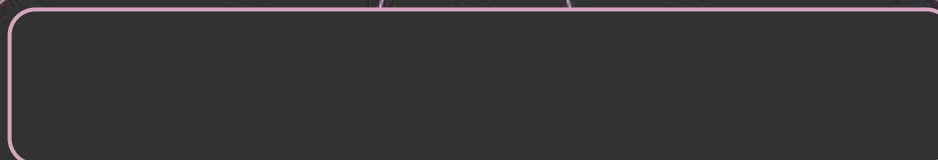
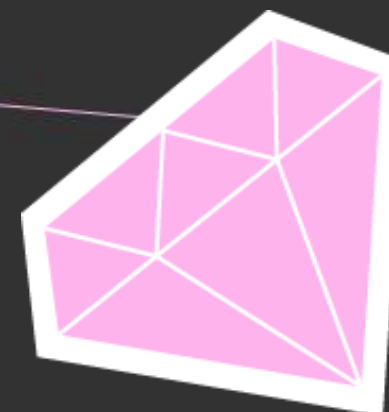
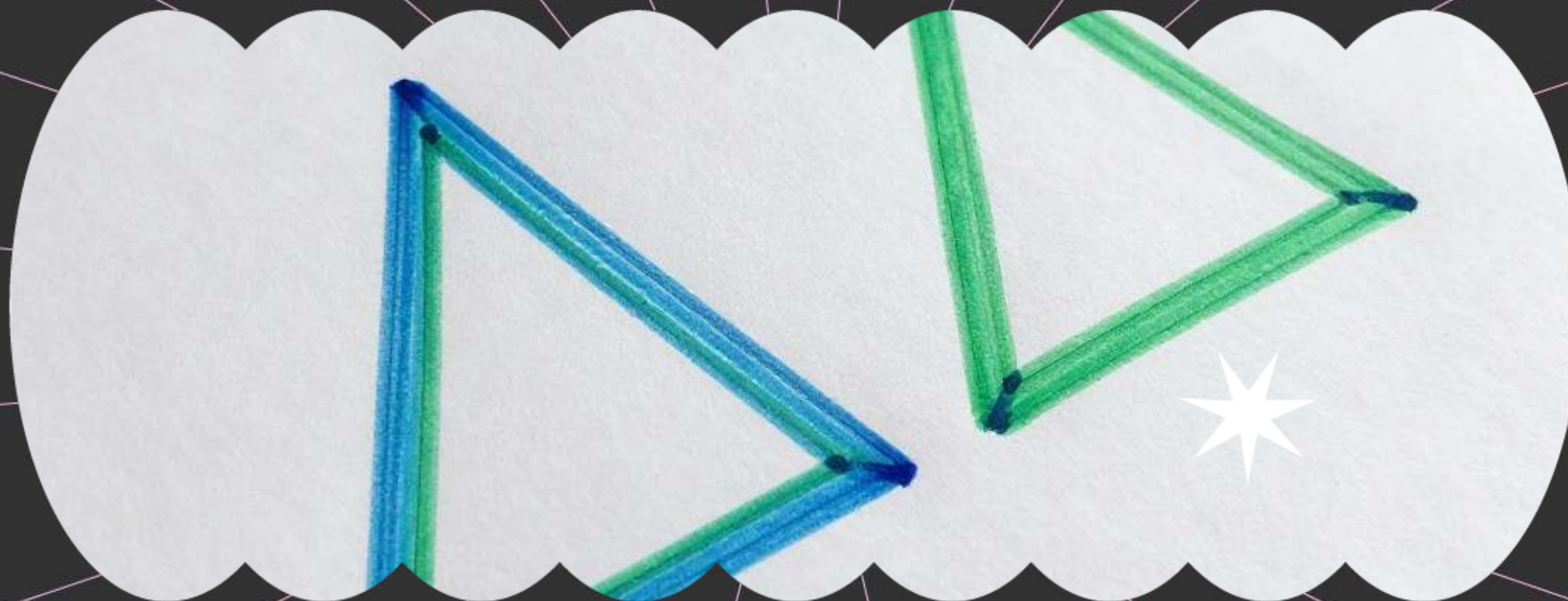




Некоторые теоремы и задачи геометрии: метод подобия

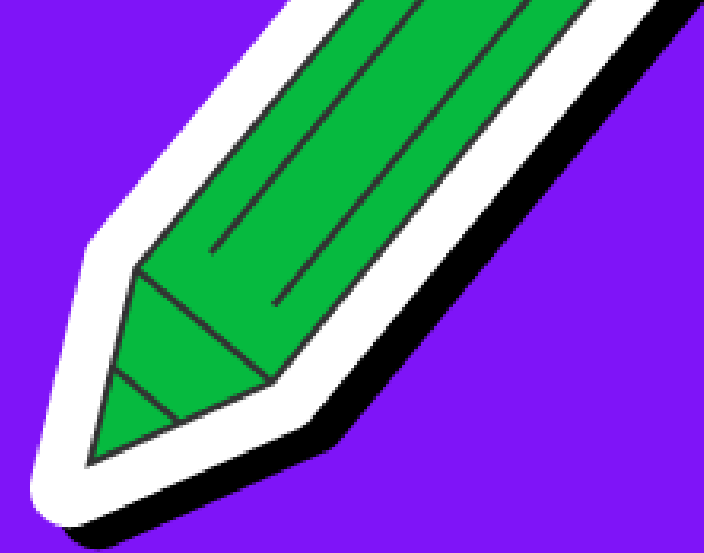
Равные углы и пропорции вместо длинных вычислений.



