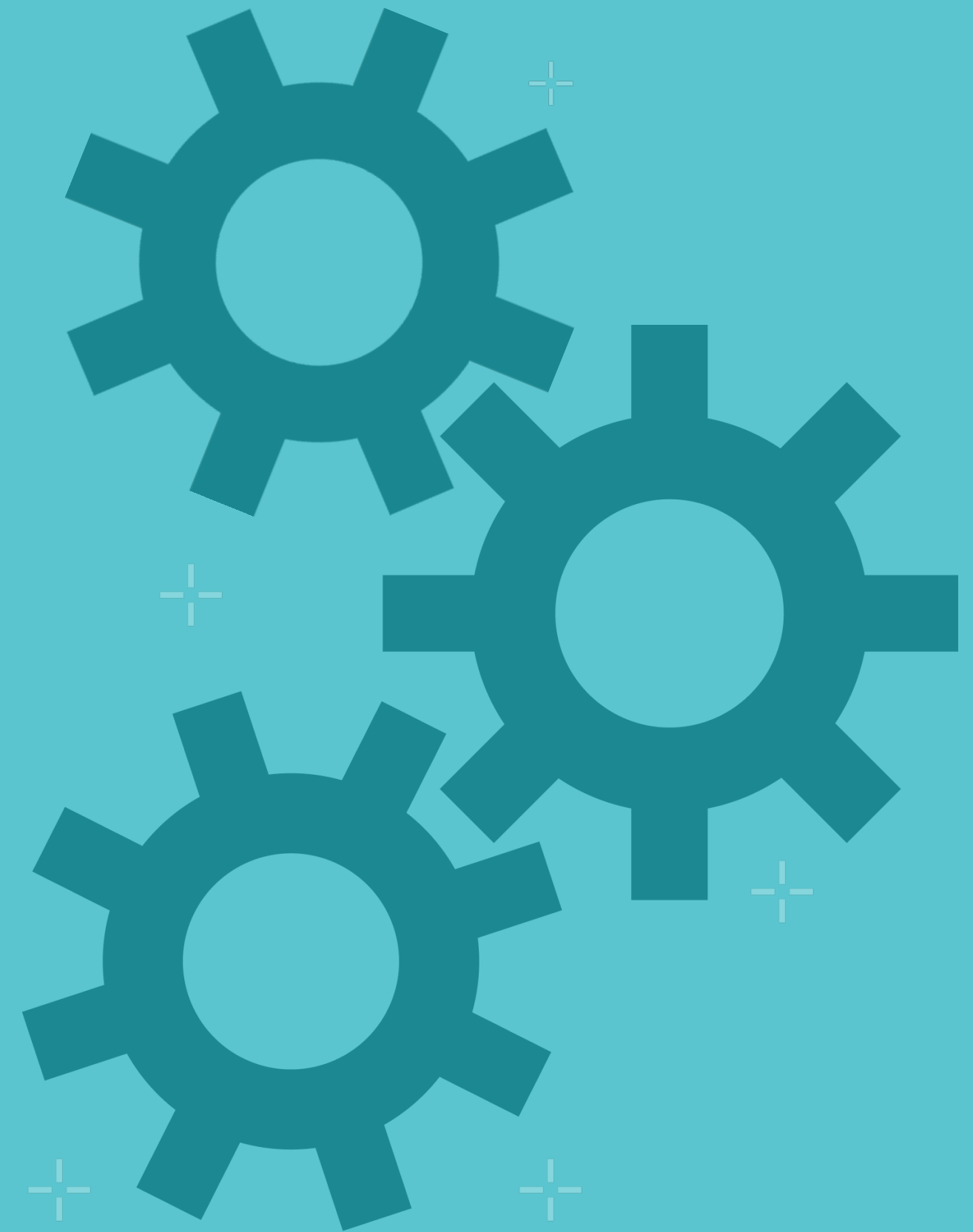
Если скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю, значит угол между ними прямой. Это самый быстрый способ проверить перпендикулярность без измерения углов и дополнительного построения.

