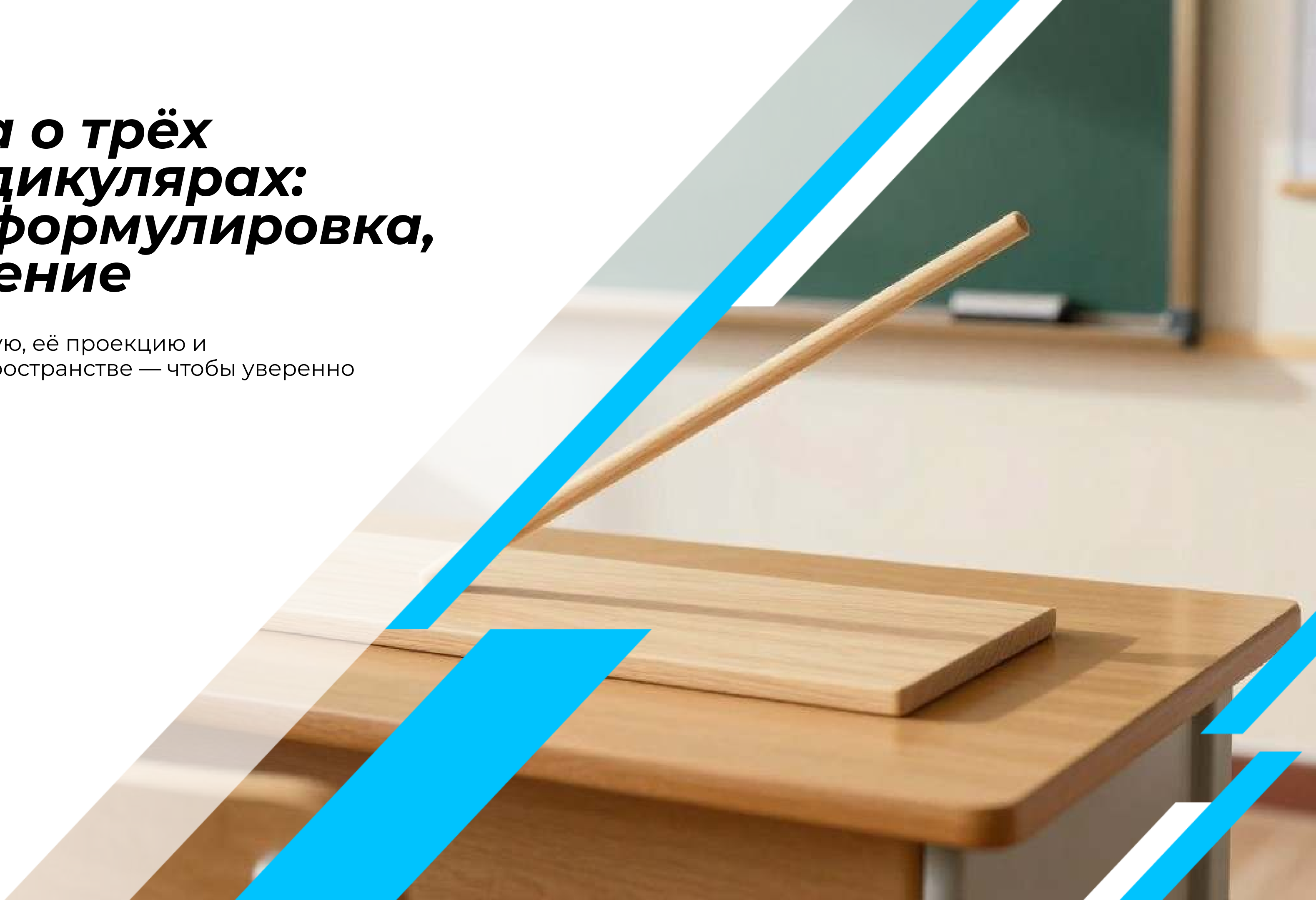


Теорема о трёх перпендикулярах: смысл, формулировка, применение

Связывает наклонную, её проекцию и перпендикуляр в пространстве — чтобы уверенно доказывать углы.