Зачем нужен метод подобия

Подобие помогает быстро увидеть связь между фигурами: углы совпадают, стороны пропорциональны, а сложная задача сводится к понятной схеме из нескольких шагов.

Идея метода: сделать сложное проще



★ Упростить рисунок

Сначала рассматривают рисунок как набор простых элементов. Если в нём удастся выделить похожие треугольники, большая фигура становится удобнее для анализа и вычислений.

★ Одна пропорция

Затем используют одно и то же отношение между соответствующими сторонами. Одна найденная пропорция часто заменяет несколько громоздких построений и длинных расчётов.

★ Подсказки в задаче

Метод особенно полезен там, где есть параллельные прямые, высоты или общие углы. Именно такие элементы чаще всего подсказывают, какие треугольники нужно сравнить.



Определение подобия через углы и стороны



01

Равные углы

Сначала устанавливают равенство соответствующих углов. Без этого нельзя говорить о подобии, потому что именно углы задают правильное соответствие сторон.

02

Пропорциональные стороны

Затем сравнивают стороны, которые лежат напротив этих углов. Их отношения должны совпадать для всех пар соответствующих сторон.

03

Коэффициент k

После этого вводят коэффициент подобия. Он показывает, во сколько раз одна фигура больше другой, и остаётся одинаковым для всей пары треугольников.

04

Что даёт доказательство

Когда подобие доказано, можно сразу переносить известные длины, периметры и другие величины. Это делает решение короче и нагляднее.



Где искать подобные треугольники в задаче

* Параллельные прямые

Если в задаче есть параллельные прямые, ищите углы, которые получаются равными из-за их положения. Они часто ведут к двум похожим треугольникам.

* Общий угол

Общий угол двух треугольников — сильная подсказка. Он уже даёт один элемент для сравнения, а оставшиеся равенства иногда возникают из вертикальных или смежных углов.

* Прямой угол

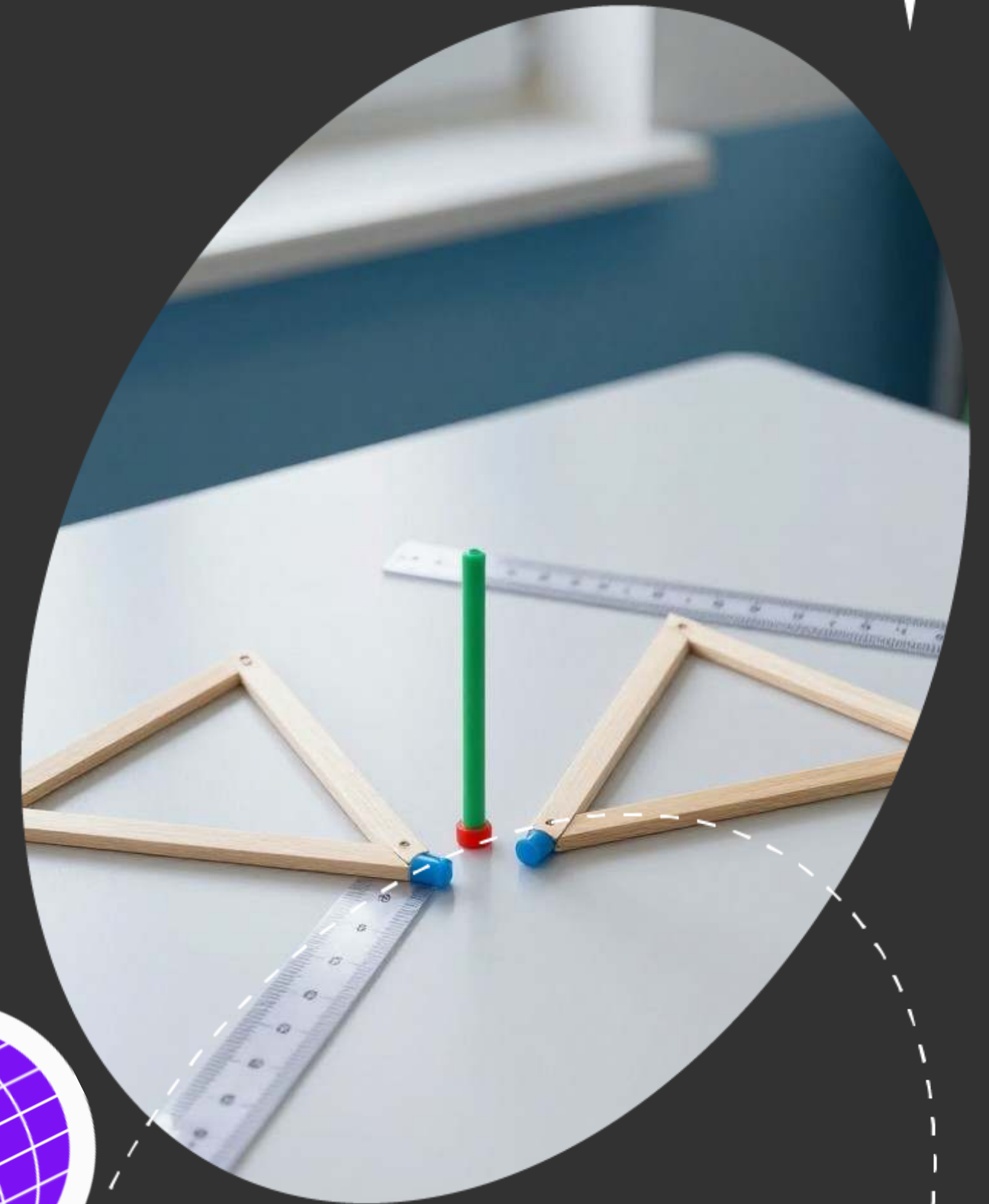
Прямой угол помогает заметить треугольники в окружении высот и перпендикуляров. Такие фигуры часто оказываются подобными без сложных преобразований.