Проверка фигур

Признак особенно полезен в задачах о прямоугольниках, квадратах и трапециях. Достаточно найти нужные векторы и убедиться, что их произведение равно нулю, чтобы доказать прямой угол.

Работа в координатах

На координатной плоскости признак позволяет решать задачи численно: находят координаты векторов, вычисляют произведение и делают вывод о взаимном расположении сторон. Это упрощает многие геометрические доказательства.



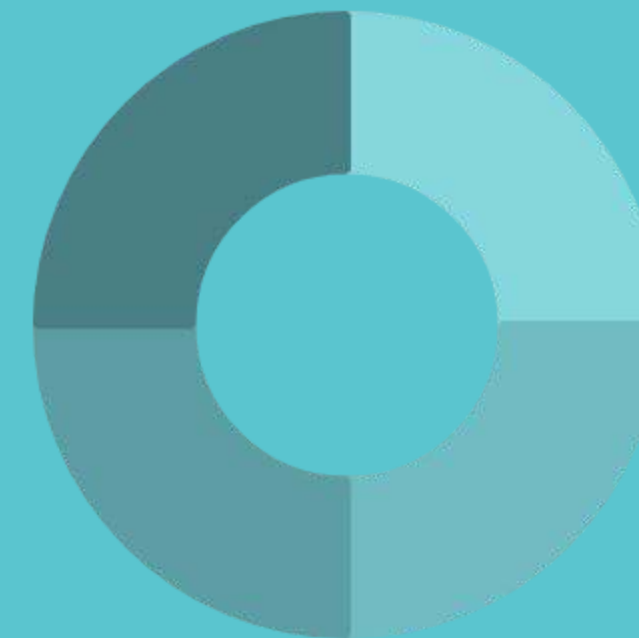
Где используется скалярное произведение



Один и тот же приём помогает и в задачах про фигуры, и в прикладных ситуациях, где важно сравнивать направления, движение или взаимное расположение объектов.

Скалярное произведение полезно не только в геометрии: оно связывает школьную математику с физикой, компьютерной графикой и ориентацией в пространстве.

Геометрия Физика Информатика
Навигация



Схематическая диаграмма по учебным примерам, без статистических данных.



Связь скалярного произведения с длиной вектора

1.

Произведение с самим собой

Для любого вектора верно, что его скалярное произведение на самого себя равно квадрату длины. Поэтому через одно и то же выражение можно находить и величину, и модуль вектора.

2.

Формула длины

Если вектор задан координатами, его длину вычисляют по формуле из теоремы Пифагора. Координаты возводят в квадрат, складывают и извлекают квадратный корень, получая модуль без чертежа.

3.

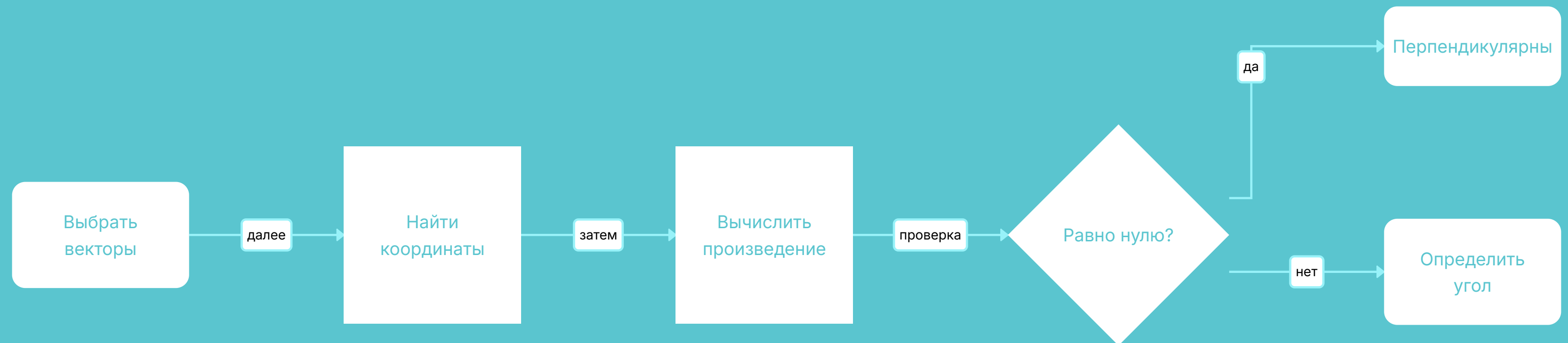
Применение в задачах

Эта связь нужна для нахождения расстояния между точками, сравнения отрезков и проверки равенства векторов по длинам. Она делает координатный метод удобным и универсальным в школьной геометрии.