Место теоремы в курсе геометрии 11 класса

В 11 классе теорема помогает переходить от объёмных фигур к плоским проекциям. Это особенно полезно при работе с пирамидой, призмой, параллелепипедом и тетраэдром, когда нужно доказать перпендикулярность и затем найти углы или расстояния.



Основные понятия: наклонная, проекция, перпендикуляр



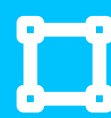
Наклонная прямая

Наклонная — это прямая, пересекающая плоскость, но не образующая с ней прямой угол. Поэтому в пространстве она «уходит» от плоскости, сохраняя точку пересечения.



Проекция точки

Ортогональная проекция точки на плоскость — это основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость. По сути, она фиксирует «след» точки в плоской геометрии.



Проекция прямой

Ортогональная проекция прямой на плоскость получается соединением проекций двух её точек. Так плоская схема начинает кодировать пространственное расположение прямой.



Перпендикуляр к плоскости

Перпендикуляр к плоскости образует с любой прямой, лежащей в этой плоскости, угол 90° . Это свойство становится ключевым мостом между пространственными и плоскими конфигурациями.

Формулировка теоремы о трёх перпендикулярах

Если прямая в плоскости перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и самой наклонной. Простыми словами: «прямой угол переносится» в пространство.

Обратное утверждение тоже верно: если прямая в плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и её ортогональной проекции. Это позволяет проверять связи по проекциям.

Теорема устанавливает точную связь между плоской геометрией и пространственной перпендикулярностью, превращая сложное доказательство в контролируемую проверку прямых углов на чертеже.

Условия и выводы теоремы

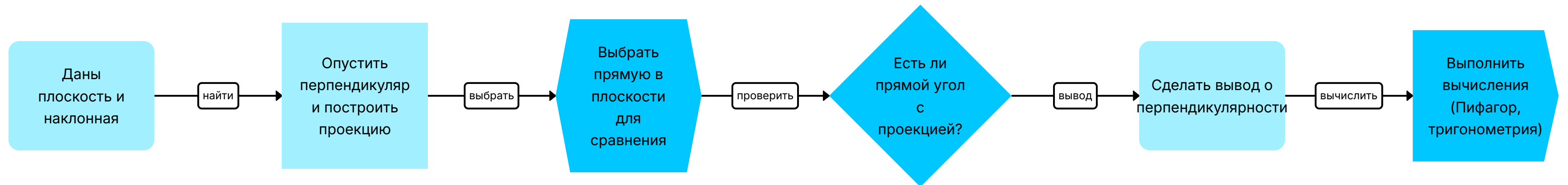
Теорема работает в двух направлениях: от условия проекции к перпендикулярности в пространстве и обратно.

Проверка перпендикулярности в пространстве выполняется через работу с ортогональной проекцией на плоскость.

Ситуация	Условие	Вывод
Наклонная и её проекция	Прямая Π проекции наклонной	Прямая Π наклонной
Обратная часть	Прямая Π наклонной	Прямая Π её проекции

Алгоритм применения теоремы в задаче

Пошаговая логика перехода от проекции к перпендикулярности



Геометрический смысл теоремы

Теорема показывает, что пространственный прямой угол можно распознать через «плоский след» — ортогональную проекцию на плоскость. Так мы переводим вопрос о пространстве в проверку на чертеже.

Если в плоскости прямая образует прямой угол с проекцией наклонной, то в пространстве она образует прямой угол и с самой наклонной. То есть проекция сохраняет ключевую перпендикулярную связь.

Этот смысл особенно ценен при чтении стереометрических рисунков: объёмная ситуация отражается на плоскости бумаги, и теорема гарантирует строгость перехода от изображения к доказательству.

Чертёж к теореме: обязательные элементы схемы

Плоскость, точка вне неё и основы перпендикуляров

Обычно отмечают плоскость α и точку A вне плоскости. Из A опускают основание перпендикуляра A_1 : $AA_1 \perp \alpha$; далее проводят наклонную AB и строят её ортогональную проекцию A_1B .