* Высота

Проведённая высота нередко делит исходную фигуру на два треугольника с одинаковыми углами. Тогда можно сразу записывать отношения сторон.

* Биссектриса

Биссектриса тоже полезна: она создаёт равные углы и подсказывает, какие стороны нужно сопоставить. Это особенно важно в задачах на отношения отрезков.



Признаки подобия треугольников

Три основные ситуации, в которых доказывают подобие треугольников, и что именно нужно проверить в каждой из них.

Чаще всего в школьных задачах достаточно признака по двум углам, но важно правильно сопоставить соответствующие элементы.

Школьный курс геометрии

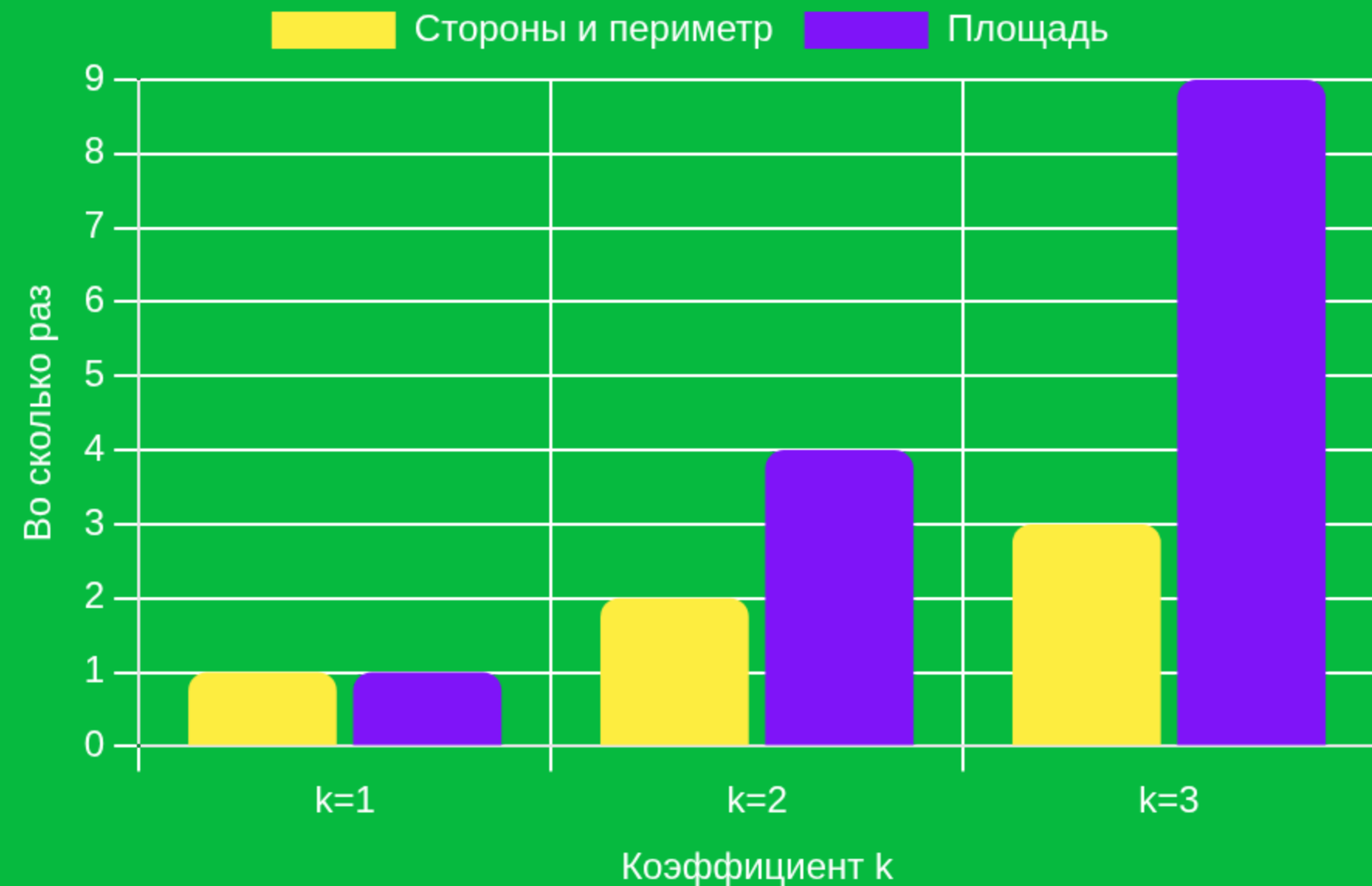
Признак	Что проверяют
По двум углам	2 равных угла
По двум сторонам	Угол между ними
По трём сторонам	Все отношения



Что даёт подобие: стороны, периметры, площади

Чем больше коэффициент подобия, тем сильнее меняются линейные размеры и площадь фигуры.