Как проверить прямой угол по скалярному произведению

Последовательность действий в координатной задаче



Как увидеть смысл формулы на рисунке

Тень на другом векторе

Если представить один вектор как луч света, то его проекция на другой вектор похожа на тень. Чем ближе направления, тем длиннее эта тень, а значит, больше значение скалярного произведения. Такой образ помогает запомнить связь с косинусом и знаком результата.



Когда тени нет

При прямом угле тень исчезает: один вектор как будто не «попадает» на направление другого. Проекция становится нулевой, поэтому и скалярное произведение равно нулю. Этот образ особенно полезен, когда нужно быстро объяснить признак перпендикулярности без сложных вычислений.



Типичные ошибки при вычислении



Ошибка	Как правильно
Складывать координаты	Перемножать пары
Забыть минус	Сохранять знак
Писать вектор	Получать число
Не учитывать $\cos \alpha$	Использовать формулу

Учебные примеры по теме «Скалярное произведение векторов».

Ниже показаны самые частые неточности и правильные действия при вычислении скалярного произведения по координатам и через угол.

Главные ошибки связаны не с самой идеей, а с записью формул и знаков. Если выбрать правильную формулу, большинство вычислений становится коротким и надёжным.



Пример задачи из школьной геометрии

1. Находим векторы

Сначала выписываем координаты точек и строим векторы по правилу вычитания координат. Для отрезка АВ получаем $(3,2)$, а для отрезка ВС — $(1, -3)$, не рисуя дополнительную сетку.

2. Считаем произведение

Теперь перемножаем соответствующие координаты и складываем результаты: $3 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) = -3$. Такой расчёт занимает несколько секунд и сразу показывает числовую характеристику угла между направлениями.

3. Делаем вывод

Отрицательное значение означает тупой угол между векторами. Значит, ломаная в точке В поворачивает не резко, а с раскрытием более чем на 90 градусов, что видно и по координатам.

4. Проверяем смысл

Подобные задачи учат не только вычислять, но и понимать фигуру. По знаку скалярного произведения можно судить о форме угла, не измеряя его транспортиром и не выполняя громоздких построений.



Значения скалярного произведения и тип угла

По знаку результата можно быстро понять, каким является угол между векторами, даже если сами длины и координаты уже найдены.

Линия наглядно показывает: отрицательное значение связано с тупым углом, ноль — с прямым, а положительное — с острым.



Схематическая шкала для учебного объяснения, без статистических данных.



Что нужно знать перед контрольной работой



Главные формулы

Нужно помнить две записи скалярного произведения: через длины и угол, а также через координаты. Для длины вектора используется связь $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, которая часто встречается в задачах.



Знак результата

Если произведение равно нулю, ненулевые векторы перпендикулярны. Положительное значение говорит об остром угле, а отрицательное — о тупом. Этот вывод помогает проверять ответ без чертежа.



Аккуратные вычисления

Всегда перемножайте соответствующие координаты и внимательно следите за знаками. Ошибка в одном минусе меняет весь ответ, поэтому полезно перепроверять каждый шаг перед записью результата.



Проверка смысла

После вычисления стоит спросить себя, соответствует ли знак полученного числа ожидаемому виду угла. Такая проверка помогает заметить неточность раньше, чем работа будет сдана.



Скалярное произведение помогает видеть геометрию в числах



Эта тема соединяет угол, длину и координаты в одной короткой формуле. С ней проще доказывать свойства фигур, находить прямые углы и решать задачи быстрее и увереннее.