Наклонная, её проекция и прямой угол в плоскости

В плоскости α выбирают прямую BC (или другую сравниваемую прямую), с которой будет проверяться перпендикулярность. На схеме отдельно выделяют прямые углы, например в точке B с направлением A_1B , чтобы видеть условие теоремы.

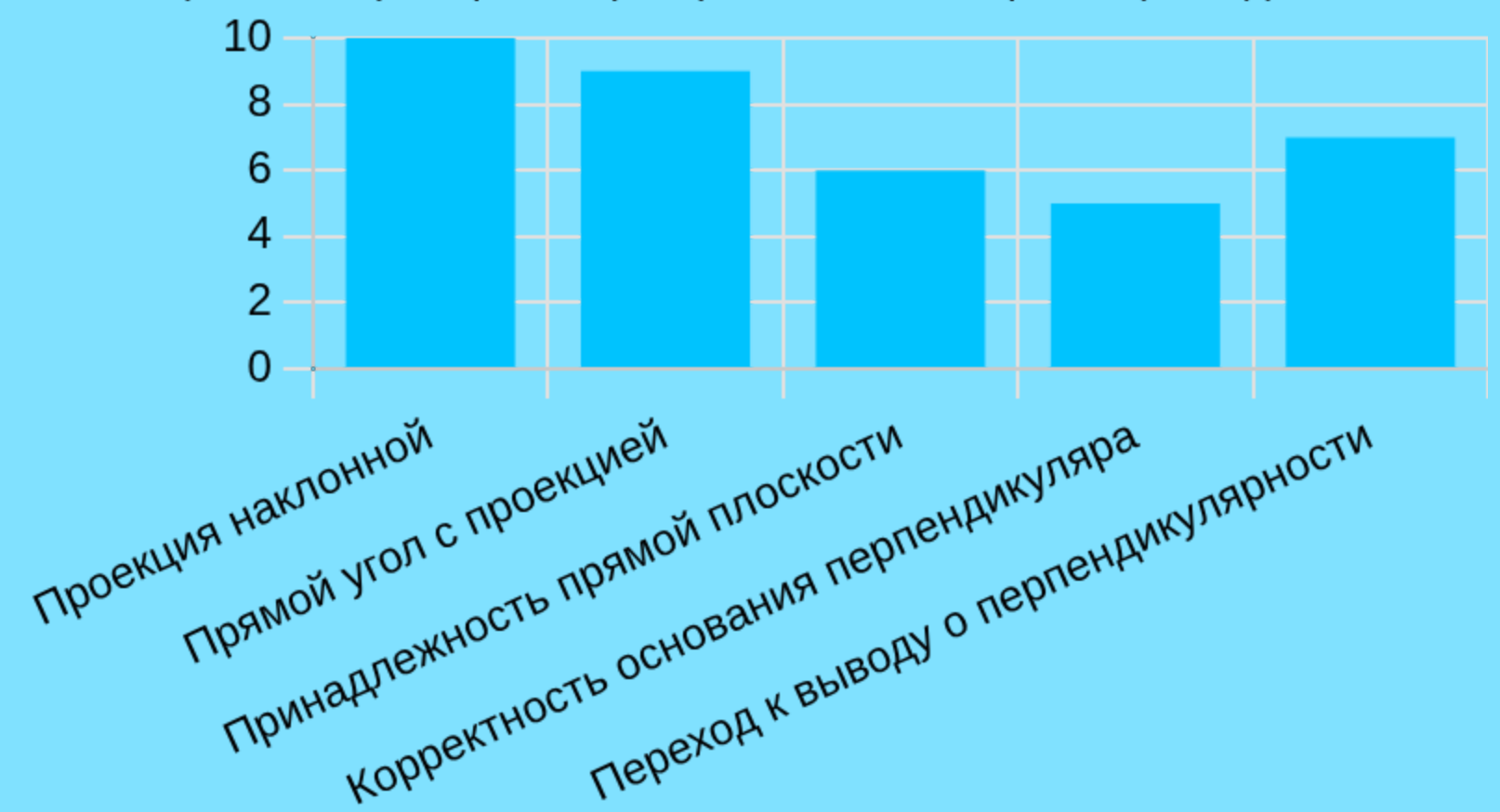


Сравнение прямой и её проекции в плоскости

По сути, проекция и прямой угол — «рабочие элементы», без которых теорема не запускается в доказательстве.