Линейные величины растут пропорционально k , а площадь — как квадрат k .



Свойства подобных фигур

По одной паре соответствующих
сторон сразу находят масштаб
фигуры и переходят к остальным
неизвестным длинам.



Пример из условия



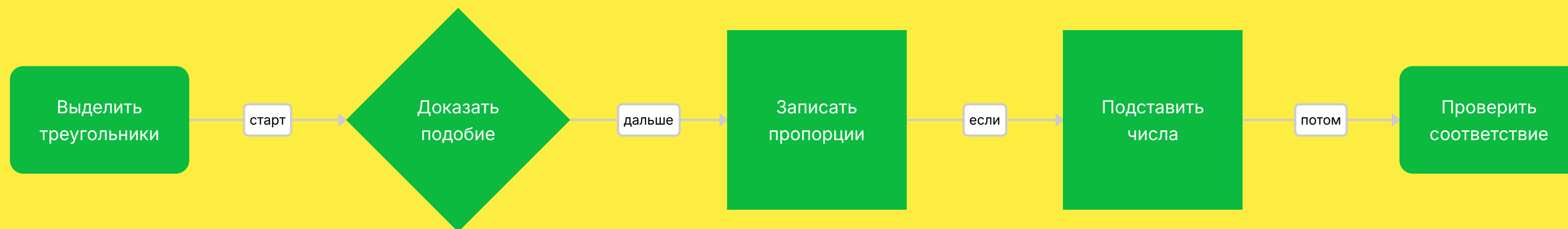
$$3/2$$

получается,
если сравнить
стороны 9 см и 6 см.

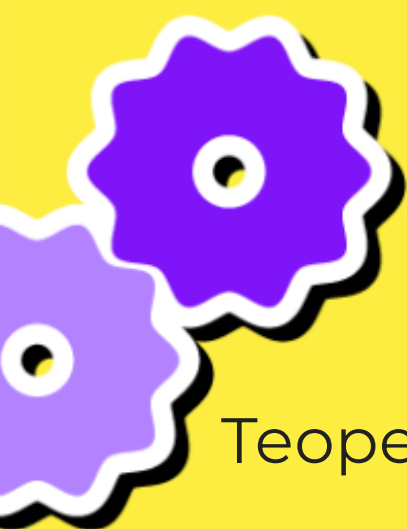


Как решать задачи методом подобия

Последовательность действий при решении задач на подобие



Две секущие и параллельные
прямые сразу создают равные углы
и пропорции отрезков.



Теорема Фалеса



2

**секущие образуют
пропорциональные
отрезки на каждой
линии.**



Параллели на сторонах треугольника



✦ Ищем одинаковые углы

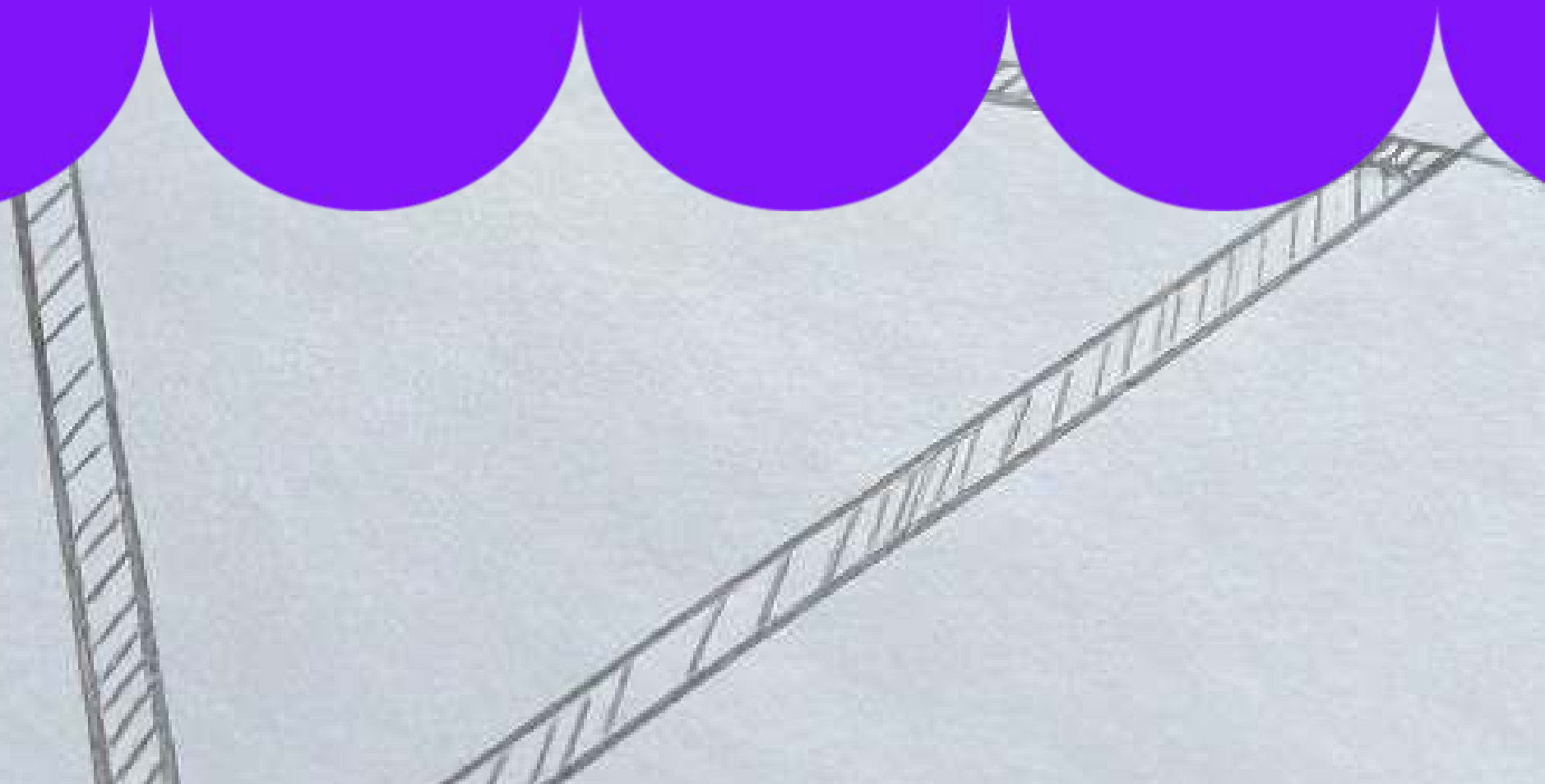
Если на рисунке проведена прямая, параллельная стороне треугольника, то она отсекает меньшую подобную фигуру. Сразу ищите пары одинаковых углов и отмечайте соответствующие стороны.

✦ Переходим к пропорции

Чаще всего в таких задачах одна длина известна в большой фигуре, другая — в малой. Тогда неизвестный отрезок находят через одну пропорцию, не выписывая лишних формул.

✦ Проверяем соответствие

Важно заранее понять, какие отрезки соответствуют друг другу. Ошибка в сопоставлении сторон меняет весь ответ, поэтому полезно пометить одинаковые элементы на чертеже разными штрихами.



Деление стороны по параллелям



Параллельные прямые делят стороны треугольника на пропорциональные отрезки. Это удобно, когда нужно быстро связать части на двух сторонах и найти неизвестную длину.

Отношения соответствующих отрезков равны, поэтому неизвестный отрезок находится из пропорции $4/6 = 8/x$.

Сторона 1	Сторона 2
4 см	8 см
6 см	x

Теорема Фалеса, школьный курс геометрии



Классика метода: высота к гипотенузе



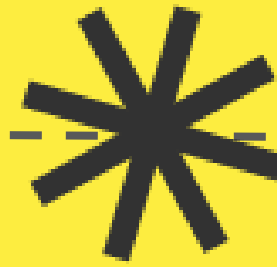
Находим подобие

После построения сравнивают исходный и получившиеся треугольники. По двум углам устанавливают подобие, а затем записывают пропорции между катетами, высотой и частями гипотенузы.



Построение высоты

В прямоугольном треугольнике проводят высоту к гипотенузе. Она делит исходный треугольник на два меньших, и в каждом сразу появляются равные углы.



Используем формулы

Из пропорций получают удобные соотношения: высота связана с отрезками гипотенузы, а катеты — с гипотенузой и соседним отрезком. Так решаются многие классические задачи.



Формулы для прямоугольного треугольника

На диаграмме видно, как меняются длины при разбиении гипотенузы на части p и q . Эти соотношения позволяют находить неизвестные элементы по одной найденной величине.

Если известны p и q , то $h^2 = pq$. Зная гипотенузу и прилежащий отрезок, можно вычислить катет без прямых измерений.



Свойства прямоугольного треугольника, школьная геометрия

Трапеция и равенство углов при параллельных



01

Параллельные основания

В трапеции основание и боковая сторона образуют углы, которые удобно сравнивать из-за параллельности. Это помогает заметить два треугольника с одинаковым набором углов и сразу перейти к подобию.

02

Диагональ как помощник

Когда в трапеции проводят диагональ или высоту, фигура распадается на более простые треугольники. Их легко сопоставить по равным углам и получить нужную пропорцию между сторонами.