Чем точнее построена проекция и чем надёжнее обоснован прямой угол, тем легче вывести перпендикулярность в пространстве и продолжить вычисления.

Что чаще всего проверяют при применении теоремы (методическая ва



Доказательство теоремы: идея через прямоугольные треугольники

Рассмотрим точку вне плоскости, её основание на плоскости и наклонную. Затем строится ортогональная проекция наклонной на плоскость, чтобы получить связку «пространство $\rightarrow$ плоскость».

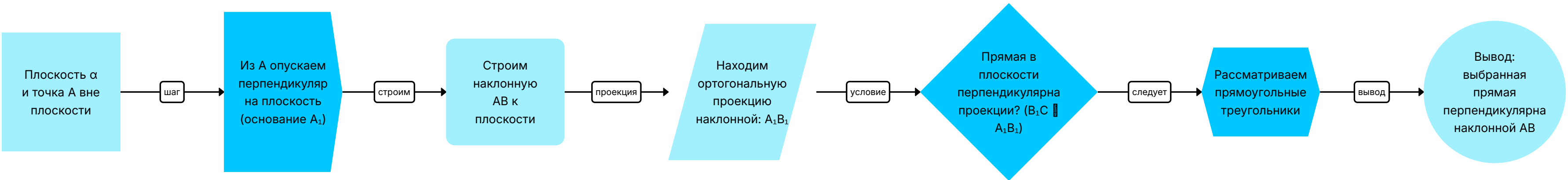
Если прямая в плоскости перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна соответствующей стороне прямоугольного треугольника. Через согласованные определения перпендикулярности это даёт вывод о перпендикулярности в пространстве.

Дальше формируют прямоугольный треугольник, в котором одна из сторон совпадает с проекцией наклонной. Поскольку треугольник прямоугольный, удобно использовать свойства прямых углов.

В итоге свойства углов в прямоугольных треугольниках и связь пространственных и плоских фигур позволяют доказать, что условие «прямой угол на проекции» эквивалентно нужной перпендикулярности.

Схема доказательства теоремы

Переход от плоской конфигурации к пространственной через ортогональную проекцию и прямые углы.



Обратная часть теоремы

Дано

Пусть в плоскости проведена прямая, которая перпендикулярна наклонной прямой.

Интерпретация

Тогда автоматически устанавливается перпендикулярность между этой прямой и её ортогональной проекцией на данную плоскость.

Зачем это нужно

Обратное утверждение помогает, когда известна пространственная перпендикулярность, а в выводе требуется перейти к плоской конфигурации и проверить построение.

Где теорема применяется чаще всего

В учебных и тренировочных вариантах чаще всего требуется именно установить перпендикулярность «через проекцию», чтобы затем перейти к прямоугольным треугольникам.

Диаграмма подчёркивает, что практический фокус курса — доказательство прямых углов в плоской проекции, после чего пространственные выводы становятся однозначными.



Связь с расстояниями и вычислениями



Переход к прямоугольным треугольникам

Теорема помогает «свести» пространственную задачу к ситуации с прямым углом в плоскости. Это запускает стандартный аппарат прямоугольных треугольников и упрощает доказательства.



Теорема Пифагора

Когда после проекции появляется прямой угол, длины в треугольнике вычисляют через теорему Пифагора. Затем выражения переносят обратно в пространственную конфигурацию.



Синус и косинус в углах

Если нужно найти угол между прямой и плоскостью, проекция даёт связанный прямоугольный треугольник. Оттуда значения получают через отношения синуса и косинуса.



Расстояние через искомый отрезок

В задачах о расстоянии от точки до прямой или плоскости перпендикуляр часто становится искомым отрезком. Его длина выражается через проекцию и уже известные величины.