03

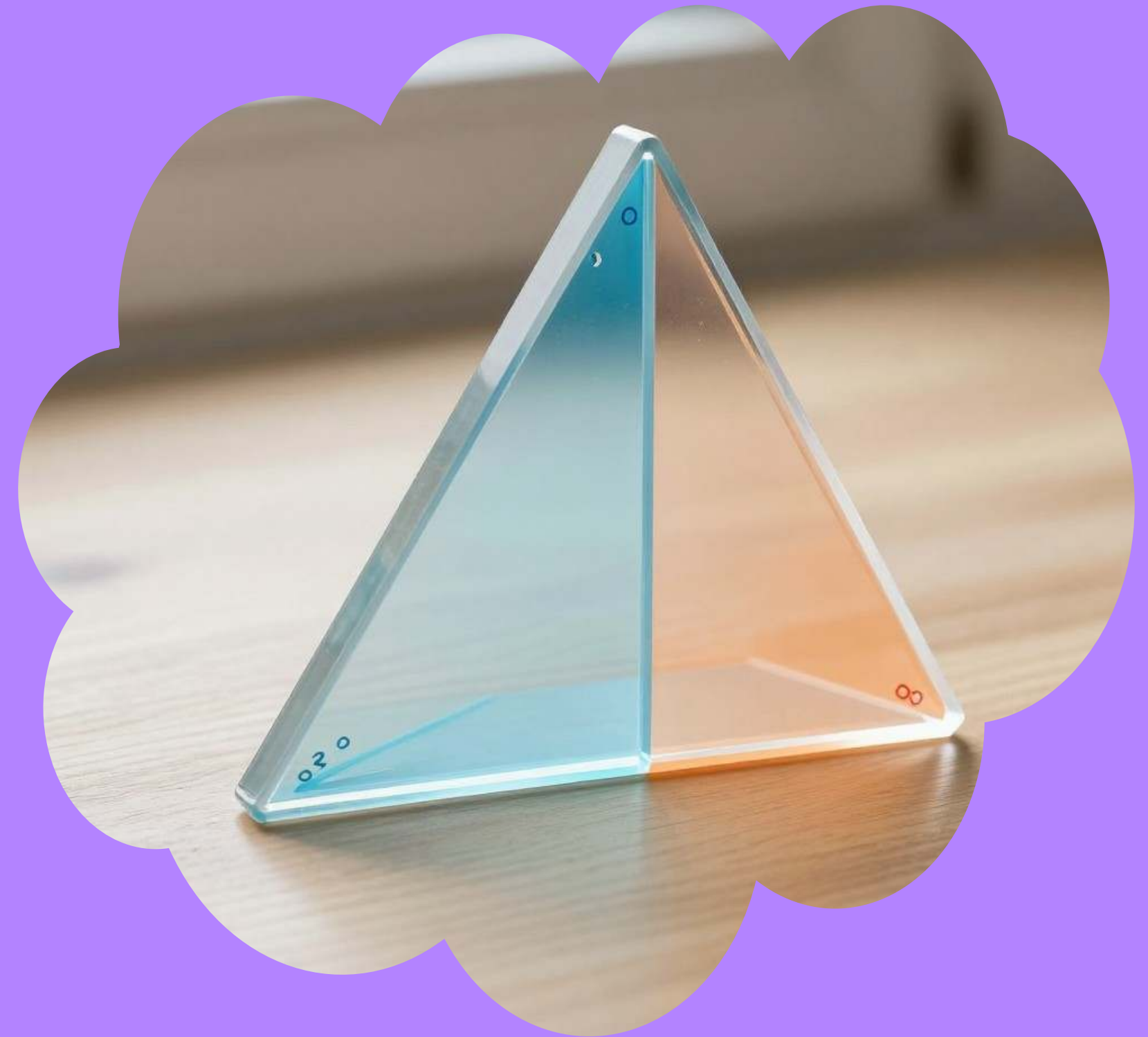
Ищем пропорции

Сходные треугольники внутри трапеции позволяют находить не только длины, но и отношения отрезков на основаниях. Особенно полезно это в задачах с неизвестной высотой или диагональю.

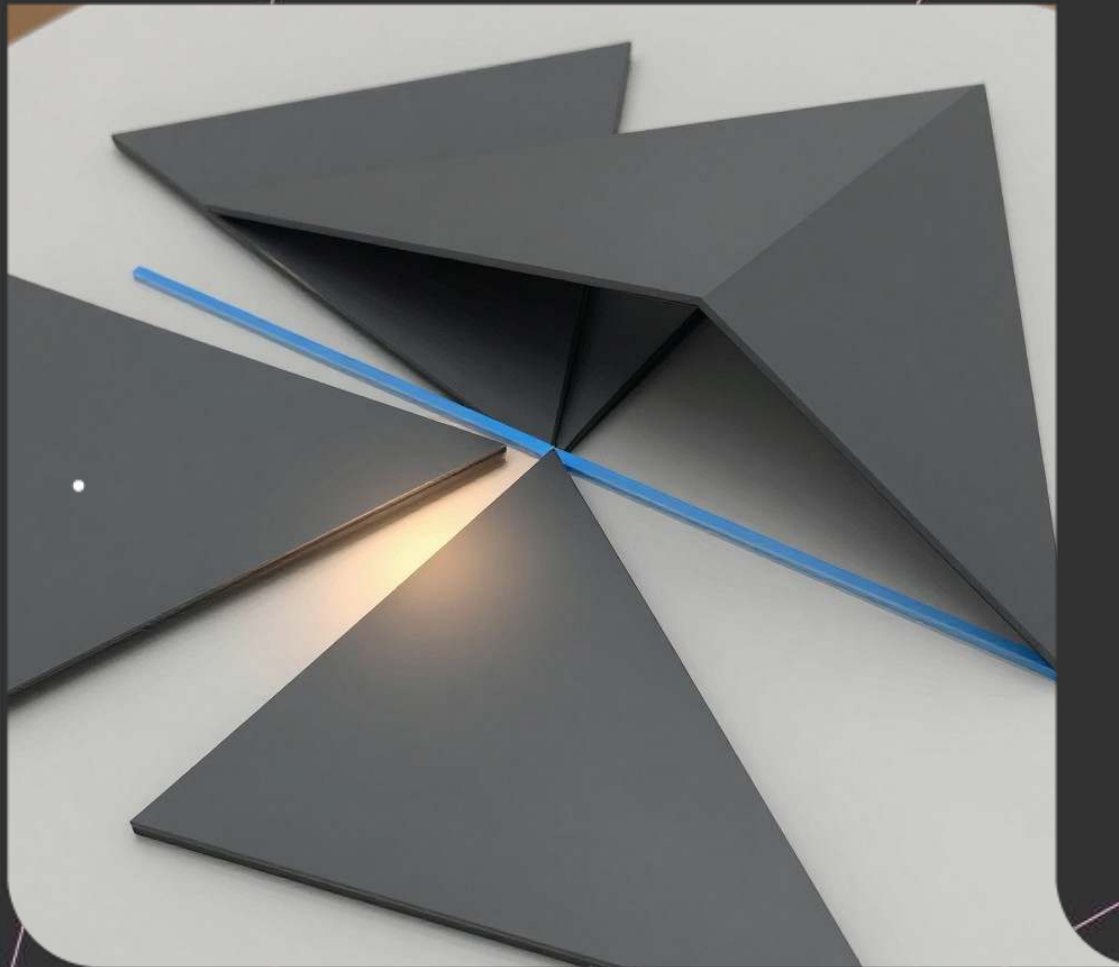
04

Читаем чертёж

Если чертёж кажется сложным, сначала отметьте параллельные стороны и равные углы. После этого обычно становится ясно, какие треугольники можно сравнить и какую сторону использовать для расчёта.