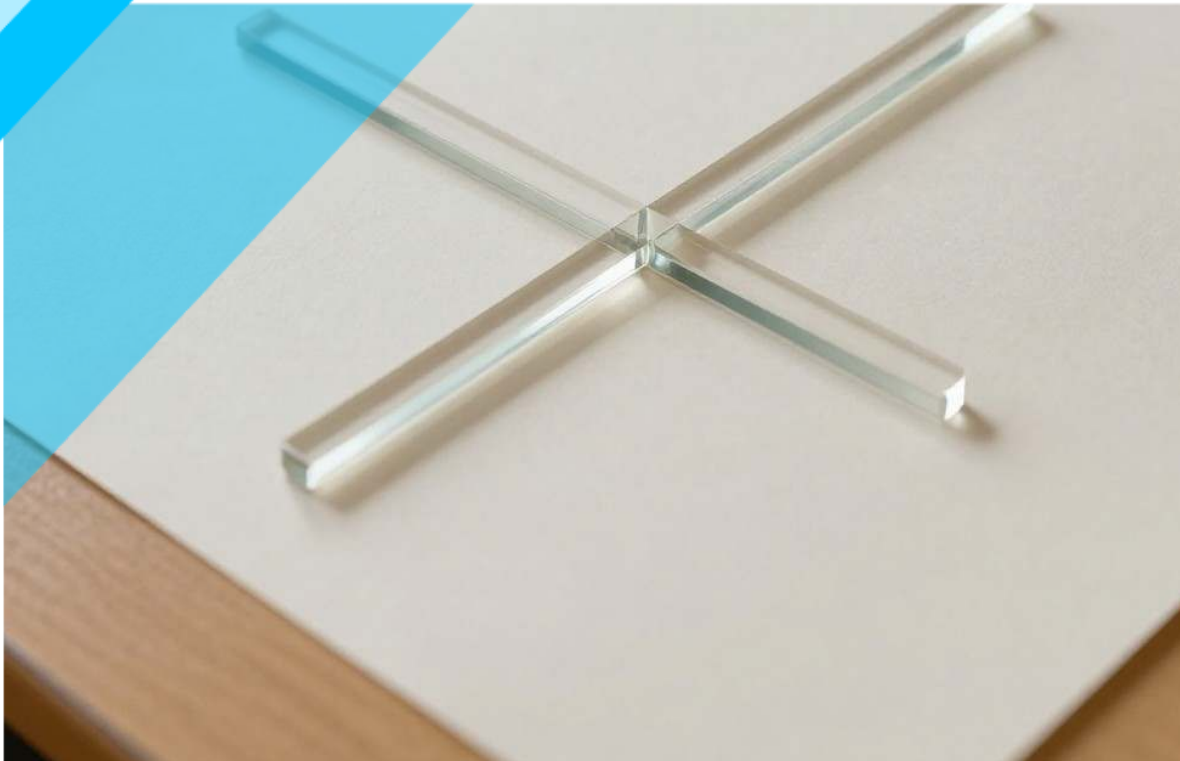
Типовая задача по теме и этапы решения

Этап	Действие	Результат
Анализ	Выделяются плоскость, точка, наклонная, искомая прямая	Понимание, что именно нужно доказать
Построение	Отмечается проекция наклонной на плоскость	Появляется плоская «опорная» конфигурация
Проверка	Устанавливается прямой угол между прямой в плоскости и проекцией	Готовность применить теорему
Вывод	Применяется теорема о трёх перпендикулярах	Получаем перпендикулярность в пространстве
Вычисление	Используются свойства прямоугольного треугольника	Находятся требуемые длины/углы

Последовательность действий: сначала строим проекцию и доказываем перпендикулярность, затем выполняем вычисления по геометрии прямоугольных треугольников.

Теорема работает как связующее звено: после правильного построения проекции доказательство перпендикулярности становится коротким, а вычислительный этап — надёжным.

Типичная ошибка: доверие только рисунку



Угол «кажется прямым», но на деле он неверен

Иногда из-за перспективы или неаккуратного масштаба два отрезка на рисунке визуально образуют прямой угол. В решении же учитывают только строгую геометрическую конструкцию, а не «впечатление» от чертежа.



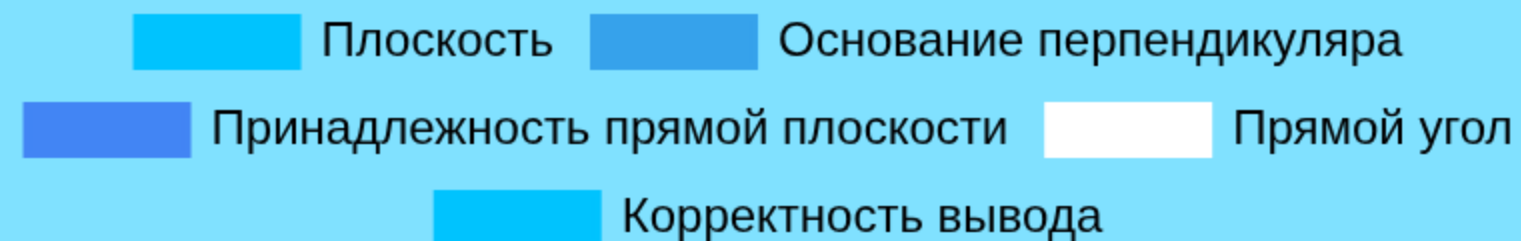
Проекция построена не по правилам — ломается вся логика

Если основание перпендикуляра отмечено приблизительно или проекция наклонной проведена «на глаз», то перпендикулярность в пространстве не следует автоматически. Корректность подтверждают через строгое построение и проверку условий теоремы.

Что важно проверить в решении задачи

Даже при верных вычислениях ошибка возникает, если где-то нарушено условие теоремы: особенно при построении проекции и прямого угла в плоскости.

Наибольший вес имеет связка «проекция — прямой угол»: именно она гарантирует перенос перпендикулярности из плоскости в пространство и делает вывод доказанным.



Тема в системе школьной стереометрии



Перпендикулярность прямой и плоскости

Теорема даёт рабочий критерий: чтобы доказать перпендикулярность в пространстве, достаточно проверить соотношение с ортогональной проекцией на плоскость.



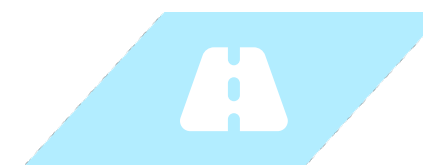
Угол между прямой и плоскостью

Через проекцию прямой угол превращается в задачу про углы в прямоугольных треугольниках, что помогает находить значения и обосновывать построения.



Ортогональная проекция

Метод активно использует базовые свойства проекций: основание перпендикуляра и проекцию прямой. Благодаря этому чертёж становится логическим инструментом доказательства.



Расстояния в пространстве

Когда нужно найти расстояние от точки до прямой или плоскости, перпендикуляр часто выражается через проекцию, а значит вычисляется через уже знакомые соотношения.

Практическая ценность для задач 11 класса

В задачах на пирамиду теорема помогает найти высоту и апофему: перпендикулярность доказывают через проекцию, после чего длины вычисляют в прямоугольных треугольниках.

В призме удобнее проверять перпендикулярность направлений и рёбер: корректная проекция превращает «объёмный» вопрос в понятный плоский. Это уменьшает число гипотез и упрощает выкладки.

В параллелепипеде теорема служит опорой для доказательства того, что определённые ребра или диагональные направления взаимно перпендикулярны. Затем становится легче выбрать нужный прямоугольный треугольник.

В целом теорема сокращает путь от условия к выводу: вместо длинных рассуждений она даёт строгий перенос перпендикулярности. Поэтому решения получаются короче и убедительнее при проверке.

Итоги: что даёт теорема о трёх перпендикулярах

Теорема связывает наклонную, её ортогональную проекцию и прямую в плоскости через перпендикулярность. Она переводит пространственные задачи в плоские, где проще применять свойства прямых углов и прямоугольных треугольников.