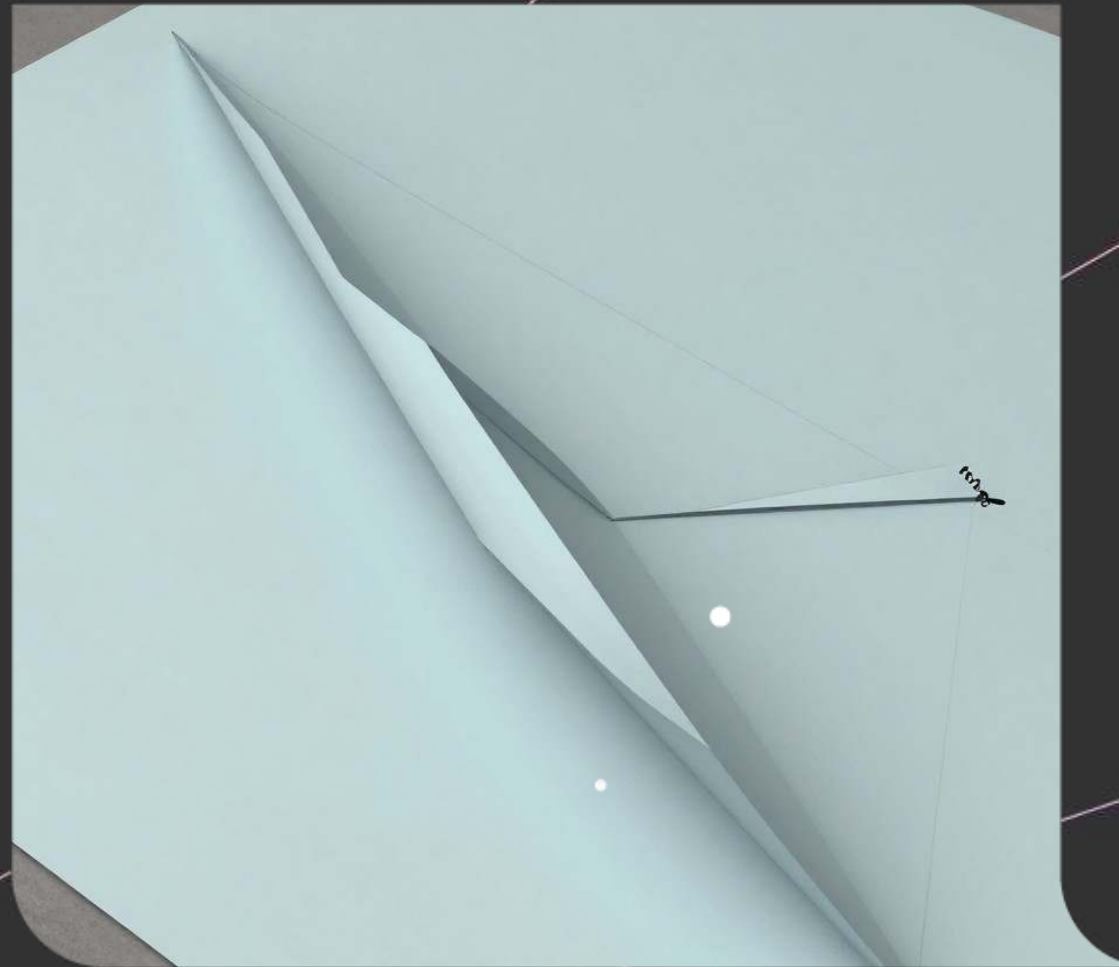


Задачи на высоту и длину в сложной фигуре



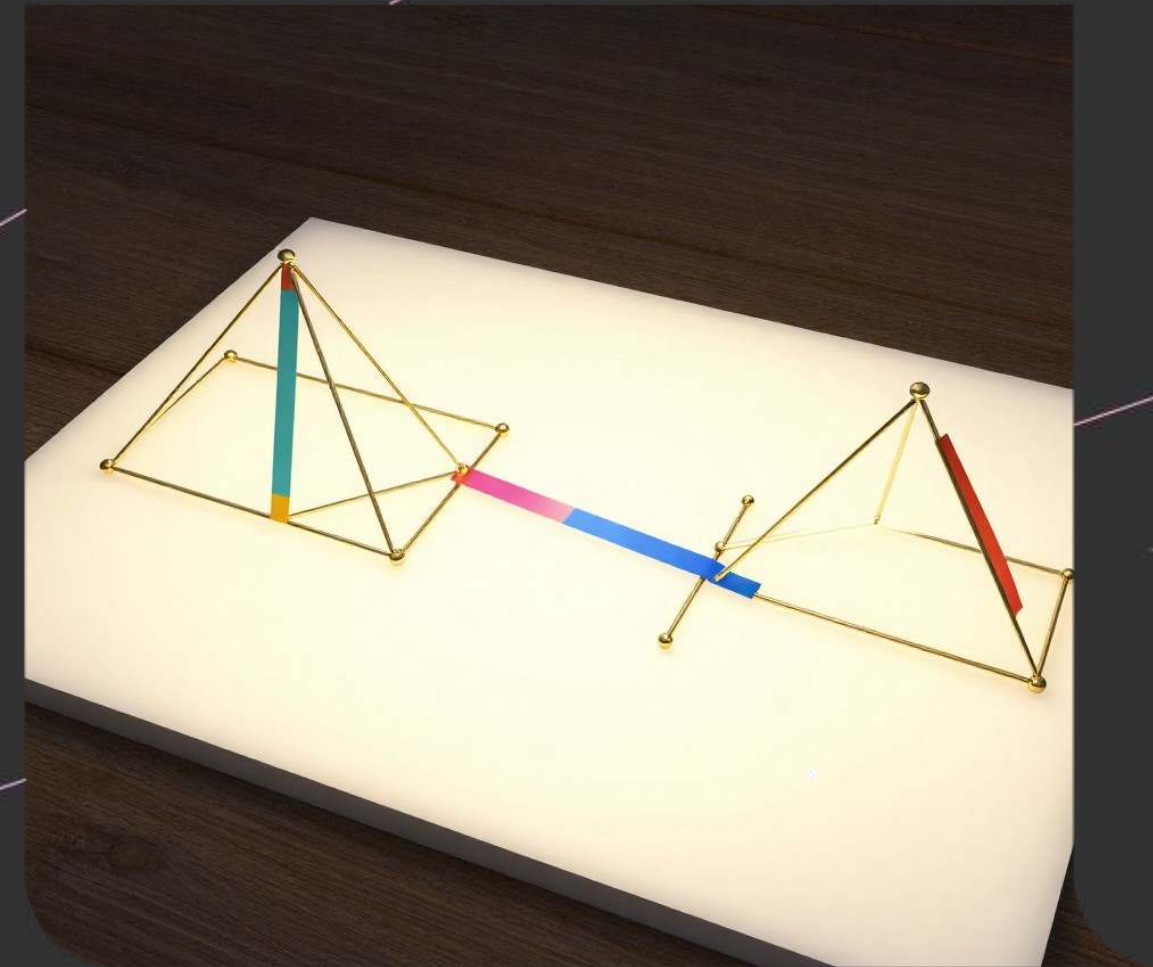
Скрытый треугольник

На одном чертеже виден высокий треугольник с известной стороной, а рядом — меньший, почти скрытый внутри фигуры. Стоит провести параллельную линию, и появляется вторая подобная фигура, готовая к сравнению.



Высота из построения

Иногда высота не дана напрямую, но её легко получить, если продолжить сторону или опустить перпендикуляр. Тогда два участка чертежа начинают отвечать друг другу по углам и длинам.



Короткий расчёт

После нужного достроения остаётся записать пропорцию и выбрать известные отрезки. Так сложная композиция из нескольких линий превращается в короткий расчёт с одним неизвестным.

Доказательные задачи: что можно установить



01

Параллельность линий

Подобие треугольников часто доказывает, что две прямые параллельны. Если соответствующие углы равны, можно сделать вывод о взаимном положении линий без дополнительных измерений.

02

Отношения отрезков

Из подобия легко получить отношение отрезков на сторонах и диагоналях. Достаточно правильно указать соответствующие вершины и аккуратно выписать пропорцию между нужными длинами.

03

Периметры и площади

Когда коэффициент подобия уже найден, можно сравнивать периметры и площади. Особенно важно помнить: площади похожих фигур связаны не как стороны, а как квадраты коэффициента.

04

Строим доказательство

В доказательных задачах полезно сначала назвать признаки подобия, а затем использовать их следствия. Такой порядок делает рассуждение коротким, ясным и легко проверяемым.

Как «достроить» фигуру для подобия

Путь от исходного рисунка к подобным треугольникам и пропорциям



Подобие в задачах с окружностью

angent and radius



Касательная и радиус

На окружности часто встречается касательная, проведённая к точке круга. Радиус, идущий в эту точку, перпендикулярен касательной, поэтому в задаче сразу появляется прямой угол и удобная основа для подобия.



Секущая рядом с касательной

Если через точку вне окружности проведены секущая и касательная, то в чертеже можно увидеть два треугольника с общими и равными углами. Они помогают связать внешние и внутренние отрезки.



Пропорция на окружности

Такие задачи особенно полезны, когда нужно найти длину отрезка без длинных вычислений. Достаточно заметить прямой угол, выделить похожие треугольники и аккуратно записать пропорцию.

Итог: почему метод подобия работает

Метод подобия работает потому, что переводит сложный рисунок в понятные отношения углов и сторон. Если видеть нужные треугольники, задача становится цепочкой точных и коротких шагов.